深谷 賢治 著

ゲージ理論と トポロジー

Springer

シュプリンガー・フェアラーク東京

まえがき

本書はゲージ理論の数学的な側面，特にヤン–ミルズ方程式に関わる部分を解説したものである．

予備知識としては多様体についての基礎的な事項と，ホモロジー群および基本群についての基礎知識を仮定している．

とはいえ本書を見ると読者は非常に多くの数学の分野の諸結果が，かなり高度なものも含めて（多くは証明抜きで）引用されているのに気づくであろう．これは本書がそれらを読者がすでに知っているという前提で書かれていることを意味するわけではない．(ゲージ理論が多くの数学の分野に関わることを示すために，むしろできるだけ多くの分野の関係する結果に言及するように心がけた.)

実際ゲージ理論の数学は現代数学の非常に多くの分野が関わり，また多くの分野の高度な知識が用いられる分野である．したがってこれに関わる知識の大部分を読者が持っていると仮定すると，そのような本を読める読者はすでにゲージ理論の数学を知っている人を除けばほとんどいない．必要な知識の主要部分を証明も含めて 1 冊の本に組み込むこともまた不可能である．

そこで本書ではゲージ理論に関わる諸知識のうちで，証明なども込めて必要なものについては（多様体，ホモロジー，基本群を除いて）本文の中で説明し，それ以外についてはおおよその内容と結果だけを述べることにした．

したがって読み進めるにあたって本書に説明が書いていない定理の証明を知らなかった場合でも，証明について特に別に学ばなくても先を読むのに差し支えない．むろん定理の証明そのものに興味が湧いた場合は参考文献にあげた書

物にあたっていただきたい．そのようなつもりで読めば上にあげた予備知識だけでわかるように書いたつもりである．

以下本書の各章の内容を簡単に記す．

本書の序論においては，ゲージ理論に関わる数学の諸分野についてその概説を述べ，読者がゲージ理論の数学（幾何学）における位置づけを知る助けとした．この部分ではとりわけ多くの事柄が引用されるが，ベクトル束の定義と諸性質および第5章で用いられる $K3$ 曲面の構成（これらには証明をつけた）を除いては後で使われることはそれほどない．細部について不明な点があっても，とりあえずおいておき第1章以降を読んでいただきたい．

第1章では接続の幾何学を概観し，ベクトル束の特性類について必要な事項を述べ，低次元の場合を中心にスピン構造の解説を行った．

第2章では，ゲージ理論の4次元の位相幾何学への応用であるドナルドソン多項式について，その基本的な考え方を述べると同時に，ゲージ理論の数学の中心であるヤン–ミルズ方程式の解の作る空間（モジュライ空間）の構造について，局所，大域の両面にわたって概説した．

第3章ではソボレフ空間などの解析学の準備の後，第2章で述べたモジュライ空間の基本性質の証明を行った．

第4章ではフレアーホモロジーと境界付き多様体のドナルドソン不変量について解説した．それにはコンパクトでない空間上の楕円型作用素の理論が必要になるが，これについても第4章で述べた．境界付き多様体のドナルドソン不変量は，いろいろな場所で引用されているが，それについてきちんと述べた文献が本，論文ともになかった．本書では相対ドナルドソン多項式の定義とその基本性質に対して詳しい証明を与えた．

第5章ではクロンハイマーの論文 [K3] に基づき，$K3$ 曲面にエキゾチックな微分構造が入ることの証明を述べ，ゲージ理論の4次元多様体の位相幾何学への応用の一端を示した．

本書には詳しい証明が述べてある節と証明の多くを省略し概観が述べてある節とが混在する．ゲージ理論の幾何学では比較的明確なアイディアであっても，それを実現するとき複雑な解析的な考察を要する場合が多い．それで初めから厳密な証明だけを述べてしまうと，その背後にある大切なアイディアを見失う

恐れがある．これをさけるためこのような構成をとった．

序論，第2章，第4章の最初の3節は証明を省略し概観が述べてある部分である．これを必要に応じて第1章を参照しながら読み（応用に興味があれば第5章を併せて読めば），ゲージ理論の数学的な部分の概観が得られる．第3章はゲージ理論の解析学では今となってはスタンダードな内容である．第4章の§4以後はあまり文献にない部分なので，複雑な証明も述べてある部分がある．

ゲージ理論の数学で本書で触れられなかった点などについては巻末の文献の項をご覧頂きたい．

本書の完成直前になってウィッテン（サイバーグ）らによるモノポール方程式の4次元幾何学への応用という，本書に関わる数学の大きな進歩があった．これについては付録に少しだけ述べることにした．

本書を書くにあたってシュプリンガー・フェアラーク東京のスタッフの方々に大変お世話になった．また太田啓史，亀谷幸生，古田幹雄（50音順）の3氏は，貴重な時間を割いて原稿を読み，うかつな著者の多くの間違いを指摘して下さった．これらの方々に深く感謝したい．

1995年8月

深谷　賢治

目　次

序　論

§ 0.1 初めに[1]

微分位相幾何学の始まりは 1950 年代で，その誕生を表すのが 3 つの大きな結果，トム (Thom) による同境 (cobordism) 理論，スメイル (Smale) による高次元ポアンカレ (Poincaré) 予想の解決，ミルナー (Milnor) による 7 次元球面上のエキゾチックな微分構造の発見であるといわれる．1950 年代は今の数学の中心になっているいろいろな理論体系が作られた時代であり，現代数学の黄金時代といってよいであろう．上の 3 つの結果も微分位相幾何学の内にとどまるものではなく，近隣諸分野の発展と密接に関わるものである．

例えば同境理論については，これがただちに応用されたのは，ヒルツェブルフ (Hirzebruch) による高次元リーマン–ロッホ (Riemann-Roch) の定理の証明であった．ヒルツェブルフ–リーマン–ロッホの定理は代数多様体上の直線束の切断の次元についてのものであるが，その証明の過程で用いられた符号定理の証明は，同境環についてのトムの結果を用いる「超大域的」なものであった．同境理論は同境という大変弱い同値関係で多様体の分類を行うものであったが，符号定理の証明（ある種の特性数の様子を調べる）にはそのような弱い分類で十分であった．(符号定理は個々の多様体の 2 つの量の間の等号であるが，この証明には多様体の全部を調べる同境環という大きな枠組みが使われた.）([Hi])

---

[1] この節で使う言葉の多くは後の節で説明する．

エキゾチックな球面については，その構成はきわめて直接的また初等的であったが，それが普通の球面と可微分同相でないことの証明には，ある種の特性類の整数性が使われる．すなわちミルナーの構成したのは境界付き 8 次元多様体 X でその境界 M が 7 次元球面と同相であるものである．ミルナーは X の符号数 (signature) と呼ばれるコホモロジーから決まる数を調べ，それが閉可微分多様体の符号数にはならないことを見いだした．もし M が 7 次元球面と可微分同相ならば，これに 8 次元球体をはって閉可微分多様体 $\widehat{X}$ を作ることができる．$\widehat{X}$ の符号数は X の符号数と等しいから矛盾する，というのがその論法である．ここで用いられたのは多様体がこれこれの条件を満たせばその符号数はこれこれの数で割り切れる，という整数性定理であった（[MS]）．

この種の整数性定理を組織的に導いたのがアティヤ–シンガー (Atiyah-Singer) の指数定理である．これの発見はディラック (Dirac) 作用素（の高次元化）と関わる．符号数は符号作用素という楕円型作用素と関わる．これからある整数性定理が出るが，この整数性定理では特性数の間の関係式は全部はでない，ちょうど 2 倍の分だけ不足である．これを決めるにはディラック作用素という別の楕円型作用素が必要であった．ディラック作用素は電子の相対論不変な量子論を作るためにディラックが導入したものであるが，アティヤ，シンガーはこれを高次元化し整数性定理に用いたのである．

符号定理，ヒルツェブルフ–リーマン–ロッホの定理から指数定理にいたる道にはグロタンディク (Grothendieck) によるリーマン–ロッホの定理の一般化と K 群（グロタンディック群）の発見がある．この K 群はアティヤとヒルツェブルフによって位相的 K 理論として位相幾何学に取り入れられ，多くの応用を生むとともに，指数定理に向かう主要な一歩となった（[At1]）．

さらに古くを見れば，アティヤ–シンガーの指数定理にいたるまでにはガウス–ボンネ (Gauss-Bonnet) の定理とリーマン–ロッホの定理に関わる長い歴史がある．特性類自身がガウス–ボンネの定理（曲面の曲率とオイラー (Euler) 数の関係を与える定理）を高次元化する研究の中から生まれたものである．この特性類の理論が可微分多様体の不変量（位相構造では決まらず，微分構造で決まる量）を作る手段となった．一方ではホッジ (Hodge)，ド・ラーム (de Rham)，小平による調和積分論の発展が楕円型方程式とコホモロジーの関係を明らかに

していった．

これらを支えたのが楕円型偏微分方程式論の発展である．楕円型偏微分方程式論の源流である直交射影の原理はリーマンにまでさかのぼる問題であり，リーマン面の場合（複素1次元の場合）にヒルベルト (Hilbert) らを経てワイル (Weyl) によってこれが確立されると，直ちにそれはホッジらによって高次元化された．

楕円型方程式論そのものの発展はこれと平行して進む．ヒルベルト空間論自身が直交射影の原理と密接に関わって生まれたものであるし，超関数 (distribution) が生まれると，直ちにド・ラーム，小平によって調和積分論に使われた．そして楕円型方程式論の次の大道具すなわち擬微分作用素は，できたかできないかの内にアティヤ–シンガーの指数定理の証明に使われた．

そもそもリーマンが直交射影の原理を使おうとしたのはモジュライ (moduli) の問題，つまりリーマンの場合は種数が決まったリーマン面全体の作る集合の次元を数えるためであった．

楕円型方程式によるモジュライの問題の研究という考え方はそのまま小平らに受け継がれ高次元化される．高次元複素多様体のモジュライの理論（変形理論）を小平，スペンサー (Spencer) が創始したとき，使った主な方法は楕円型方程式であった．すなわち複素構造をある非線形楕円型方程式の解と見ることであり，その線形化方程式の解の空間の次元として複素構造のモジュライの次元がわかる．さらに線形化方程式の解の空間はある種のコホモロジーという意味を与えられる（[小平 1],[小平 4]）．この構図はゲージ理論（ベクトル束上の接続に対するモジュライの理論とここでは見ておく）でもそのまま受け継がれる．しかし，おそらく非線形方程式を扱うのにはまだ数学が十分進歩していなかったために，ゲージ理論がこの方法で本格的に扱われるにはさらに20年後で，70年代における微分幾何学における非線形問題の応用の爆発的な進歩を待たなければならなかった．高次元リーマン–ロッホの定理が一番大きな応用を見いだしたのは複素曲面の分類であった．リーマン–ロッホの定理とそれから導かれる特性数の間の関係は，複素曲面の分類理論の重要な手法であった．

微分位相幾何学そのものはどうなったであろうか．50，60年代にはそれは代数的位相幾何学の発展と深く関わりながら進歩していく．トムの同境環の理論もまた，同境による多様体の分類を特定の空間（トム空間）のホモトピー群の

計算に帰着するものであったが([足立] 参照), エキゾチック球面の発見後にミルナーがケルヴェア (Kervaire) らと創始した手術の理論もまた, 可微分多様体の問題を代数的位相幾何学と結びつける方法を与えるものであった([田村 2] 参照). 例えば, 球面の微分構造の数と球面のホモトピー群の J 準同型とは関係がある.

なぜこんなことをゲージ理論の本の初めに長々と書いたのか. それはゲージ理論こそ 50 年代のこうした多くの数学の豊かな結合を今に蘇らせてくれる分野であるからである. 現代最先端の解析学である非線形問題, 微分位相幾何学で残った謎の 4 次元, 素粒子論に端を発するヤン–ミルズ (Yang-Mills) 方程式, 応用されるべき対象としての複素曲面. 50 年代の風景を (より発展した形で) 再び見いだすことができる. 現代数学が若々しかったころの夢の再現をゲージ理論に託しているのは筆者だけではあるまい.

数学としてのゲージ理論は今では様々に分岐し, いろいろな内容を持っている. この本ではその一面であるヤン–ミルズ場に関わる部分だけを取りあげる. ヤン–ミルズ場に関わるゲージ理論の数学の今の中心は関数解析的手法による解の作る空間 (モジュライ空間) の研究とその (主に) 4 次元の位相幾何学への応用である.

数学としてのゲージ理論の誕生は 1970 年代である. 1950 年代に創始された微分位相幾何学は 1960 年代を通じて発展を続け, 手術の理論に基づく 5 次元より次元の高い単連結可微分多様体の分類や多様体の 3 角形分割可能性の障害の決定 (やはり 5 次元以上) などの大きな成果をあげたが, 一番なじみ深いはずの 3 次元と 4 次元の場合の研究は大きな困難に行き当たっていた.

一方で 1950 年代前後に多様体の上ベクトル束 (ファイバー束) の接続の理論としての基礎固めを終えた微分幾何学は, 1960 年代のリー (Lie) 群や対称空間の研究を経て, 1970 年代にはいると大きく発展を始めていた. 幾何学的な問題の多くが翻訳される多様体上の微分方程式は, 長い間取り扱いが困難であったが, ここにいたって始めて研究の主対象となるにいたり, 非線形方程式を扱う大域解析が可能になったのである.

微分幾何学の発展をうけて 3 次元と 4 次元の微分位相幾何学は微分幾何学的方法を探り始める．位相構造より精緻な構造を考え，それに基づいて行きづまった研究の打破をはかったのである．これが初めて大きい成功を収めたのは 3 次元の場合であった．すなわち，サーストン (Thurston) は 3 次元の多様体は全てリー群論的に理解できる 8 つの幾何学のどれかを持つことを予想し，これに基づいて 3 次元多様体を分類することを提唱した．そしてこの予想が多くの場合に正しいことを証明した．1970 年代半ばのことである．

ヤン–ミルズ場が数学，特に幾何学に現れるのも同じ頃である．これを数学，特に幾何学の研究者の間に定着させたのはアティヤ，ヒッチン (Hitchin)，シンガーの論文 [AHS] であった．(シュワルツ (Schwartz) の先駆的論文 [Sc] がその直前にあったが.) しかし当初から 4 次元多様体の分類理論への応用を目指してヤン–ミルズ方程式の研究が始まったわけではあるまい．数学としてのゲージ理論は何よりもまず調和積分論の非線形化として始まった．それはアティヤ–シンガーの指数定理をはじめとした線形楕円型方程式の大域理論の精華がもっとも自然に一般化されまた応用される場であった．

同時にツイスター理論を通じて複素 3 次元空間上の代数的ベクトル束の分類理論との関係が見いだされたことも画期的であった．(ヤン–ミルズ場と代数的ベクトル束との関係は後にはより直接的に，代数曲面の上のヤン–ミルズ方程式の解の空間と代数的ベクトル束のモジュライ空間の間の関係として再登場する.)

こうして ADHM（アティヤ，ドリンフェルト (Drinfeld)，ヒッチン，マニン (Manin)）による 4 次元球面上の自己双対接続（ヤン–ミルズ方程式の解の一種）の決定が完成する（[ADHM]）．この時点では，ヤン–ミルズ場の幾何学は，たとえば KdV 方程式などの無限次元自由度の可積分方程式の理論の一種とみなされるべき性格が強かった．関数解析というより代数解析であったわけである．

これらの研究と平行して，あるいは直後に行われたのがヤン–ミルズ方程式の関数解析的研究である．これは 1970 年代の大域非線形解析としての微分幾何学の流れに沿ったもので，その中心の一つでもあった．この研究の立役者はウーレンベック (Uhlenbeck) とタウベス (Taubes) である．彼らが証明した定理はそれぞれヤン–ミルズ方程式の解の滑らかさと存在に関わるものであり，偏微分方程式論が伝統的に問題にしてきた事柄である．しかしその解決のされか

たはすでに単に存在，滑らかさといった問題意識を越えるものがあることを示唆していた（[T1],[U1]）．

ゲージ理論が4次元位相幾何学の中心に現れる直前にもう一つの事件が起こる．すなわちフリードマン (Freedman) によって4次元**位相**多様体に関わる主要問題が，今までどちらかというと位相幾何学では異端的であった方法で，解決されるのである（[FQ]）．これは多くの4次元位相幾何学の研究者にとっては意外な，晴天の霹靂というべき事態であったようである．

そして1982年，当時まだ無名の学生であったドナルドソン (Donaldson) によって，これまた突然，ゲージ理論によって，4次元の微分位相幾何学の難問の一つ交叉形式の決定についての進歩がもたらされる．この論文 [D1] を読むとその後のゲージ理論の数学の発展の主要な考え方がすでにほとんど含まれていることに驚かされる．とはいえ，それからしばらくは果たしてゲージ理論が4次元の微分位相幾何学の中でどんな役割を果たすのか固唾をのんで見守っていた研究者が多かったのではないだろうか．ドナルドソンはそんな中で h 同境定理の反例の構成 [D5]，交叉形式の研究の更なる発展 [D3]，多項式不変量の定式化 [D6] などの画期的な結果を証明していく．他の研究者も次々と参入してきてゲージ理論は4次元の微分位相幾何学の中心にその地位を確立するにいたったのである．

ゲージ理論の数学の発展はその導入の前後には理論物理の影響が顕著であったが，しばらく理論物理とは一応独立に発展したように見える．しかし1980年代中盤以後ウィッテン (Witten) を中心とした理論物理学者たちの影響は再び大きくなってきた．1970年代から始まった数理物理と数学の交流の流れは幾何学にも顕著に現れ，まずチャーン (Chern)–サイモンズ (Simons) 汎関数という，ヤン–ミルズ汎関数と関係が深い，しかし異なる汎関数をラグランジアンとするゲージ場の理論が，3次元多様体の不変量などを通して低次元多様体の位相幾何学に大きな影響を与え始める（[W6]）．これらは位相的場の理論として総括されその枠組みにはドナルドソンらの自己双対方程式（ヤン–ミルズ方程式）を用いた理論も含まれる（[W2]）．というより位相的場の理論なる概念を作ったものになったのがやはりヤン–ミルズ場に基づくフレアー (Floer) の無限次元のホモロジー論（[F1]）とそのドナルドソン不変量との関係であったのである．

(これが本書の第 4 章のテーマである.)

そして 1994 年のサイバーグ (Seiberg), ウィッテンのモノポール方程式の登場となり新しい局面が開かれようとしている.

ドナルドソン以後現在までのゲージ理論の数学の流れの主要部分を網羅的に辿ることはこの節でも本文でも試みなかった. 本書で扱われているものはその一部にすぎない.

ゲージ理論年表

(数学関係に限る. *がついているものの年は関係論文の出版年に基づいており, 発見されてから数年遅く, また順番が逆転している場合もある.)

1918年*	ワイル (Weyl)	ゲージ変換の発見
192?年	カルタン (Cartan)	接続の概念
1931年*	ド・ラーム (De Rham)	ド・ラームの定理
1934年*	モース (Morse)	モース理論
1935年*	ホッジ (Hodge)	調和積分論
1946年*	チャーン (Chern) ヴェイユ (Weil)	チャーン・ヴェイユ理論 (ド・ラーム理論に基づく特性類の理論)
1952年*	ロホリン (Rokhlin)	ロホリンの定理
195?年	トム (Thom) スメイル (Smale) ミルナー (Milnor)	微分位相幾何学始まる
1958年*	小平 スペンサー (Spencer)	複素構造の変形理論 (現代的なモジュライ理論の創始)
1963年*	アティヤ (Atiyah) シンガー (Singer)	楕円型作用素の指数定理
1974年	ヤウ (Yau)	キャラビ (Calabi) 予想解ける (非線形偏微分方程式に基づく微分幾何学の最大の成果)
1978年*	アティヤ ヒッチン (Hitchin) シンガー	ゲージ理論の数学が本格的に始まる
1978年*	アティヤ ドリンフェルト (Drinfeld) ヒッチン マニン (Mannin)	S^4上の自己共役接続を決定
1981年	フリードマン (Freedman)	4次元ポアンカレ予想解ける
1982年*	ウーレンベック (Uhlenbeck)	ヤン–ミルズ方程式の除去可能特異点定理
1982年*	タウベス (Taubes)	多くの4次元多様体上でヤン–ミルズ方程式の解が存在することを証明
1982年	ドナルドソン (Donaldson)	ゲージ理論の4次元位相幾何学への最初の応用

1985 年	ドナルドソン	ドナルドソン多項式
1985 年	キャッソン (Casson)	キャッソン不変量
1987 年*	ジョーンズ (Jones)	結び目の新しい不変量を作用素環を用いて導入
1987 年*	ドナルドソン	4 次元 h 同境定理の反例
1988 年	ウィッテン (Witten)	位相的場の理論
1989 年*	フレアー (Floer)	フレアーホモロジー
1989 年*	ウィッテン	ジョーンズ不変量をチャーン–サイモンズゲージ理論で解釈
1990 年*	タウベス	キャッソン不変量をゲージ理論で解釈
1990 年	クロンハイマー (Kronheimer)	トム予想とゲージ理論の関係
1993 年	クロンハイマー ミュロフカ (Mrowka)	ドナルドソン多項式の構造定理
1994 年	サイバーグ (Seiberg) ウィッテン	モノポール方程式（サイバーグ–ウィッテン方程式）がヤン–ミルズ方程式と等価であると予言.
1995 年	タウベス	サイバーグ–ウィッテン不変量と量子コホモロジーの一種（グロモフ (Gromov)–ウィッテン不変量）の等価性を証明.

§ 0.2　モース理論の過去と現在

I　モース理論の始まり

話はさかのぼる．

1950年代に微分位相幾何学が一つの分野として成立する前になされた，その前史として重要な研究がいくつかある．たとえば，ベクトル束（あるいは多様体）の特性類の研究やそれと深く関わるガウス–ボンネ (Gauss-Bonnet) の定理の高次元化の研究，多様体のユークリッド空間への埋め込みの研究，特にホイットニー (Whiteney) による交叉の解消の定理，などがその例である．何より本節で述べるモース (Morse) 理論はその中でももっとも重要なものである．そればかりではなく微分位相幾何学誕生後もモース理論は多様体の幾何学の故郷として微分位相幾何学，微分幾何学が大きく発展するたびに姿を見せ，深化を繰り返している．モース理論の歴史を語ることは微分位相幾何学の歴史を語ることである．

一言でいえばモース理論は空間の位相をその上の関数を通して調べる理論である．その始まりでは空間は写像のなす空間，つまり無限次元空間であった．M を（有限次元の）多様体とし，$\Omega(M)$ をそのループ空間すなわち S^1 から M への写像全体とする．(写像の微分可能性などについてはここではとやかく言わない．) $\Omega(M)$ の元 ℓ に対してその長さ $L(\ell)$ を考えると，これは ℓ の関数である．$\Omega(M)$ 上の関数とみなしたときの $L(\ell)$ の微分が消える$\Omega(M)$ の元 ℓ のことを測地線 (geodesic) と呼ぶ．モース理論の始まりは $\Omega(M)$ の位相と測地線の関係を調べることであった．(このあたりについてはこの節のもう少しあとの部分で触れる．)

このように始まりが無限次元であったとはいえ，いきなり無限次元を考えるのはやはり難しい．まず有限次元多様体の場合を考えてみることにしよう．

有限次元の多様体 M とその上の関数 f から出発しよう．まず局所的には f はどのように見えるだろうか．次のことが比較的容易に証明できる．(この節に

ついてより詳しくは [Mi1],[Mi2],[長野],[服部 2] などを参照.)

定理 0.2.1 f の p での微分が 0 でなければ，p の回りの M の座標系 $x_1, \cdots, x_n$ をうまく選んで $f(x_1, \cdots, x_n) = x_n$ となるようにすることができる.

$df = 0$ となる点のことを臨界点 (critical point) という．臨界点の回りでの f の様子はどうであろうか．1 階微分が消えないときは 1 階微分で関数の様子はわかり，1 階微分が 0 で 2 階微分が消えないときは 2 階微分で関数の様子はわかる$\cdots$ というのが一変数関数の微積分の基本的な考え方であった．多変数でも同様のことが成立すると考えられる．定理 0.2.1 はその一例である．1 階微分が消えるというのはその場合外微分 df が 0 ということであった．ではこの場合「2 階微分が消えない」というのは何に当たるであろうか．f のヘッセ (Hesse) 行列が可逆というのがそれに当たる．ここで fのヘッセ行列，$\mathrm{Hess}_f(p)$ とは

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

をさす．ここで $x_1, \cdots, x_n$ は p の回りの座標系である．p が臨界点のとき，座標変換によってヘッセ行列は共役だけ異なる．つまり座標系 $y_1, \cdots, y_n$ で計算したヘッセ行列は

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}\right) = {}^t\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$$

になる．臨界点 p が非退化 (non degenerate) であるとはヘッセ行列が可逆であることを言う．(上で述べたことよりこの定義は座標系によらない.)

定理 0.2.2 非退化な臨界点 p に対してその回りの座標系 $x_1, \cdots, x_n$ をうまくとって

$$f(x_1, \cdots, x_n) = -\sum_{i=1}^{k} {x_i}^2 + \sum_{i=k+1}^{n} {x_i}^2$$

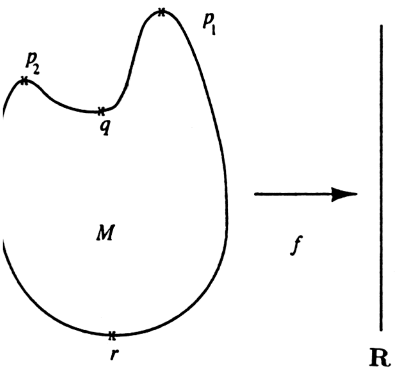


図 0.2.1

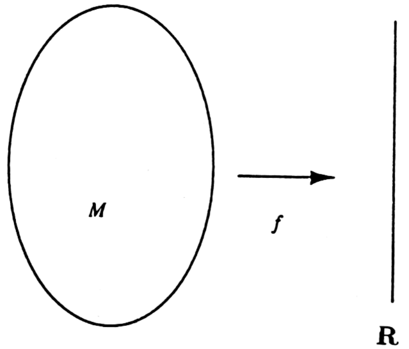


図 0.2.2

とすることができる．ここで k はヘッセ行列の負の固有値の数で臨界点 p のモース指数 (Morse index) と呼ばれる．

定理 0.2.2 の証明は [Mi1] §2，[長野] 2.1 参照．

すべての臨界点が非退化であるような関数をモース関数 (Morse function) と呼ぶ．上の二つの定理でモース関数の局所的な様子は完全に記述される．モース関数の例を一つ図示する（図 0.2.1）．

図 0.2.1 で多様体 M は球面で 3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ に埋め込まれている．また関数 f は z-座標を対応させる関数である．f の臨界点は図中の p_1, p_2, q, r の 4 点でそのモース指数は 2, 2, 1, 0 である．

II モースの不等式

次の定理はモースの不等式 (Morse inequality) と呼ばれ，モース関数の性質と多様体の位相（大域的な性質）を結びつける定理として最初に得られたものである．

定理 0.2.3 閉多様体 M 上にモース関数 f があり f の指数 k の臨界点の数が

d_k であるとき任意の体 $\mathbf{F}$ に対して

$$\mathrm{rank}\ H^k(M;\mathbf{F}) \le d_k$$

が成立する（$H^k(M;\mathbf{F})$ はコホモロジーを指す）．

図 0.2.1 の例では左辺は $k=0,1,2$ に対してそれぞれ 1, 0, 1 で右辺は 1, 1, 2 であるから不等式は（当然であるが）成立している．しかしこの場合は等号は成り立っていない．むろん図 0.2.2 のようなより単純なモース関数をとると等号が成立している．

上の定理 0.2.3（モースによる）の証明（この証明はおそらくトム (Thom) による）を説明しよう．M 上にリーマン計量 (Riemann metric)g_M をとる．(リーマン計量とは各点 p に対してその接空間 $T_p(M)$ 上の正定値な計量 $g_{M,p}$: $T_p(M)\otimes T_p(M) \to \mathbf{R}$ で p に滑らかに依存するものを与えるものであった.) g_M を用いてモース関数 f に対してその勾配ベクトル場 (gradient vector field)grad$f$ を対応させる．つまり

$$g_{M,x}(\mathrm{grad}_x f, X) = X(f)(x)$$

が任意の $x \in M$ と x での任意の接ベクトル X に対して成立しているとする．また $-\mathrm{grad} f$ が引き起こす 1 係数変換群 (one parameter group of transformations) を φ_t とおく．すなわち $\varphi_0(x) = x$ かつ

$$\left.\frac{D\varphi_t(x)}{dt}\right|_{t=t_0} = -\mathrm{grad}_{\varphi_{t_0}(x)} f$$

が任意の x, t_0 に対して成り立っているとする．f の臨界点 p に対して

$$e_p = \left\{ x \in M \,\middle|\, \lim_{t\to-\infty} \varphi_t(x) = p \right\}$$

とおく．次のことが証明できる．

(0.2.1.1) p のモース指数を k とすると e_p は $\mathbf{R}^k$ に同相である．

(0.2.1.2) さらに $\bar{e}_p$ を e_p の閉包とすると，$\bar{e}_p$ で $\bar{e}_p - e_p$ を一点につぶしたものは k次元球面 S^k に同相である．

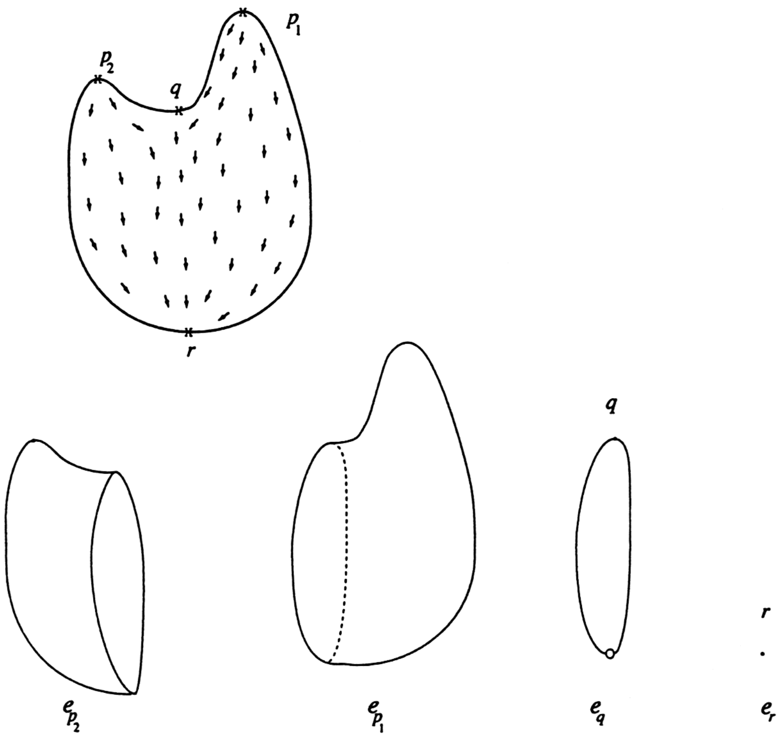


図 0.2.3

証明はしないが図 0.2.1 のモース関数の場合は図 0.2.3 のとおりである．

別の言葉で言うと，この場合は各々のモース指数 k の臨界点 p に対して k 次元の胞体が一つあるような M の CW 複体 (CW complex) への分解が存在する．

そこで CW 複体のホモロジーについてのよく知られた結果（たとえば，[小中菅] 2 章，[服部 3] 3 章，[中岡] 3.3 参照）を適用すれば求める結果は得られる．

しかし CW 複体のホモロジーの定理を知らない読者のためにもう少し解説を加えよう．まずモース関数を適当に変えると二つの臨界点 p, q に対して

$$p \text{ の指数} < q \text{ の指数}$$

が成り立てば

$$f(p) < f(q)$$

が成立するようにすることができる．(証明は省略する．たとえば [Mi2] §4 にある.) そこでそのように f をとり直しておく．実数 $c_0 < c_1 < \cdots < c_k < \cdots < c_n$ を p が指数 k の臨界点なら $f(p) < c_k$ となるように選び

$$M_k = \{x \in M \mid f(x) < c_k\}$$

とおく．定理 0.2.3 を証明するには

$$H_*(M_k, M_{k-1}; \mathbf{Z}) = \begin{cases} 0 & k \neq * \\ \mathbf{Z}^{d_k} & k = * \end{cases} \tag{0.2.2}$$

を証明すればよい．これは次のようにして示せる．まず切除同形定理 ([小中菅] p.356, [服部 3] p.87, [中岡] p.84 参照) より

$$H_*(M_k, M_{k-1}; \mathbf{Z}) \cong H_*(M_k - \mathrm{Int}\ M_{k-1}, \partial M_{k-1}; \mathbf{Z})$$

が成り立つ．(以後 Int A は集合 A の内部を指す.) $M_k - \mathrm{Int}\ M_{k-1}$ で ∂M_{k-1} を一点につぶしたものは (0.2.1.2) により d_k 個の n 次元球面 S^n を一点ではったものを 変位レトラクト (deformation retract, $A \subseteq B$ が B の変位レトラクトであるとは大体 B を A に連続につぶせるというような意味である．[小中菅] p.45, [服部 3] p.35, [中岡] p.6 参照．A が B の変位レトラクトとすると，A と B はホモトピー同値で特にホモロジーが一致する) としてもつ．(0.2.2) はこのことから直ちに従う．

この節はまだ序章なのでこのあたりは詳しくは証明しない．図 0.2.2 のモース関数の場合は図 0.2.4 のとおりである．

III 臨界点のキャンセルとポアンカレ (Poincaré) 予想

さてモース理論の進歩の次の重要な一歩はスメイル (Smale) による高次元ポアンカレ予想にかかわるものである．これについて述べよう．

前に述べたようにモースの不等式，定理 0.2.3 で等号は成立するとは限らない．これはいって見れば無駄な臨界点があるためである．(図 0.2.1 と 0.2.2 を比べて見よ.)

それでは多様体上にモース関数が与えられたときこれを変形してモースの不

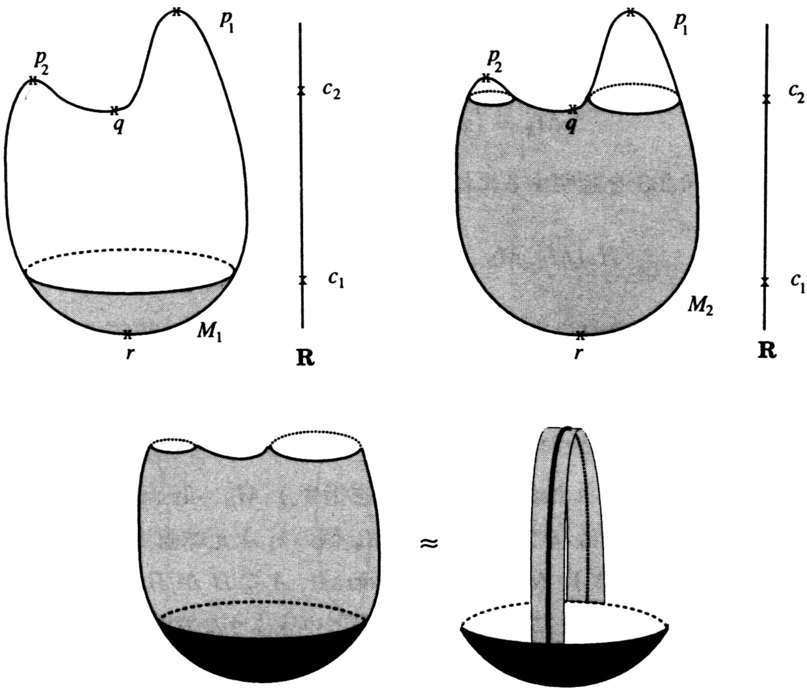


図 0.2.4

等式で等号が成立するようにできるであろうか[2]．一番簡単な場合が多様体が球面と同じホモロジーを持つ場合であろう．この場合は

(0.2.3)　n 次元閉多様体 M が球面と同じホモロジーを持つとき，M 上にはただ二つの臨界点を持つモース関数はあるか?

という問題になる．閉多様体上にただ二つの臨界点を持つモース関数が存在すれば，その二つの臨界点は最大値と最小値でなければならない．したがってその指数は n （次元）と 0 でなければならない．すると (0.2.1.2) より多様体はただ一つの 0 胞体とただ一つの n 胞体からなる CW 分解を持つ．これは多様

[2]任意の多様体上にモース関数が存在することはよく知られている．

体が球面（と同相）であることを意味する．

というわけで (0.2.3) は，ホモロジー球面は球面であるか，という問題と同値になる．この問題にはポアンカレが 3 次元の場合にすでに反例を与えている．そしてポアンカレが代わりに提出したのが次の有名なポアンカレ予想である．(正確にはポアンカレが予想したのは 3 次元の場合だけである.)

(0.2.4) 単連結な n 次元閉多様体 M が球面と同じホモロジーを持つとき，M は球面と同相か．

スメイルはこの問題に次元 n が 5 以上の場合に肯定的な解決を与えた．そのときの考え方は基本的には上で説明したものである．すなわちまず M 上のモース関数をとり，それを変形してできるだけ簡単にしていく．そうして最後に臨界点を二つにすることができれば，問題が肯定的に解けることになる．

臨界点を減らしてモース関数を簡単にするためにスメイルが使った方法を説明しよう．図 0.2.1 と図 0.2.2 に戻る．図 0.2.1 にある余分な 2 つの臨界点をなくして図 0.2.2 のようにするにはどうしたらよいであろうか？

図 0.2.5 のように変形していけばよいであろう．この変形では図 0.2.1 の臨界点 p_1 と q がくっつき，第 3 段階でキャンセルする．この例での p_1 と q のように二つの臨界点が互いにキャンセルするための条件は何であろうか．

まず図 0.2.1 の臨界点 p_2 と r はキャンセルしない．これはこの二つの臨界点の指数が 2 と 0 でその差が 2 であるためである．

一方臨界点 q と r は指数がそれぞれ 1 と 0 で差は 1 であるがやはりこれもキャンセルしない．これは q と r を結ぶ勾配ベクトル場 $-\mathrm{grad}\, f$ の積分曲線が 2 本あるためである．

実際，次の二つの条件が満たされている臨界点の対 p, q に対してモース関数 f を動かして，もとの関数に比べてちょうど p と q だけ臨界点が少ないモース関数を作ることができる．

(0.2.5.1) p のモース指数 $=$ モースの指数 $+ 1$,

(0.2.5.2) p と q を結ぶ $-\mathrm{grad}\, f$ の積分曲線がただ 1 本存在する．

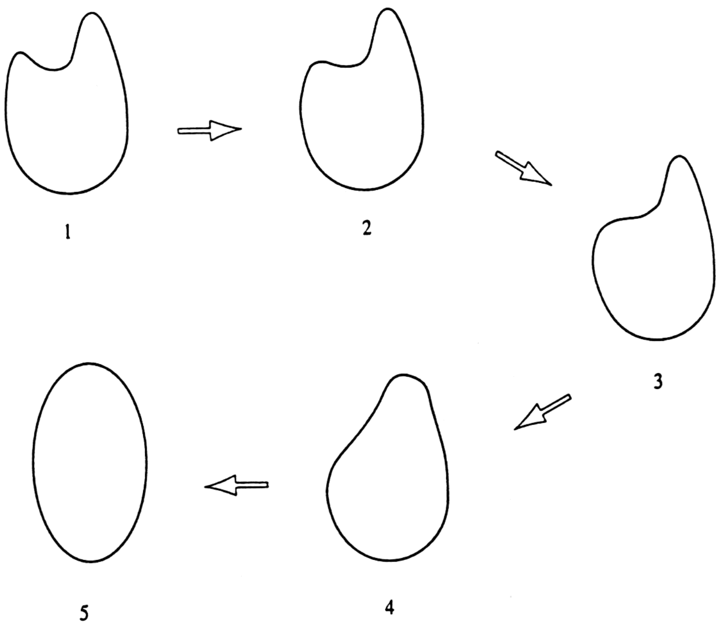


図 0.2.5

これを示すには図 0.2.5 のように p と q を結ぶ$-\mathrm{grad}\, f$ の積分曲線に沿って f を変形するのであるが，説明は省略する．[Mi2] に優れた解説がある．

IV　交叉の解消と h 同境定理

それではこの二つの条件は臨界点 p と q がキャンセルできるための必要十分条件であろうか．実はそうではない．このことを説明するためにもう少し言葉を準備しよう．

まず臨界点 p に対してその安定多様体 (stable manifold)S_p，不安定多様体 (unstable manifold)U_p を $-\mathrm{grad}\, f$ が引き起こす 1 係数変換群φ_t を用いて

$$
\begin{aligned}
S_p &= \left\{x \in M \mid \lim_{t\to\infty} \varphi_t(x) = p\right\} \\
U_p &= \left\{x \in M \mid \lim_{t\to-\infty} \varphi_t(x) = p\right\}
\end{aligned}
$$

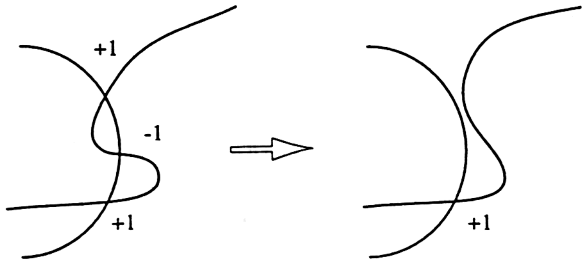


図 0.2.6

で定義する．(U_p は前に定義した e_p と同じものである．) 多様体の次元を n, 臨界点 p のモース指数を k とすると，S_p は $n-k$ 次元，U_p は k 次元である．$f(p)>c>f(q)$ なる c を一つとり $N=f^{-1}(c)$ とする．(必要なら c を取り換えて N が部分多様体になるようにしておく．) U_p および S_q は N と横断的 (transversal) に交わる．(定義は [服部 1] p.104, [足立] p.47, [志賀] 7 章など参照．) $S_q(c)=N\cap S_q$, $U_p(c)=N\cap U_p$ と置く．$\dim U_p(c)=k-1$, $\dim S_q(c)=n-k$ である．したがって $S_q(c)$ と $U_p(c)$ が横断的に交わっていればその交点は有限個である．

一方条件 (0.2.5.2) が成立していれば $S_q(c)$ と $U_p(c)$ はただ一点で交わる．

この条件 ($S_q(c)$ と $U_p(c)$ がただ一点で交わること) は幾何学的な条件であるがこれに対応する代数的な条件は

(0.2.6) $S_q(c)$ と $U_p(c)$ の定めるホモロジー類の N での交点数

$$[U_p(c)]\cdot[S_q(c)]\in H_0(N)$$

は ±1 である．

と表せる．次に述べるのがホイットニーによる交叉の解消定理といわれるもので，高次元の微分位相幾何学で基本的役割をはたすものである．

定理 0.2.4 N は単連結な多様体でその次元が 5 以上とする．X_1, X_2 をその

向きづけ可能な部分多様体で

$$\dim N = \dim X_1 + \dim X_2$$

とし，$s = [X_1] \cdot [X_2]$ とする．このとき X_1, X_2 をアイソトピー (isotopy) で動かして X_1 と X_2 の交点の数がちょうど $|s|$ であるようにできる.（ここでアイソトピーで動かすとは埋め込みの連続な族でつなげるという意味である.）

定理 0.2.4 はたとえば [Mi2] 定理 6.6, [田村 2] 7 章などに証明されている．図 0.2.6 に雰囲気だけ書いた.

モース理論に戻る．$\pi_1(M) = 1$ とし $[U_p(c)] \cdot [S_q(c)] = \pm 1$ を仮定する．このとき定理 0.2.4 から $U_p(c)$ と $S_q(c)$ をアイソトピーで動かしてこの二つの部分多様体がただ一点で交わるようにできる．実はさらにこのアイソトピーに沿ってモース関数 f を変形して，得られた関数に対する安定多様体と不安定多様体が N 上一点で交わるようにできることが知られている．すなわちこのモース関数に対して p と q を結ぶ積分曲線はただ 1 本存在する．すると前項で述べたように，さらにモース関数を変形して二つの臨界点 p と q をキャンセルすることができる．以上をまとめると：

命題 0.2.5　p, q を (0.2.5.1), (0.2.6) を満たす f の臨界点の組とする．多様体 M の次元は 6 以上とし，また M は単連結とする．このとき f を変形して二つの臨界点 p と q をキャンセルすることができる.

ここで命題 0.2.5 を使ってキャンセルを行う様子を図示したいのだが，残念ながら 3 次元空間の中の曲面では定理 0.2.4 が必要とされる例はない．高次元では起こるので読者の頭の中で想像して頂くことにしたい.

定理 0.2.4 は高次元ポアンカレ予想の証明の大事なステップで，ここで代数的位相幾何学と微分位相幾何学が結びつけられている．実際 M の（たとえば）ホモロジーについての情報から（代数的な）交点数 $[U_p(c)] \cdot [S_q(c)]$ をコントロールすることは可能であるが，これを二つの部分多様体の交点の数という具体的な幾何学的情報に結びつけなければ，応用をすることができない.

さてこの議論を続けて h 同境定理の証明のアイディアを説明することもできるのだが，それは §4.2 でウィッテン (Witten) 複体を導入したあとに譲り，ここでは結論だけ述べることにしよう．

定理 0.2.6（h 同境定理，スメイル）　M を境界 $N_+ \cup N_-$ をもつコンパクト多様体とし，$f : M \to [0,1]$ を M 上のモース関数で $f^{-1}(0) = N_-$, $f^{-1}(1) = N_+$ を満たすものとする．このとき

(1) $M, N_\pm$ は単連結で Mの次元 n は 6 以上で

(2) 埋め込みが誘導する写像 $H_*(N_-; \mathbf{Z}) \to H_*(M; \mathbf{Z})$ は同型

ならば，f を変形して臨界点がないようにできる．

注 0.2.7　一般にモース関数 f に対して $f^{-1}([a,b])$ 上に f の臨界点がなければ，$f^{-1}((-\infty, a])$ と $f^{-1}((-\infty, b])$ は可微分同相である．(証明は [Mi1] §3，[長野] 2 章にある．図 0.2.1 を見れば正しそうであることは納得できるであろう．) したがって定理 0.2.6 の仮定のもとで M は $N_- \times [0,1]$ と可微分同相である．

注 0.2.8　定理 0.2.6 を用いると高次元ポアンカレ予想：

次元が 6 以上の閉多様体 Mが S^nと ホモトピー同値ならば S^nと同相である

が次のようにして証明できる．

まず M の上にモース関数 f でただ一つの点 p で極小値をとり，またただ一つの点 q で極大値をとるようなものを作る．次に $\varepsilon > 0$ を十分小さく選んで $M' = f^{-1}([f(p)+\varepsilon, f(q)-\varepsilon])$ と置く．

必要なら f を 1 次関数と合成したもので置き換えて，$f(p)+\varepsilon = 0$，$f(q)-\varepsilon = 1$ としてよい．すると$\partial M' = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1) = S^{n-1} \cup S^{n-1}$ で，また M' は定理 0.2.6 の仮定 (1), (2) を満たす．したがって注 0.2.7 より M' は $S^{n-1} \times [0,1]$ と可微分同相である．よって M は S^n と同相である．

少し証明は違うが，5 次元の場合のポアンカレ予想も証明されている．

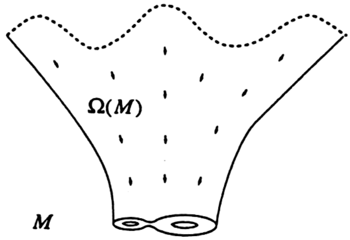


図 0.2.7

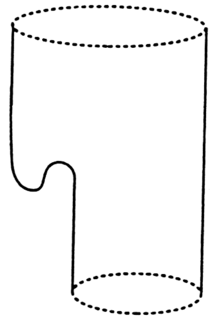


図 0.2.8

V　無限次元モース理論

ここでモース理論の元来の出発点であった無限次元の場合に戻ろう．特にモース自身によっても研究されたのがループ空間 (loop space) $\Omega(M)$ 上の関数である長さについてである．この節の初めに書いたことをもう少し正確に述べることから始めよう．

まず絶対値 1 の複素数全体を S^1 と書く．有限次元のコンパクト多様体 M に対して S^1 から M への写像全体を $\Omega(M)$ と書く．(パラメータの取り換えについてはあとで論ずる．)

$$L(\ell) = \int_{t\in S^1} \left|\frac{D\ell}{dt}(t)\right| dt$$

なる関数を考える．ℓ_s なる $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ をパラメータにもつ $\Omega(M)$ の族に対して $L(\ell)$ の微分 $\frac{dL(\ell_s)}{dt}\Big|_{s=0}$ を考える．$\ell_0 = \ell$ なる任意の族 ℓ_s に対してこの微分が 0 であるとき ℓ を測地線という．$\ell(t) \equiv p_0$（p_0 は t によらない）なるループは測地線である．(これを定値曲線と呼ぶことにする.) これ以外に測地線はあるかという問題を考えて見よう．安直に考えると次のような「証明」によってそのような測地線が常にあることが「示せる」．

各々の $p_0 \in M$ に対して $\ell(t) \equiv p_0$ なる曲線は L の極小値を与えている．したがって，もしこれら以外に L に極値がなければ$-\mathrm{grad}\, L$ は $\Omega(M)$ から M への変位レトラクトを与える（図 0.2.7 参照）．したがって M と $\Omega(M)$ のホモ

ロジーは同型なはずである．しかしそうではないことは容易にわかる．よって定値曲線以外の測値線が必ず存在する．

上の議論はそのままでは正しくない．その理由は $\Omega(M)$ がコンパクトでないことである．より正確には実数 C に対して，集合 $\{x\in\Omega(M)\mid L(x)\le C\}$ がコンパクトでないことである．一般にモース関数 $f:X\to\mathbf{R}$ に対して集合 $\{x\in X\mid f(x)\le C\}$ がコンパクトであれば，X 自身はコンパクトでなくてもほぼ X がコンパクトである場合と同様のことが成立する．しかしこの集合がコンパクトでないと，たとえば，極小値以外に極値がなくても X から極小値を与える臨界点全体の集合への変位レトラクト は存在しない．(図 0.2.8 では極小値を与える臨界点はただ一点であるが，X のホモトピー型は S^1 と同じで，したがって X と極小値を与える臨界点全体の集合とはホモトピー同値でない.)

ループ空間 $\Omega(M)$ の場合，空間が無限次元であるからそもそも局所コンパクトでない．したがって $\{x\in\Omega(M)\mid L(x)\le C\}$ がコンパクトというようなことは最初から期待できない．しかし必ずしも絶望的というわけでもない．というのは無限次元の場合，空間には色々な位相が自然に入りコンパクトということの意味が有限次元の場合と異なるからである．たとえば $\{x\in\Omega(M)\mid L(x)\le C\}$ がコンパクトでないのは図 0.2.8 のようなことが起こっているというのとは随分違った事情によっているに違いない．それでは図 0.2.8 のようなことが起きていないということをどう定式化したらよいであろうか．パレ (Palais) とスメイルの条件 C というのがその答えであるが，ここではそれは述べない（[長野] 3.6 節参照）．そのかわりに一番易しい場合に無限次元のモース理論を使った証明の例を一つ説明しよう．

有限次元コンパクトリーマン多様体 M とその上の 2 点 $p,\ q$ をとり

$$\Omega(p,q)=\left\{\ell:[0,1]\to M\ \middle|\ \begin{matrix}\ell(0)=p\\ \ell(1)=q\end{matrix}\right\}$$

と置く．$\Omega(p,q)$ 上の関数である長さ L が同様に定義できる．次の定理の証明を説明してみよう．

定理 0.2.9 M 上には $p,\ q$ を結ぶ長さ最小の曲線が存在する．すなわち $\Omega(p,q)$

上の関数 L は $\Omega(p,q)$ で最小値をとる．

証明　まず，$\Omega(p,q)$ 上での L の値の下限を d とし，$\Omega(p,q)$ の元の列 $\ell_i\,(i=1,2,3,\cdots)$ を $\lim_{i\to\infty} L(\ell_i)=d$ となるようにとる．$\{x\in\Omega(p,q)\mid L(x)\le C\}$ が任意の C に対してコンパクトで L がそこで連続ならば，ℓ_i の極限をとれば求める最短線が得られる．しかしこれはいずれも正しくない．

まずコンパクト性について，つまり ℓ_i の収束部分列の存在について考えよう．このために ℓ_i のパラメータを取り換えて$\left|\frac{d\ell_i}{dt}\right|\equiv L(\ell_i)$ となるようにする．(つまり ℓ_i の速度が一定であるようにする.）すると $\ell_i\,(i=1,2,3,\cdots)$ は同程度連続であるからアスコリ–アルツェラ (Ascoli–Arzelà) の定理より（一様）収束する部分列が存在する．記号の節約のためこれも ℓ_i と書き，その極限を ℓ と置く．

さてもし L が一様収束位相について連続ならば ℓ が求める最短線である．しかし L は C^1 位相については連続であるが，一様収束位相については連続ではない．しかしながら次のことは示せる．

補題 0.2.10

$$L(\ell)\le\lim_{i\to\infty}L(\ell_i)$$

証明　ε を任意の正の数とする．閉区間 $[0,1]$ の分割 $0=t_1<t_2\cdots<t_N=1$ で

$$\left|L(\ell)-\sum_{i=1}^{N-1}d(\ell(t_i),\ell(t_{i+1}))\right|<\varepsilon$$

なるものをとる．(ここで $d(\cdot,\cdot)$ は M の距離関数である.）一方

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N-1}d(\ell(t_i),\ell(t_{i+1})) &= \lim_{j\to\infty}\sum_{i=1}^{N-1}d(\ell_j(t_i),\ell_j(t_{i+1}))\\ &\le \lim_{j\to\infty}L(\ell_j)\end{aligned}$$

この二つの式より結論はただちに得られる．

補題 0.2.10 より $L(\ell) \le d$. 一方 d は $\Omega(p,q)$ 上での L の値の下限であるから $L(\ell) = d$, よってこの ℓ が求める最短線である.　証明終わり

以上の証明で使われたのが L の一様位相に対する一種の半連続性である. この証明が有限次元の同種の議論より多少微妙であるのはループ空間の上に一様位相, C^1 位相の二つの位相が存在するためであった.

さて定理 0.2.9 は基本的な定理であるが, これだけならモース理論などと特にいわなくてもよいであろう. 定理 0.2.9 で用いられたのは最小値の存在であり, モースの不等式でいえば $H^0(M;\mathbf{Z})$ が 0 でないことを利用して（指数が 0 の）臨界点の存在を示したことに当たる. この考え方を推し進めていって示せると思われるのは次の予想である.

予想 0.2.11　閉多様体 M 上のほとんどすべての計量について M には無限本の閉測地線が存在する.

この問題を考えるにはモースの不等式（定理 0.2.3（の無限次元版））に基づく次のようなアイディアが有力である. まず位相幾何学的議論で $\Omega(M)$ のホモロジーが無限個の生成元をもつことを示す. 次に定理 0.2.3 がこの状況で使えることを示し, 各生成元に対して少なくとも一つの L の臨界点（つまり閉測地線）が対応することを示すのである.

このように考えるときの問題点は次のことである.

$\ell : S^1 \to M$ を閉測地線とすると, ℓ と n 重被覆写像 $e^{\sqrt{-1}t} \mapsto e^{n\sqrt{-1}t}$ の合成もまた閉測地線である. したがってこれらも勘定にいれれば閉測地線が無限個あるのは自明である.

これでは面白くないので予想 0.2.11 はこのようなものを除いても（つまり他の測地線からこのようにしては得られないものだけで）無限個あるという意味だとしよう. すると先程の議論だけでは証明には不十分である.

予想 0.2.11 はこの本の目的とは外れるのでこれぐらいにして次の話題に移ろう.

VI　調和写像とバブル

さて今までの議論は無限次元モース理論でも有限次元と同様なことがどこまで言えるかといった話であった．無限次元モース理論で有限次元では決して起こらない現象が観察されたのはザックス (Sacks)–ウーレンベック (Uhlenbeck)[SU] からである．そこで見いだされた現象はこの本の主題であるヤン (Yang)–ミルズ (Mills) 場の場合でも重要である．以下これについて述べよう．

前項では 1 次元多様体（S^1）からの写像のなす空間上でのモース理論がテーマであった．次に当然考えるべきなのは 2 次元多様体からの写像の場合である．

とりあえず一番単純な 2 次元多様体である球面 S^2 からの写像の空間

$$X = \{f : S^2 \to M\}$$

を考えよう．この上の関数としてまず考えるべきなのは面積

$$A(f) = \int_{\mathbf{C}} \sqrt{\det \begin{pmatrix} g_M\left(f_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), f_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) & g_M\left(f_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), f_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right) \\ g_M\left(f_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right), f_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) & g_M\left(f_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right), f_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right) \end{pmatrix}}\, dxdy$$

であろう．(f_* は f の微分で定まる接空間の間の写像を指す.)（ここで $S^2 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ とみなし x, y を $\mathbf{C}$ の座標とした.）A の極値を与えるような f のことを極小曲面という．ザックス–ウーレンベックが論文 [SU] で示したのは次の定理である．

定理 0.2.12　M を単連結閉リーマン多様体とする．このとき極小曲面で表されるホモトピー類全体は $\pi_2(M)$ を生成する．

定理の仮定のもとで 2 次のホモトピー群 $\pi_2(M)$ の元と $X = \{f : S^2 \to M\}$ の連結成分は 1 対 1 に対応する．(π_2 の定義を知らない読者は，X の連結成分たちの作る集合に（可換）群の構造を入れたもの，ぐらいに思えばよい.）したがって定理 0.2.9 の証明として書いたのと同様な議論ができれば，X の各連結成分上に A の極小値を与えるような元が存在するであろう．すなわち $\pi_2(M)$ の任意の元は極小曲面で表されるであろう．

しかしこれは正しくない．正しい主張は定理 0.2.12 である．つまり極小曲面で表される元は $\pi_2(M)$ を生成するが，$\pi_2(M)$ の任意の元が極小曲面で表されるわけではない．これはなにか有限次元のモース理論と本質的に違ったことが起こっていることを示している．

それについて述べる前に 2 次元の場合のパラメータのとり方の問題について述べたい．(これは 1 次元の場合より，より本質的である．) まず注意したいのは（長さもそうだったが）面積も座標のとり方によらない量だということである．すなわち S^2 からそれ自身への任意の可微分同相写像 φ について $A(f \circ \varphi) = A(f)$ が成立する．言い換えると $\mathit{Diff}(S^2)$ で S^2 からそれ自身への可微分同相の作る群を表すとすると，$\mathit{Diff}(S^2)$ は X に作用し，この作用で関数 A は不変である．このように大きな群（無限次元リー群）が作用していると都合がよい場合もあるが，この場合は都合が悪い．実際，たとえば A の臨界点を考えると，この点を $\mathit{Diff}(S^2)$ で動かすとすべて臨界点になる．これは臨界点の集合の各連結成分の次元が無限大であることを意味する．したがってヘッセ行列の核 (kernel) は無限次元である．これではモース関数の定義を多少拡張したにしてもモース関数とみなすことはできない．

この問題を解決するやり方は二つある．一つは X を $\mathit{Diff}(S^2)$ で割った商である無限次元多様体を考え A をそこの上の関数とみなすことである．もう一つは A を少し違った関数と取り換えることである．本書のテーマであるヤン–ミルズ汎関数の場合には，後者に当たる方法は知られていないので前者をとらざるを得ない．本節では後者のやり方で説明しよう．

面積のかわりに次の汎関数（エネルギー (energy)）を考える．

$$E(f) = \int_C g_M\left(f_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), f_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) + g_M\left(f_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right), f_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right) dxdy$$

これは $\mathbf{C}$ のリーマン計量 $h_{i,j}$ を使って表すと（今の場合は $h_{i,j} = 1;\ i = j$, $h_{i,j} = 0$; それ以外，なのだが）

$$E(f) = \int_\Sigma \sum_{i,j} h^{i,j} g_M\left(f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)\Omega$$

ここで，Σ は曲面で今の場合は $\mathbf{C}$ （または S^2），$h^{i,j}$ は $h_{i,j}$ の逆行列，Ω は

体積要素である．こう書いておくと同じ式で一般の場合も定義できる．

さて高校でも習う相加平均と相乗平均の関係を使うと次のことが証明できる．

補題 0.2.13

$$A(f) \geq E(f)$$

等号成立は　$g_M\left(f_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), f_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) = g_M\left(f_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right), f_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)$, $g_M\left(f_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), f_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right) = 0$ の場合，すなわち

$$f^* g_M = c \cdot h$$

(c はスカラーすなわち $C^\infty(M)$ の元）のときでそのときに限る．

$f^* g_M = c \cdot h$ が成り立つとき f は共形的であるといい，さらに可微分同相であるものを共形変換 (conformal transform) という．よく知られているように S^2 の標準的な計量を $\mathbf{C} = S^2 - \{\infty\}$ に制限したものと $\mathbf{C}$ 上の（2 次元ユークリッド空間としての）普通の計量は変形変換で移り合う．したがって汎関数 E を考えるには f を S^2 上の関数と思っても $\mathbf{C}$ 上の関数と思ってもどちらでもよい．

さてここで定義域が 2 次元であることの著しい帰結である次の定理を用いる．

定理 0.2.14　S^2 上の任意の計量 h に対して $\mathit{Diff}(S^2)$ の元 φ が存在して $\varphi^* h$ は S^2 の標準計量のスカラー倍である．

この定理は次の二つの事実の帰結である．

(0.2.7.1)　2 次元多様体の場合，計量の共形類と複素構造は 1 対 1 に対応する．
(0.2.7.2)　S^2 上の複素構造は一意である．

これらの点についてあまり説明している余裕はないが (0.2.7.1) の対応は複素構造に対して複素座標 $z = x + \sqrt{-1}y$ で書いたとき $h = c(dx^2 + dy^2)$ となる

ような計量 h の共形類を対応させることによって与えられる．(そのような計量の共形類が一意に存在すること（および各共形類に対して対応する複素構造が存在すること）が 2 次元の場合の性質であり証明を要するが，ここでは触れない.）(0.2.7.2) は有名なリーマンの写像定理である．

さて定理 0.2.14 を用いると汎関数 A の各々の極小値 $A(f)$ について $f\circ\varphi$ が共形的であるように $\mathit{Diff}(S^2)$ の元 φ を選ぶことができる．すると

$$A(f)=A(f\varphi)=E(f\varphi)\le E(f)$$

が成立する．したがって次の主張を得る．

定理 0.2.15　$f: S^2\to M$ に対して f が E の極小値であることと，f が A の極小値でかつ共形的であることは同値である．A の極小を与える任意の f に対してこれに $\mathit{Diff}(S^2)$ の元を合成して共形的にすることができる．

エネルギー E の極値を与える f のことを調和写像 (Harmonic map) という．定理 0.2.12 からわかるように，調和写像 f に S^2 からそれ自身への共形写像を合成してもまた調和写像が得られる．極小曲面の場合は $\mathit{Diff}(S^2)$ が果たしていた役割を S^2 からそれ自身への共形写像のなす群が果たすことになる．よく知られているようにこの群は $PSL(2;\mathbf{C})=SL(2;\mathbf{C})/\{\pm1\}$ に同型でその作用は

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot z=\frac{az+b}{cz+d}$$

($z\in\mathbf{C}\cup\{\infty\}$) で与えられる．前に述べたように無限次元の群 $\mathit{Diff}(S^2)$ によって不変であるという性質が面積 A を用いてモース理論を展開するのを困難にしていた．E を使えば群は有限次元の群 $PSL(2;\mathbf{C})$ ですむことになる．

2 次元空間からの写像空間を相空間とし，エネルギーまたは面積をラグランジアンとする場の理論のことをシグマモデル (σ-model) という．$\mathit{Diff}(S^2)$ はこの理論のゲージ変換群に当たる．A を E で置き換えてゲージ変換群による同値類から代表元を選ぶ操作をゲージの固定 (gauge fixing) という．同様の操作はこの本のテーマであるヤン–ミルズ場でも重要である．それは第 1 章以降で

述べることにしたい．

さて定理 0.2.12 の説明に戻ろう．すなわち与えられた $f_0 : S^2 \to M$ に対してそれとホモトピックな極小曲面はあるかという問題である．定理 0.2.15 によればこれは f_0 とホモトピックな調和写像はあるかといっても同じである．定理 0.2.9 の証明の真似をしてみよう．

$$C = \inf\{E(f) \mid f \text{は} f_0 \text{とホモトピック}\}$$

とおく．f_0 とホモトピックな写像の列 f_i で $\lim_{i\to\infty} E(f_i) = E(f)$ となるものを選ぶ．f_i が収束部分列をもつかが問題である．この場合もループ空間の場合と同じように収束がどの収束なのか（一様収束か C^1-収束か）という問題もあるが，それは結果的にはループ空間の場合と同じように解決できる．(その証明は補題 0.2.10 よりずっと難しいが.) それで収束は弱い方の一様収束でいいとしよう．もう一つ問題になったパラメータのとり方については今の場合は $PSL(2;\mathbf{C})$ によるずれが決まっていないことになる．そこで問題は

(0.2.8)　$f_i\varphi_i$ が一様収束するような $\varphi_i \in PSL(2;\mathbf{C})$ は存在するか？

ということになる．答えはノーである．これが定理 0.2.12 の一番面白いところである．その理由を説明しよう．

$S^2 \times S^1$ に直積リーマン計量を入れたものを二つ用意し，この二つを細いチューブ（$\cong S^2 \times [0,1]$）で繋いだものを M とする（図 0.2.9 参照）．

$\pi_2(M) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ で 2 つの S^2 が生成元になっているが，$(1,1)$ にあたるホモトピー類に上の議論を適用しよう．このホモトピー類に含まれる S^2 の面積は標準的な計量を入れた S^2 の面積の 2 倍以上になる．したがって i が大きいときの f_i の像は，それぞれの $S^2 \times S^1$ の中の S^2 から小さい円盤を除きそれらを $S^2 \times [0,1]$ に含まれる $S^1 \times [0,1]$ で繋いだものになっていると考えられる．すると f_i の像の極限は二つの S^2 とそれを結ぶ（曲がった）線分の和集合で，したがって f_i を $PSL(2;\mathbf{C})$ の元と合成しても収束部分列は存在しない（図 0.2.10 参照）．

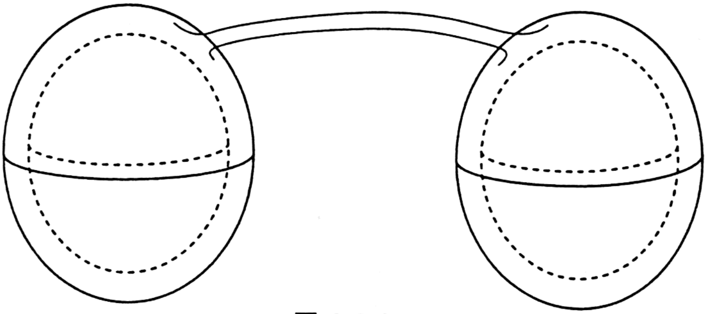


図 0.2.9

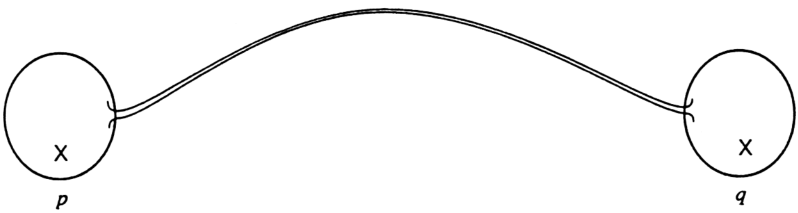


図 0.2.10

上の議論はちゃんとした証明ではない．(この議論をきちんとした数学にするのは実は大変難しい．) しかしこの場合に f_i が収束しそうにないことは理解して欲しい．

さて定理 0.2.9 の真似ができないとするとどのようにして定理 0.2.15 は証明されるのだろうか．ザックス–ウーレンベックが示したのは次の事実である．

定理 0.2.16 $\lim_{i\to\infty} E(f_i) = E(f)$ となる f_i に対して，有限個の S^2 の点 $x_1, \cdots, x_n$ が存在して f_i は $S^2 - \{x_1, \cdots, x_n\}$ でコンパクト一様に収束する部分列をもつ．

図 0.2.9 の例で説明しよう．p, q を図 0.2.10 のとおりとする．f_i を共形変換 ($PSL(2;\mathbf{C})$ の元) で動かして $f_i(0) = p$, $||f_{i*}(0)|| = 1$ となるようにする．(f_{i*} は f_i のヤコビ行列，$||\ \ ||$ はノルムを指す．ノルムはどのノルムをとってもよ

い.）すると，f_i は一点を除いてコンパクト一様に収束しその極限は（f_i の像の極限である）二つの S^2 とそれを結ぶ（曲）線分の和集合のうちで左側の S^2 から曲線分の付け根に当たる一点を除いたものになる．次に f_i を共形変換で動かして ${f_i}'(0) = q, \|{f_i}'_*(0)\| = 1$ になるような ${f_i}'$ をとる．すると ${f_i}'$ も一点を除いてコンパクト一様に収束しその極限は右側の S^2 から線分の付け根に当たる一点を除いたものになる.（p を基点とした列 f_i の立場から見れば，${f_i}'$ の極限に当たる S^2 が無限遠方で飛び出すと見ることができる．このような現象をバブル (bubble) という.）

このとき

$$E(\lim_{i\to\infty} {f_i}') + E(\lim_{i\to\infty} f_i) = \lim_{i\to\infty} E(f_i) = \lim_{i\to\infty} E({f_i}')$$

が成り立っている．言い換えると基点をずらして共形変換で移していくことでいくつかの異なった極限が得られ，f_i はそれらの破片にちぎれていっている．さらに破片たちのエネルギーの和は f_i のエネルギーの極限となっている.（言い換えるとエネルギーの意味で破片たちは f_i の極限全体になっている.）

ここで次のことが成り立つ．

定理 0.2.17　f を $D^2 - \{0\} = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ からコンパクト多様体への調和写像としそのエネルギーは有限とする．このとき f は D^2 からの調和写像に拡張される．

この定理はリーマンの拡張定理,「$D^2 - \{0\}$ 上の有界な正則関数は D^2 上の正則関数に拡張される」の一般化である．

定理 0.2.17 を使うと，定理 0.2.16 で得られた部分列の極限が S^2 からの調和写像に拡張されることがわかる．

こうして f_i の極限は有限個にちぎれて，それぞれの破片は S^2 からの調和写像になることが示される．したがって f_i のホモトピー類は調和写像によって表されるホモトピー類の和になる．これが定理 0.2.12 の証明の相当荒っぽい要約である．

この議論をかなり長く述べたが，実はこの議論は 2，3 章で述べる自己双対接

続のモジュライ空間のコンパクト化の議論の雛型になっている.

以上の議論で一番大事なのはバブルという現象の発見である. これは有限次元のモース理論では決して起きない無限次元特有の現象である. しかもこの現象はここで述べたエネルギーの場合に限らず, ヤン–ミルズ場, 概複素曲線 (pseudo holomorphic curve), アインシュタイン計量 (Einstein metric), 自己双対計量 (self dual metric), 定平均曲率 (constant mean curvature) 曲面など数多くの変分問題に共通する現象であることがわかってきている.

VII　そして

モース理論の発展はここで終わったわけではない. 本書のテーマに直接関係することだけでも, ウィッテンによる超対称性 (super symmetry) をもった場の理論の「おもちゃ」としてのモース理論の解釈 ([W5]), モース指数が無限大 (2分の無限大) のモース理論の発見 ([F1]) (フレアー (Floer) とシンプレクティック幾何学 (symplectic geometry) におけるその先人たちによる) などが続く.

しかしこれらを論ずるのは序論ではなく本論の役目であろう. ひとまずここで次の話題に移ろう.

§ 0.3　ド・ラームの定理から楕円型作用素の指数定理へ

I　ド・ラームの定理

前節で述べたモース理論と並んで多様体の研究で中心をなすのがド・ラーム (De Rham) の定理と調和積分論である．これらは一般化されてアティヤ–シンガー (Atiyah-Singer) の指数定理に発展する．そしてその非線形化こそゲージ理論に他ならない．先ずこの二つを復習しよう．

多様体 M 上の (k 次) 微分型式 ω とは局所座標 $(x^1, \cdots, x^m)$ で $\sum_{i_1\cdots i_k} f_{i_1\cdots i_k}(x^1, \cdots, x^m)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$ と表せるもののことであった．つまり別の座標 $(y^1, \cdots, y^m)$ では

$$\omega = \sum_{\substack{i_1\cdots i_k\\ j_1\cdots j_k}} f_{i_1\cdots i_k} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}} & \cdots & \frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{j_1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_k}} & \cdots & \frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{j_k}} \end{pmatrix} dy^{j_1}\wedge\cdots\wedge dy^{j_k}$$

と表された．(きちっとした定義は多様体の教科書を見ていただきたい．) $\Omega^k(M)$ で M 上の k 次微分型式全体を表す．外微分作用素 $d:\Omega^k(M)\to\Omega^{k+1}(M)$ とは

$$d(f\ dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j}dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$

で定義されていた．外微分作用素の大事な性質は $dd=0$ である．言い換えると

$$0\to\Omega^0(M)\xrightarrow{d}\Omega^1(M)\xrightarrow{d}\cdots\xrightarrow{d}\Omega^{m-1}(M)\xrightarrow{d}\Omega^m(M)\to 0$$

はチェイン複体 (chain complex) を定める．このチェイン複体（ド・ラーム複体と呼ぶ）のコホモロジーがド・ラームコホモロジーであった．つまり

$$H^k_{Dr}(M;\mathbf{R}) = \frac{\mathrm{Ker}\ d:\Omega^k(M)\to\Omega^{k+1}(M)}{\mathrm{Im}\ d:\Omega^{k-1}(M)\to\Omega^k(M)}$$

このコホモロジーが多様体の（特異）コホモロジーと一致するというのがド・

ラームの定理であった．すなわち

定理 0.3.1 $H^k_{Dr}(M;\mathbf{R}) \cong H^k(M;\mathbf{R})$ なる環同型が存在する．

ここで $H^k_{Dr}(M;\mathbf{R})$ 上の環構造は微分型式のかけ算から定まる．

II 調和積分論

調和積分論とは $H^k_{Dr}(M;\mathbf{R})$ の元の代表元を与える微分型式を（多様体の計量を定めたとき）標準的に定めるものである．これは多様体上のラプラス (Laplace) 方程式の解として与えられる．

多様体 M 上にリーマン計量を考える．リーマン計量が定まると多様体上にホッジ (Hodge) の $*$–作用素 $*$ が次のようにして定まる．

まず g は k 次微分型式の空間$\Lambda^k(M)$ 上の内積を定めることに注意しよう．これには接空間 T_pM の正規直交基を $e_1,\cdots,e_m$ としその双対基底を $e^1,\cdots,e^m$ としたとき，$e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k}$ たちが正規直交基になるような計量をとればよい．あるいは座標で表せば

$$g(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k},\, dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k}) = \det\begin{pmatrix} g_{i_1,\,j_1} & \cdots & g_{i_1,\,j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{i_k,\,j_1} & \cdots & g_{i_k,\,j_k}\end{pmatrix} \tag{0.3.1}$$

と書ける．(0.3.1) 式ではリーマン計量を座標を使って

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

と表した．

次に多様体 M には向きが定まっているとし，体積要素 (volume element) を

$$\Omega_M = \sqrt{\det(g_{ij})}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$$

と表される m 次微分型式 ($m=\dim M$) と定義する．ここで $(x^1,\cdots,x^m)$ は M の向きを保つ座標系である．(あるいは正規直交基を使うと$\Omega_M = e^1\wedge\cdots\wedge e^m$.)

さて $u \in \Omega^k(M)$ に対して$*u \in \Omega^{m-k}(M)$ を

$$v \wedge *u = g(v,\, u)\omega$$

が任意の $v \in \Omega^k(M)$ に対して満たされる（ただ一つの）微分型式と定める.（各点で 2 次形式$\wedge : \Omega^k(T_p^*(M)) \otimes \Omega^{m-k}(T_p^*(M)) \to \Omega^m(T_p^*(M)) = \mathbf{R}$ は非退化であるから，このような微分型式はただ一つ存在する.）

$\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg \alpha \deg \beta} \beta \wedge \alpha$ゆえ $u \wedge *u = (-1)^{\deg u(m - \deg u)} * u \wedge u$ であるから， $* * u = (-1)^{\deg u(m-\deg u)}\, u$ が成立する.

$\Lambda^k(M)$ 上に L^2 内積が

$$\langle u,\, v\rangle_{L^2} = \int_M g(u,\, v)\Omega_M$$

で定義される．この L^2 内積についての外微分作用素 d の共役作用素をδ とする．すなわち δ は

(0.3.2)
$$\langle du,\, v\rangle_{L^2} = \langle u, \delta v\rangle_{L^2}$$

が $u \in \Omega^k(M)$，$v \in \Omega^{k+1}(M)$ に対して成立するように定める．このとき

(0.3.3)
$$\delta = -(-1)^{\deg u \cdot m} * d *$$

が成立する．実際

$$\begin{aligned}
\int_M g(du,\, v)\Omega_M &= \int_M du \wedge *v \\
&= \int_M d(u \wedge *v) - (-1)^{\deg u} \int_M u \wedge d * v \\
&= -(-1)^{\deg u \cdot m} \int_M u \wedge * * d * v \\
&= (-1)^{\deg u \cdot m} \int_M g(u,\, - *d * v)\Omega_M.
\end{aligned}$$

さてラプラス作用素 (Laplace operator) Δ を

$$\Delta = d\delta + \delta d$$

と定め，調和 k 型式 (harmonic k form) の作る空間 $\mathcal{H}^k(M;\mathbf{R})$ を

$$\mathcal{H}^k(M;\mathbf{R}) = \{u \in \Lambda^k(M) \mid \Delta u = 0\}$$

で定義する．このとき

定理 0.3.2　$\mathcal{H}^k(M;\mathbf{R}) \cong H^k_{Dr}(M;\mathbf{R})$.

この定理の証明をここで完全に与えることはできないが，以下そのあらすじを説明しよう．(ヤン–ミルズ方程式の研究は定理 0.3.2 の非線形化と見ることもできる.) まず

補題 0.3.3　$\mathcal{H}^k(M;\mathbf{R}) = \{u \in \Lambda^k(M) \mid du = \delta u = 0\}$.

証明　$du = \delta u = 0 \Rightarrow \Delta u = 0$ は定義より明らかである．逆を示そう．$\Delta u = 0$ とすると (0.3.2) 式 (0.3.3) 式より

$$\begin{aligned} 0 = \langle u, \Delta u\rangle &= \langle u,\, d\delta u + \delta du\rangle \\ &= \langle \delta u, \delta u\rangle + \langle du,\, du\rangle \end{aligned}$$

$\langle \delta u, \delta u\rangle$ および $\langle du,\, du\rangle$ はともに 0 以上であるから，これらは上の式より 0 でなければならない．よって $du = \delta u = 0$.　証明終わり

さて補題 0.3.3 を用いると定理 0.3.2 は次の定理に帰着される．$\Omega^k(M)$ の L^2 ノルムについての完備化を $L^2(\Lambda^k(M))$ と書く．d, δ は $L^2(\Lambda^k(M))$ たちの間の（非有界）作用素に拡張される（この点については後で触れる）．

定理 0.3.4（ホッジ–小平の分解定理）

$$L^2(\Lambda^k(M)) = \mathrm{Im}\ d \oplus \mathrm{Im}\ \delta \oplus \mathrm{Ker}\ \Delta$$

なる L^2 内積についての直交直和分解が成り立つ．

定理 0.3.4 ⇒ 定理 0.3.2 の証明　$\mathrm{Ker}\ d = \mathrm{Im}\ d \oplus \mathrm{Ker}\ \Delta$ を示せばよい．$\supseteq$ は明らかである．一方 $u \in \mathrm{Im}\ \delta \cap \mathrm{Ker}\ d$ とすると $\delta\delta = 0$ および補題 0.3.3 より $u \in \mathrm{Ker}\ \delta \cap \mathrm{Ker}\ d = \mathrm{Ker}\ \Delta$. よって定理 0.3.4 より $u = 0$. よって再び定理

0.3.4 より $\subseteq$ が従う．　証明終わり

定理 0.3.4 の「証明」　まず定理の三つの関数空間が互いに直交することを示す．これは $\langle du,\delta v\rangle = \langle ddu, v\rangle = 0$, $u \in \mathrm{Ker}\ \Delta \Rightarrow u \in \mathrm{Ker}\ \delta \Rightarrow \langle u, dv\rangle = \langle \delta u, v\rangle = 0$ などから容易に証明できる．したがってこの三つの空間が $L^2(\Lambda^k(M))$ を張ることをいえばよい．

$u \in L^2(\Lambda^k(M))$ がこの三つといずれも直交するとしよう．すると任意の $v \in L^2(\Lambda^{k-1}(M))$ に対して $\langle u, dv\rangle = 0$ であるから，式 (0.3.2) により $\langle \delta u, v\rangle = 0$ が任意の $v \in L^2(\Lambda^{k-1}(M))$ に対して成立する．したがって $\delta u = 0$. 同様に任意の $v \in L^2(\Lambda^{k+1}(M))$ に対して $\langle u,\delta v\rangle = 0$ であるから $du = 0$. よって補題 0.3.3 より $\Delta u = 0$. しかし u は $\mathcal{H}^k(M;\mathbf{R})$ に直交すると仮定していたから $u = 0$.

これで大体証明はできたようであるが，この議論ではひどく不十分である．問題点は三つの関数空間が閉部分空間であるかどうかわからない点である．これは前に d, δ の $L^2(\Lambda^k(M))$ への拡張について曖昧にしておいた点と関わる．(実際，もし仮に d, δ が $L^2(\Lambda^k(M))$ 上の連続な（有界な）作用素に拡張されれば Ker d 等は閉部分空間で，したがってド・ラームの定理（とコホモロジー群の有限次元性）を用いれば Im d 等も閉部分空間になり，上の証明がそのまま通用する．むろん d, δ は微分作用素であるから $L^2(\Lambda^k(M))$ 上の連続な（有界な）作用素にはなり得ない.)

言い換えると上の議論で示されているのは，実は

$$\overline{\mathrm{Im}\ d \oplus \mathrm{Im}\ \delta \oplus \mathrm{Ker}\ \Delta} = L^2(\Lambda^k(M))$$

である．これはかなり微妙な点でリーマン (Riemann) がリーマン面のモジュライ (moduli) を論ずるときに不用意に述べた誤り（ワイエルシュトラス (Weierstrass) がそれを指摘した）はこのことと関わる．これは直交射影の原理の正当化というべき問題であって，20 世紀の初頭，数学の中心問題の一つであった．これはヒルベルト (Hilbert) をへてワイル (Weyl) にいたってリーマン面の場合（2 次元の場合）に解決され，それを高次元化したのがホッジと小平であった．

これらの進展には関数解析たとえばヒルベルト空間論や超関数，ソボレフ(Sobolev) 空間，楕円型偏微分方程式論の発展が不可欠であった．ソボレフ空間等については §3.1 で述べる．

III ガウス–ボンネの定理

さて定理 0.3.4 を使ってオイラー (Euler) 数を考察しよう．

$$\begin{aligned}\Omega^{odd}(M) &= \oplus\Omega^{2k+1}(M)\\ \Omega^{ev}(M) &= \oplus\Omega^{2k}(M)\end{aligned}$$

と定義する．$\Omega^{ev}(M)$ から $\Omega^{odd}(M)$ への作用素 $d+\delta$ を考えよう．定理 0.3.2，補題 0.3.3 より

$$\mathrm{Ker}\ \ (d+\delta:\Omega^{ev}(M)\to\Omega^{odd}(M))=\oplus H^{2k}_{Dr}(M;\mathbf{R})$$

また定理 0.3.4 より

$$\frac{L^2(\Lambda^k(M))}{\mathrm{Im}\ (d+\delta)}\cong\mathcal{H}^k(M;\mathbf{R})$$

であるから

$$\mathrm{CoKer}\ \ (d+\delta:\Omega^{ev}(M)\to\Omega^{odd}(M))=\oplus H^{2k+1}_{Dr}(M;\mathbf{R})$$

である．したがってこれらはド・ラームの定理より有限次元で

$$\dim\mathrm{Ker}\ \ (d{+}\delta:\Omega^{ev}(M)\to\Omega^{odd}(M)){-}\dim\mathrm{CoKer}\ \ (d{+}\delta:\Omega^{ev}(M)\to\Omega^{odd}(M))$$

は M のオイラー数，$\sum(-1)^k\mathrm{rank}\,H^k(M;\mathbf{R})$ に一致する．

一般にヒルベルト空間上の（必ずしも有界とは限らない）作用素 P がフレドホルム (Fredholm) 作用素であるとは Ker P と CoKer P がともに有限次元であることをいう．フレドホルム作用素に対してその指数 (index) $index(P)$ を

$$index(P)=\dim\mathrm{Ker}\ \ P-\dim\mathrm{CoKer}\ \ P$$

で定める．この言葉を使うと，上で述べたことは，

(0.3.4) 作用素 $d+\delta$ はフレドホルム作用素で，その指数はオイラー数に一致する

と述べられる．ここで注目すべきなのは，オイラー数が多様体の位相だけで決まっていることである．これに反して微分作用素 $d+\delta$ は多様体のリーマン計量を取り換えると変わる．(0.3.4) はこのようにリーマン計量によって解析を用いて得られる数が多様体の位相のみで決まるということを主張している．ヤン–ミルズ場を用いて定まる不変量もこういった性格を持っている．

$d+\delta$ は楕円型作用素と呼ばれるものの一例である．より一般の（線形）楕円型方程式に対して (0.3.4) を一般化したものがアティヤ–シンガーの指数定理である．というと少し語弊がある．オイラー数は多様体 M の特性類を使って表すことができる．(これをガウス–ボンネの定理という[3]．特性類については後で述べる.) したがってフレドホルム作用素 $d+\delta$ の指数が特性類を使って表されたことになる．これを一般化したのがアティヤ–シンガーの指数定理である．

それについて述べるにはベクトル束とその上の楕円型作用素について述べる必要がある．このへんで項を改めることにしよう．

IV ベクトル束

ベクトル束 (vector bundle) は本書の中心テーマである．それでまだ序章であるが，ここはきちんと定義を与えることにしよう．

定義 0.3.5 C^∞ 多様体の間の C^∞ 級写像 $\pi : E \to M$ がベクトル束であるとは：

(0.3.5.1) 各点 $p \in M$ に対してファイバー (fiber) $E_p = \pi^{-1}(p)$ は階数 n のベクトル空間の構造を持つ．

(0.3.5.2) 各点 $p \in M$ に対してその近傍 U と可微分同相写像 $\varphi : U \times \mathbf{R}^n \to \pi^{-1}(U)$ が存在して，次を満たす．(φ を座標又は自明化 (trivializa-

[3] ガウスとボンネが証明したのは 2 次元の場合で，これをチャーン (陳・Chern) とヴェイユ (Weil) が高次元に一般化した．

tion) と呼ぶ.)

(0.3.5.2.1) 図式

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbf{R}^n & \xrightarrow{\varphi} & \pi^{-1}(U) \\ \text{第 1 成分への射影} \searrow & & \swarrow \pi \\ & U & \end{array}$$

図式 0.3.1

は可換である.

(0.3.5.2.2) 任意の点 $q \in U$ で, φ の $\{q\} \times \mathbf{R}^n$ への制限 $\varphi : \{q\} \times \mathbf{R}^n \to E_q$ は線形同型である.

ベクトル束の例を与える前に定義の言い換えをしておこう. ベクトル束 $\pi : E \to M$ と M の開集合 U に対して U 上の $\pi : E \to M$ の切断 (section) の全体 $\Gamma(U; E)$ を

$$\Gamma(U;E) = \left\{ u : U \to E \,\middle|\, \begin{array}{l} C^\infty \text{級写像} \\ \pi \circ u = \text{恒等写像} \end{array} \right\}$$

で定める. 集合 $\Gamma(M; E)$ を座標で記述しよう. 定義 0.3.5 から M の開被覆 $\cup U_i = M$ と可微分同相写像 $\varphi : U_i \times \mathbf{R}^n \to \pi^{-1}(U_i)$ で (0.3.5.2.1), (0.3.5.2.2) を満たすものが存在する. $s \in \Gamma(M; E)$ に対して写像の合成 $p_2 \circ {\varphi_i}^{-1} \circ s|_{U_i} : U_i \to \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ を考える. ここで $p_2 : U_i \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ は第 2 成分への射影である. これは U_i 上の C^∞ 級関数の n 個の組, すなわち $C^\infty(U_i)^n$ の元と思える. このようにして写像 $\Gamma(M; E) \to \prod_i C^\infty(U_i)^n$, $s \mapsto (s_i)$ が得られるがこれが単射であることは容易にわかる.

$\prod_i C^\infty(U_i)^n$ の元がいつ $\Gamma(M; E)$ の元に対応するかを考えよう. それにはベクトル束の座標変換について論ずる必要がある. U_i, φ_i, U_j, φ_j が (0.3.5.1), (0.3.5.2) を満たしているとしよう. $q \in U_i \cap U_j$ に対して合成 $\left(\varphi_j\,|_{\{q\}\times\mathbf{R}^n}\right)^{-1} \circ \left(\varphi_i\,|_{\{q\}\times\mathbf{R}^n}\right)$ は $\mathbf{R}^n$ から自分自身への自己同型を与える. これを行列で表したものを $g_{ji}(q)$ と書く. (リーマン計量も g_{ji} を使ったが, こちらのほうは以後

記号で表す必要は生じないので，これからはリーマン計量を g_{ji} で表すことはない.）g_{ji} は $U_i \cap U_j$ から $n \times n$ 行列全体の空間への C^∞ 級写像を与える．これを座標系 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ に対するベクトル束 E の変換系と呼ぶ．g_{ji} が満たすべき条件を求めよう．$q \in U_i \cap U_j \cap U_k$ とすると

$$
\begin{aligned}
& g_{ki}(q) \\
& = \left(\varphi_k \mid_{\{q\}\times \mathbf{R}^n}\right)^{-1} \circ \left(\varphi_i \mid_{\{q\}\times \mathbf{R}^n}\right) \\
& = \left(\varphi_k \mid_{\{q\}\times \mathbf{R}^n}\right)^{-1} \circ \left(\varphi_j \mid_{\{q\}\times \mathbf{R}^n}\right) \circ \left(\varphi_j \mid_{\{q\}\times \mathbf{R}^n}\right)^{-1} \circ \left(\varphi_i \mid_{\{q\}\times \mathbf{R}^n}\right) \\
& = g_{kj}(q) \circ g_{ji}(q)
\end{aligned} \tag{0.3.6}
$$

が成り立つ．特に $I = g_{ij}(q) \circ g_{ji}(q)$ （ここで I は単位行列）ゆえ $g_{ji}(q)$ は可逆である．以上をまとめると

定義 0.3.6　M の開被覆 $\bigcup U_i = M$ と C^∞ 級写像たち $g_{ji} : U_i \cap U_j \to GL(n; \mathbf{R})$ が変換系であるとは，任意の $q \in U_i \cap U_j \cap U_k$ に対して $g_{ki}(q) = g_{kj}(q) \circ g_{ji}(q)$ が成立することをいう．

上で述べたことによりベクトル束が与えられると変換系が定まる．さて $\prod_i C^\infty(U_i)^n$ の元 (s_i) が $\Gamma(M; E)$ の元に対応するための条件を変換系を使って与えよう．定義により $q \in U_i$ に対して $s_i(q) = p_2 \circ \varphi_i^{-1}(s(q))$ であった．したがって

$$
\begin{aligned}
s_j(q) &= p_2 \circ \varphi_j^{-1}(s(q)) \\
&= \left(\varphi_j \mid_{\{q\}\times \mathbf{R}^n}\right)^{-1} \circ \left(\varphi_i \mid_{\{q\}\times \mathbf{R}^n}\right) \circ \varphi_i^{-1}(s(q)) \\
&= g_{ji}(q) \circ s_i(q)
\end{aligned} \tag{0.3.7}
$$

が成立する．以上の計算を逆にたどることによって (0.3.7) 式を満たす (s_i) は $\Gamma(M; E)$ の元に対応していることが示せる．以上をまとめると

補題 0.3.7

$$
\Gamma(M; E) = \left\{ (s_i) \left| \begin{array}{l} s_i : U_i \to \mathbf{R}^n \\ g_{ji}(p) s_i(p) = s_j(p), \quad \text{for} \quad \forall p \in U_i \cap U_j \end{array} \right. \right\}
$$

補題を述べる途中で変換系を定義したが実は変換系が与えられると，逆にベクトル束をつくることができる．これを述べると

補題 0.3.8　$g_{ji} : U_i \cap U_j \to GL(n;\mathbf{R})$ が定義 0.3.6 の条件を満たしているとすると，ベクトル束 $E \to M$ が存在して g_{ij} はその変換系になる．

E を構成するには $U_i \times \mathbf{R}^n$ たちを g_{ij} を使ってはり合わせればよい．細部は省略する（[足立] 2.3 節，[St] I §3 参照）．

こうしてベクトル束と変換系が 1 対 1 に対応することが示された．ここでベクトル束の例を与えることにしよう．

まず多様体 M の接束 (tangent bundle) TM を定義しよう．変換系を用いるとこれは次のようになる．まず M の（多様体としての）座標系 $\{(U_i, \Phi_i)\}$ を考える．すなわち U_i は M の開被覆でΦ_i は U_i から $\mathbf{R}^m$ の開集合への可微分同相写像である.（ここで M の次元を m とした.）接束 TM の変換系 $g_{ji} : U_i \cap U_j \to GL(m;\mathbf{R})$ は次のようにして与えられる．Φ_i の第 a 成分を x^a, Φ_j の第 a 成分を y^a と書く．$m \times m$ 行列$\left(\frac{\partial y^b}{\partial x^a}\right)$ は合成 $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}$ ($\mathbf{R}^m$ の開集合から $\mathbf{R}^m$ の開集合への写像）のヤコビ行列である．このとき：

$$g_{ji}(p) = \left(\frac{\partial y^b}{\partial x^a}\right)(\Phi_i(p)) \tag{0.3.8}$$

U_j 上のベクトル場が$\sum Y_a \frac{\partial}{\partial y^a}$ と表され，また変換法則

$$\frac{\partial}{\partial x^a} = \sum \frac{\partial y^b}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial y^b}$$

が成立することを思い出せば，変換系 (0.3.8) で定まる切断の集合 $\Gamma(M;TM)$ はM 上のベクトル場の全体 $\chi(M)$ に一致する．このことから $T(M)$ のファイバー $T(M)_p = T_p(M)$ は M の p での接空間に一致する．

余接束 (cotangent bundle)$T^*(M)$ や微分型式のつくる束 $\Lambda^k(M)$ も同様に定義できる．すなわち $T^*(M)$ に対するする変換系は

$$g_{ji}(p) = {}^t\left(\frac{\partial y^b}{\partial x^a}\right)(\Phi_i(p))$$

与えられ，また $\Lambda^k(M)$ の変換系は${}^t\left(\partial y^b/\partial x^a\right)$ の k 次小行列式のつくる行列で

ある．あるいは $^t\left(\partial y^b/\partial x^a\right)$ が外積代数 $\Lambda^k(\mathbf{R}^n)$ に引き起こす線形写像である．

いままでベクトル束の変換系 g_{ij} としては $GL(k;\mathbf{R})$ への写像 $g_{ij}: U_i \cap U_j \to GL(k;\mathbf{R})$ だけを考えてきたが，いくつかの目的には $GL(k;\mathbf{R})$ 以外のリー (Lie) 群への写像が変換系になっている場合を考える必要がある．(リー群の定義はしない ([松島]IV 参照)．本書で出てくるのは行列の作る群だけであるから，リー群とは行列の作る群のことであると思ってよい.) このようなものを定義しておこう．

定義 0.3.9　G をリー群としたとき多様体 M 上 G 束とは M の開被覆 $\{U_i\}$ と写像 $g_{ij}: U_i \cap U_j \to G$ であって任意の $q \in U_i \cap U_j \cap U_k$ 対して $g_{ki}(q) = g_{kj}(q) \circ g_{ji}(q)$ が成立するものをいう．

M 上の G 束と G の線形表現 $\varphi: G \to GL(m;\mathbf{R})$ が与えられると $\varphi \circ g_{ij}$ を変換系とするベクトル束が定まる．M 上のベクトル束 E がこのようにして G 束から得られるとき，このベクトル束は G を構造群 (structure group) に持つという．あるいは E の構造群は G に簡約化 (reduce) されるという．

ここでベクトル束の色々な操作についてまとめておこう．

まずそれぞれ変換系 $g_{ji}: U_i \cap U_j \to GL(n_1;\mathbf{R})$ と $h_{ji}: U_i \cap U_j \to GL(n_2;\mathbf{R})$ を持つ 2 つのベクトル束 E, F があったとき，その直和（ホイットニー和）$E \oplus F$ は変換系 $g_{ij} \oplus h_{ij} \in GL(n_1+n_2;\mathbf{R})$ を持つベクトル束のことである．(いまは E, F が同じ座標系 $\{U_i\}$ を持つ場合を考えたが必要なら座標系を小さくとり直すことで，いつでもそのような場合に帰着できる.) また E と F のテンソル積 $E \otimes F$ とは $g_{ij} \otimes h_{ij} \in GL(n_1 n_2;\mathbf{R})$ を変換系に持つベクトル束のことである．

さらに E から F への準同型のつくるベクトル束 $Hom(E, F)$ とは ${}^t g_{ij} \otimes h_{ij} \in GL(n_1 n_2;\mathbf{R})$ を変換系にもつベクトル束のことである．ただしここでは $\mathbf{R}^{n_1 n_2} \cong Hom(\mathbf{R}^{n_1}, \mathbf{R}^{n_2})$ と考え，そこへの ${}^t g_{ij}(p) \otimes h_{ij}(p)$ の作用は

$$\varphi \mapsto h_{ij}(p) \circ \varphi \circ g_{ij}^{-1}(p) \tag{0.3.9}$$

で与えている．

すると切断の間の準同型写像$\Gamma(U; Hom(E, F)) \otimes \Gamma(U; E) \to \Gamma(U; F)$ が定まっている．

双対ベクトル束 E^* が $E^* = Hom(E, \mathbf{R})$ で定まる．(ここで $\mathbf{R}$ はランクが 1 の自明なベクトル束（すべての変換系が単位行列への定値写像であるベクトル束）である．)

また $\Lambda^k(E)$ を$\Lambda^k(g_{ij}) \in GL\left(\frac{n!}{(n-k)!k!}; \mathbf{R}\right)$ を変換系とするベクトル束とする．(ここでは $\mathbf{R}^n$ の k 次の外積代数を $\mathbf{R}^{\frac{n!}{(n-k)!k!}}$ とみなしている．) この記号を使うと$\Lambda^k(M) = \Lambda^k(T^*(M))$，$\Omega^k(M) = \Gamma(M; \Lambda^k(T^*(M)))$ である．

次に E を M 上の座標系 $\{U_i\}$ 変換系 g_{ij} を持つベクトル束とし $f : N \to M$ を C^∞ 級の写像としたとき，誘導束 (induced bundle)（あるいは引き戻し (pull back)) f^*E を，座標系 $\left\{f^{-1}(U_i)\right\}$ 変換系 $g_{ij} \circ f$ を持つベクトル束と定義する．

さて以上でベクトル束について最低限のことを述べた．この続きは第 1 章にして，ここで楕円型作用素の話に移ることにしよう．

V　楕円型作用素

ベクトル束は線形偏微分方程式を大域的に論ずるには不可欠な枠組みである．ユーリッド空間上で微分作用素を考える場合，それは関数またはその組 $(\varphi_1, \cdots, \varphi_k)$ に作用していると考えるのが自然である．それに対して多様体上で考えるにはこれは適切ではない．すなわち多くの重要な微分作用素は多様体上の（普通の意味での）関数に作用しているわけではない．その一番簡単な例が外微分 d で，これが作用しているのは微分型式に対してである．一方で方程式が線形である，ということが意味を持つためには関数は値をベクトル空間にとらなければならない．このようなわけで大域解析ではベクトル束が重要な役割を果たす．

線形微分作用素の定義を与えよう．(この項についてより詳しくは，[熊ノ郷]2,9 章，[藤原] 参照.)

定義 0.3.10　$E \to M$，$F \to M$ がベクトル束とする．線形写像 $P : \Gamma(M; E) \to \Gamma(M; F)$ が k 階の微分作用素 (differential operator) であるとは，$E \to M$，$F \to$

M の座標 U_i をとり，$(s_i) \in \prod C^\infty(U_i)^{k_1}$ が $s \in \Gamma(M;E)$ に $(t_i) \in \prod C^\infty(U_i)^{k_2}$ が $Ps \in \Gamma(M;F)$ に（補題 0.3.7 の意味で）対応するとき

$$t_i = \sum_{0\le\ell\le k} \sum_{1\le j_1,\cdots,\, j_\ell\le m} a_i^{j_1,\cdots,\, j_\ell}(x_1,\cdots,x_m)\frac{\partial^\ell s_i}{\partial x^{j_1}\cdots\partial x^{j_\ell}}$$

を満たすような $k_1 \times k_2$ 行列値関数 $a_i^{j_1,\cdots,\, j_\ell}(x_1,\cdots,x_m)$ が存在することをいう．

多様体上で線形微分方程式を考察するのに重要なのが表象 (symbol) という概念である．これについて説明するために定義 0.3.10 で出てきた係数 $a_i^{j_1,\cdots,\, j_\ell}$ $(x_1,\cdots,x_m)$ について考えてみよう．これは M 全体では（大域的には）どのような量であると考えるべきであろうか．これは座標の取り換えで $a_i^{j_1,\cdots,\, j_\ell}$ $(x_1,\cdots,x_m)$ がどのように振舞うか，と言い換えることができる．計算を簡単にするため 1 階の微分作用素の場合を調べてみよう．

ベクトル束 $E \to M$ の $U_i \cap U_j$ での座標変換を $g_{ji} : U_i \cap U_j \to GL(k_1;\mathbf{R})$，$F \to M$ の $U_i \cap U_j$ での座標変換を $h_{ji} : U_i \cap U_j \to GL(k_2;\mathbf{R})$ とし U_i 上で微分作用素 P は

$$\sum_\ell a_i^\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell} + b_i$$

U_j 上では

$$\sum_\ell a_j^\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell} + b_j$$

と表されているとしよう．(s_i)，(t_i) を定義 0.3.10 のようにとると補題 0.3.7 より $s_j = g_{ji}s_i$，$t_j = h_{ji}t_i$ が成り立つ．これを

$$t_i = \sum_\ell a_i^\ell \frac{\partial s_i}{\partial x^\ell} + b_i s_i$$

$$t_j = \sum_\ell a_j^\ell \frac{\partial s_j}{\partial x^\ell} + b_j s_j$$

に代入すると

$$h_{ji}\left(\sum_\ell a_i^\ell \frac{\partial s_i}{\partial x^\ell} + b_i s_i\right) = \sum_\ell a_j^\ell \frac{\partial (g_{ji}s_i)}{\partial x^\ell} + b_j g_{ji} s_i$$

よって

$$\begin{aligned} a_i^\ell &= h_{ji}^{-1} a_j^\ell g_{ji} = h_{ij} a_j^\ell g_{ij}^{-1} \\ b_i &= h_{ji}^{-1} b_j g_{ji} + h_{ji}^{-1} a_j^\ell \tfrac{\partial g_{ji}}{\partial x_\ell} \end{aligned} \tag{0.3.10}$$

ここでは多様体の座標変換は考えずベクトル束の座標変換だけを考えた．多様体のほうの座標変換も考え U_i 上では座標 $(x^1, \cdots, x^m)$ を U_j 上では $(y^1, \cdots, y^m)$ を使うと (0.3.10) の第一式は

$$a_i^\ell = \sum_m \frac{\partial x^\ell}{\partial y^m} h_{ij} a_j^m g_{ij}^{-1}$$

と表される．したがって (0.3.9) より $\left(a_i^\ell\right)$ はベクトル束 $Hom(E, F) \otimes T(M)$ の切断を与えている．この切断のことを微分作用素 P の表象と呼ぶ．

表象は作用素 P の 1 階微分の係数に対応していた．それでは 0 階微分に対応する項 b_i のほうはどうであろうか．(0.3.10) 式から b_i を座標変換すると出てくるのは b_j だけでなく a_j も出てきて，しかも a_j についてはその微分も現れるということがわかる．これは b_i をベクトル束の切断ととらえることができないことを意味する．一般にも（1 階とは限らない場合にも）微分作用素の最高次の係数はベクトル束の切断として大域的にとらえることができるが，低階の項の係数の変換則はより複雑である．しかし幸運なことに多くの目的には微分作用素の最高次の係数だけで，作用素の性質の多くの部分を調べることができる．これが表象を用いる解析の基本的な考え方である．

表象のもう一つの大事な性質に合成法則がある．これについて述べておこう．そのため表象の定義を少し言い換えることにする．多様体 M の余接束 T^*M をとり，このベクトル束の射影 $\pi : T^*(M) \to M$ による E，F の引き戻し π^*E，π^*F を考える．

$$\sum_\ell a_i^\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell} + b_i$$

で表される微分作用素 P と T^*M の点$\xi = \sum \xi_\ell dx^\ell$ に対して行列 $\sum_\ell \xi_\ell a_i^\ell$

を考えると，これは $\pi^{-1}(U_i)$ 上の $k_1 \times k_2$ 行列値の関数を与える．(a_i^ℓ) が $Hom(E,F)\otimes T(M)$ の切断を与えていたことを言い換えると，$\sum_\ell \xi_\ell a_i^\ell$ たちが $Hom(\pi^*E,\pi^*F)$ の切断を与えることがわかる．この切断のことも P の表象と呼び $\sigma(P)$ と表す．

P の階数が 2 以上のときも P が

$$t_i = \sum_{0\le\ell\le k}\sum_{1\le j_1,\cdots,j_\ell\le m} a_i^{j_1,\cdots,j_\ell}(x^1,\cdots,x^m)\frac{\partial^\ell s_i}{\partial x^{j_1}\cdots\partial x^{j_\ell}}$$

と表されているとき

$$\sigma(P)(\sum \xi_\ell dx^\ell) = \sum_{\ell_1+\cdots+\ell_k=m} \xi_{\ell_1}\xi_{\ell_2}\cdots\xi_{\ell_k}a^{\ell_1,\cdots,\ell_k}$$

で $Hom(\pi^*E,\pi^*F)$ の切断が定義できる．これも P の表象と呼ぶ．

さて表象の合成法則を述べよう．$P_1:\Gamma(M;E_1)\to\Gamma(M;E_2)$ を k_1 階の微分作用素，$P_2:\Gamma(M;E_2)\to\Gamma(M;E_3)$ を k_2 階の微分作用素とする．

定理 0.3.11　合成 $P_1\circ P_2:\Gamma(M;E_1)\to\Gamma(M;E_3)$ は k_1+k_2 階の微分作用素でこれらの表象は $\sigma(P_1\circ P_2)=\sigma(P_1)\circ\sigma(P_2)$ なる合成法則を満たす．

証明は P_1，P_2 が 1 階の場合にだけ与えることにしよう．座標を用いて

$$\begin{aligned} P_1 &= \sum_\ell a_i^\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell} + b_i \\ P_2 &= \sum_\ell c_i^\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell} + d_i \end{aligned}$$

と表されているとする．この合成は

$$P_1P_2 = \sum_{\ell,k} a_i^\ell c_i^k \frac{\partial^2}{\partial x^\ell \partial x^k} + \sum_{\ell,k} a_i^\ell \frac{\partial c_i^k}{\partial x^\ell}\frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_\ell b_i c_i^\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell} + \sum_\ell a_i^\ell \frac{\partial d_i}{\partial x^\ell} + b_i d_i$$

である．したがって表象を計算すると

$$\sigma(P_1P_2)(\sum \xi_i dx^i) = \sum_{k,\ell}\xi_k\xi_\ell a^k c^\ell = \sum_k \xi_k a^k \sum_\ell \xi_\ell c^\ell = \sigma(P_1)\sigma(P_2)$$

証明終わり

さてここで楕円型作用素 (elliptic operator) の定義をしよう.

定義 0.3.12　微分作用素 $P:\Gamma(M;E)\to\Gamma(M;F)$ が楕円型であるとは, 0 でない任意の余接空間の元 $\sum\xi_i dx^i\in T_p^*M$ に対して表象 $\sigma(P)(\sum\xi_i dx^i):E_p\to F_p$ が線形同型であるときをいう.

楕円型作用素は次に定義する楕円型複体 (elliptic complex) と結びついていることが多い.

定義 0.3.13　ベクトル束 $E_i\to M$ $(i=1,\cdots,k)$ とその間の微分作用素たち $P_i:\Gamma(M;E_i)\to\Gamma(M;E_{i+1})$ が楕円型複体であるとは

(1) $P_{i+1}P_i=0$

(2) 0 でない任意の余接空間の元 $\xi=\sum\xi_i dx^i\in T_p^*M$ に対して表象たちは完全系列

$$0\to E_{1,\,p}\xrightarrow{\sigma(P_1)(\xi)}E_{2,\,p}\xrightarrow{\sigma(P_2)(\xi)}\cdots\xrightarrow{\sigma(P_{k-1})(\xi)}E_{k,\,p}\to 0$$

をなす.

(ここでベクトル空間と準同型の列 $0\to V_1\xrightarrow{\varphi_1}V_2\xrightarrow{\varphi_2}\cdots\xrightarrow{\varphi_{k-1}}V_k\to 0$ が完全系列 (exact sequence) であるとは φ_1 が単射, φ_{k-1} が全射で $\operatorname{Im}\varphi_i=\operatorname{Ker}\varphi_{i+1}$ が $i=1,\cdots,k-2$ に対して成り立っていることを指す.)

ド・ラーム複体は楕円型複体の例である. これを確かめるために表象を計算してみよう. 局所座標で表すと k 形式の作るベクトル束 $\Lambda^k(T^*M)$ の一点 p での基底は $dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$ である. これを $e^{i_1,\cdots,\,i_k}$ と表すことにする. すると外微分作用素は

$$d\left(\sum f_{i_1,\cdots,\,i_k}e^{i_1,\cdots,\,i_k}\right)=\sum\frac{\partial f_{i_1,\cdots,\,i_k}}{\partial x^{i_0}}e^{i_0,\,i_1,\cdots,\,i_k}$$

と表される. したがって $\xi=\sum\xi_i dx^i\in T_p^*M$ でのその表象は

$$e^{i_1,\cdots,\,i_k}\mapsto\sum_{i_0}\xi_{i_0}e^{i_0,\,i_1,\cdots,\,i_k}$$

すなわち

$$\Lambda^k(T_p^*M) \to \Lambda^{k+1}(T_p^*M),\, u \mapsto \xi \wedge u$$

である．

$$0 \to \Lambda^0(T_p^*M) \xrightarrow{\xi\wedge} \Lambda^1(T_p^*M) \xrightarrow{\xi\wedge} \cdots \xrightarrow{\xi\wedge} \Lambda^{m-1}(T_p^*M) \xrightarrow{\xi\wedge} \Lambda^m(T_p^*M) \to 0$$

が $\xi \neq 0$ に対して完全系列であることは容易に確かめられる．したがってド・ラーム複体は楕円型複体である．

楕円型複体と楕円型作用素の関係について述べるためにベクトル束に内積を導入しよう．ベクトル束 $E \to M$ の計量 (metric) とは各点 $p \in M$ に対してファイバー E_p 上の正定値内積 $\langle\ \rangle_p$ を与える対応であって p に滑らかに依存するものをいう．ここで $\langle\ \rangle_p$ が p に滑らかに依存するとは，切断 $s_1,\, s_2 \in \Gamma(M;E)$ に対して写像 $p \mapsto \langle s_1,\, s_2\rangle_p$ が C^∞ 級であることをいう．このとき座標系をうまく選ぶと変換系 g_{ij} が直交群 $O(k) = \left\{g \in GL(n;\mathbf{R}) \middle| {}^t gg = I\right\}$ への写像であるようにできる．前に述べた言葉を使えば E の計量があると E の構造群は $O(k)$ に簡約化される．逆に構造群は $O(k)$ に簡約化があるとそれに対応した内積を作ることができる（命題 1.1.9）．

さてベクトル束 $E \to M$ に計量が与えられているとする．このとき切断の空間 $\Gamma(M;E)$ 上の L^2 内積を

$$\langle s_1,\, s_2\rangle_{L^2} = \int_M \langle s_1(p),\, s_2(p)\rangle_p \Omega_M$$

で定義する．(M のリーマン計量も与えておく．Ω_M はこのリーマン計量に対する体積要素である.）このノルムに対する $\Gamma(M;E)$ の完備化を $L^2(M;E)$ と書く．

さて微分作用素 $P : \Gamma(M;E) \to \Gamma(M;F)$ （と $E,\, F$上の内積）が与えられたとき，作用素 $P^* : \Gamma(M;F) \to \Gamma(M;E)$ が P の共役作用素 (adjoint operator) であるとは

$$\langle s,\, P^*t\rangle_{L^2_E} = \langle Ps,\, t\rangle_{L^2_F}$$

が任意の $s \in \Gamma(M;E)$，$t \in \Gamma(M;F)$ に対して成立することをいう．

命題 0.3.14　M がコンパクトで境界がない場合，微分作用素 $P:\Gamma(M;E)\to\Gamma(M;F)$ に対してその共役作用素 P^* はただ一つ存在し，微分作用素で，その表象は $\sigma(P^*)=\sigma(P)^*$ で与えられる．

ここで $\sigma(P)^*(\xi):F_p\to E_p$ は$\sigma(P)(\xi):E_p\to F_p$ の（E,F上の内積に関する）共役である．証明は直接計算で容易にできるので省略する．

さて楕円型複体

$$0\to E_1\xrightarrow{P_1}E_2\xrightarrow{P_2}\cdots\xrightarrow{P_{k-2}}E_{k-1}\xrightarrow{P_{k-1}}E_k\to 0$$

を考えよう．P_i の共役作用素を P_i^* とおき作用素 $\Box_k:\Gamma(M;E_k)\to\Gamma(M;E_k)$ を

$$\Box_k=P_{k-1}P_{k-1}^*+P_k^*P_k$$

で定義する．

命題 0.3.15　$\Box_k$ は楕円型作用素である．

証明　定理 0.3.11 と命題 0.3.14 より

$$\sigma(\Box_k)=\sigma(P_{k-1})\sigma(P_{k-1})^*+\sigma(P_k)^*\sigma(P_k)$$

が成立する．$\xi\neq 0$，$\xi\in T_p^*(M)$，$v\in E_{k,\,p}$ に対して$\sigma(\Box_k)(\xi)(v)=0$ とすると上の式より

$$\begin{aligned}0&=\langle\sigma(P_{k-1})\sigma(P_{k-1})^*v,\,v\rangle+\langle\sigma(P_k)^*\sigma(P_k)v,\,v\rangle\\&=\langle\sigma(P_{k-1})^*v,\sigma(P_{k-1})^*v\rangle+\langle\sigma(P_k)v,\sigma(P_k)v\rangle\end{aligned}$$

したがって $0=\sigma(P_{k-1})^*v=\sigma(P_k)v$．すなわち $v\in\operatorname{Ker}\sigma(P_k)\cap\operatorname{coKer}\sigma(P_{k-1})$．よって定義 0.3.13(2) の表象の完全性により $v=0$．　証明終わり

定理 0.3.2，定理 0.3.4 の楕円複体への一般化は次のようになる

定理 0.3.16　$P_i:\Gamma(M;E_i)\to\Gamma(M;E_{i+1})$ $(i=1,\cdots,k)$ を閉多様体（境界の

ないコンパクト多様体）M 上の楕円型複体とする．

(1) $\mathrm{Ker}\ \Box_k = \dfrac{\mathrm{Ker}\ P_k}{\mathrm{Im}\ P_{k-1}}$.

(2) $\mathrm{Ker}\ \Box_k$ は有限次元である．

(3) 直交直和分解 $L^2(M;E) = \mathrm{Ker}\ \Box_k \oplus \mathrm{Im}\ P^*_{k+1} \oplus \mathrm{Im}\ P_{k-1}$ が成り立つ．

(3) の証明は定理 0.3.4 の証明とほぼ同様である．(3) ⇒ (2) の証明は定理 0.3.4 ⇒ 定理 0.3.2 の証明と同一である．(1) は命題 0.3.15 と閉多様体（境界のないコンパクト多様体）上で楕円型方程式の解の空間が有限次元であること（定理 0.3.17）から従う．詳しくは§3.1 を見ていただきたい．

定理 0.3.17　楕円型作用素は（適当なソボレフ空間上の）フレドホルム作用素に拡張される．

定義 0.3.18　$\sum_k (-1)^k \dim \mathrm{Ker}\ \Box_k$ を楕円型複体 $P_i : \Gamma(M;E_i) \to \Gamma(M;E_{i+1})$ $(i = 0, \cdots, k)$ の指数 (index) という．

楕円型複体で作用素が一つしかない場合が楕円型作用素 $P : \Gamma(M;E) \to \Gamma(M;F)$ だった．この場合の指数は $\dim \mathrm{Ker}\ P - \dim \mathrm{CoKer}\ P = \dim \mathrm{Ker}\ P - \dim \mathrm{Ker}\ P^*$ である．これに対して次の定理が成立する．

定理 0.3.19　楕円型作用素の指数はその表象のみによる．また表象を楕円型のままホモトッピックに動かしても変わらない．

定理の証明は省略するが，フレドホルム作用素の指数が連続変形で変わらないことに基づく．(交代和をとらず $\dim \mathrm{Ker}\ P$ などを考えるとこれは連続変形不変ではない．)

さらに指数を表象で具体的に表す式が知られている．これをアティヤ–シンガーの指数定理という．これを述べるには特性類が必要である．必要な場合だけ後で述べることにする．

アティヤ–シンガーの指数定理はゲージ理論のいろいろなところに現れる．第一に現れるのはモジュライ空間の次元の計算である．これらについては第1章以後おいおい述べていくことにしたい．

§ 0.4 4次元位相幾何学概観

I ロホリン (Rokhlin) の定理

フィントゥッシェル–シュターン (Fintushell-Stern) はながらくコンビを組んでいる共同研究者でゲージ理論が現れる前から 4 次元位相幾何学を研究していた．あるとき突然そろってゲージ理論を始め，この分野でも着々と成果を上げている．その一人にあるとき，なぜ二人そろって突然ゲージ理論を始めたのか聞いてみたことがある．彼の答えはこうだった：自分たちは長い間 4 次元微分位相幾何学を研究してきたが，そこにはほとんど方法がなかった．あったのはロホリンの定理だけだった．そこへ我々はドナルドソン (Donaldson) の（ゲージ理論の 4 次元位相幾何学への応用についての）素晴らしい講演を聴いた．どうしてこれをやらないわけがあるだろうか．

確かにゲージ理論の登場で 4 次元位相幾何学は大きく変わった．最近の 4 次元位相幾何と銘打たれた研究集会にはいつもゲージ理論が中心的話題として出てくる．

この節ではドナルドソンによってゲージ理論が持ち込まれる以前に 4 次元位相幾何学でどんなことが問題にされ，どの程度わかっていたか，そしてゲージ理論によってどの程度の進歩があったのかについていくらか述べてみたい．

（しかし筆者は 4 次元位相幾何学の専門家ではないので記述には偏りがあるに違いない．[松本 3]，[上 1] は専門家による優れた解説である.）

まずフィントゥッシェルもゲージ理論以前の 4 次元微分位相幾何学のただ一つの（固有の）道具といっていたロホリンの定理を述べる．

定理 0.4.1 閉 4 次元スピン多様体の符号数は 16 で割り切れる．

上の定理で使った用語を説明する．M を向きのついた 4 次元閉多様体とする．M の 2 次元コホモロジー群 $H^2(M;\mathbf{Z})$ にはカップ積により対称 2 次形

式 $u, v \mapsto Q(u,v) = (u \cup v) \cap [M]$ が定まる.（あるいはド・ラームコホモロジーの言葉で書くと $Q(u,v) = \int_M u \wedge v$ である.）ポアンカレ双対定理によりこの 2 次形式は非退化かつユニモジュラー (unimoduler) である.（つまり同型 $H^2(M;\mathbf{Z}) \to Hom(H^2(M;\mathbf{Z}),\mathbf{Z})$ を導く.）これを交叉形式 (intersection form) と呼ぶ.

非退化な対称 2 次形式の符号数とは，その正の固有値の数（重複度を込めた）から負の固有値の数（重複度を込めた）を引いたものである．交叉形式の符号数のことを多様体の符号数 (signature) と呼ぶ.

スピン構造 (spin structure) については §1.3 で説明する．ここでは次の事実を述べておく.

命題 0.4.2 単連結閉 4 次元多様体 M に対して，M がスピン構造をを持つことと，任意の $u \in H^2(M;\mathbf{Z})$ に対して $Q(u,u) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$ が成立することは同値である.

単連結でないと命題 0.4.2 は成立しないが定理 0.4.1 は成立する．これで定理 0.4.1 の言葉の説明は一応すんだ．定理の証明については本書では触れない（[田村 2] 参照）.

II 整数係数対称 2 次形式

定理 0.4.1 の結論の意味を明らかにするために整数係数ユニモジュラー対称 2 次形式についてのいくつかの知られている事実を証明なしで述べよう．これらについては [Se] が良い教科書である.

定義 0.4.3 整数係数ユニモジュラー対称 2 次形式 $Q : V \otimes V \to \mathbf{R}$ が II 型であるとは任意の $v \in V$ に対して $Q(v,v) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$ が成立することを言う．II 型でない整数係数ユニモジュラー対称 2 次形式を I 型と言う.

定理 0.4.4 II 型の整数係数ユニモジュラー対称 2 次形式の符号数は 8 で割り

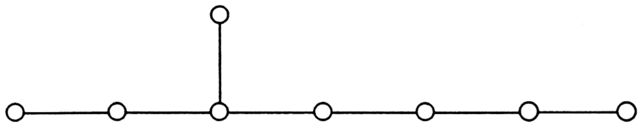


図 0.4.1

切れる.

一般に II 型の整数係数ユニモジュラー対称 2 次形式の符号数は 16 で割り切れるとは限らない．その代表的な例が 2 次形式 E_8 である．これは図 0.4.1 のようなグラフで記述される.

図 0.4.1 に整数係数対称 2 次形式を対応させるには次のようにする．まず図の 8 個の頂点 $v_1, \cdots, v_8$ にランク 8 の（自由）$\mathbf{Z}$ 加群 $V = \mathbf{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}e_8$ の基底を対応させる．この上に 2 次形式 Q を次のようにして定める.

(1) $Q(e_i, e_i) = -2, \quad i = 1, \cdots, 8.$

(2) $Q(e_i, e_j) = 1, \quad v_i$ と v_j が線で結ばれている場合.

(3) $Q(e_i, e_j) = 0, \quad v_i$ と v_j が線で結ばれてない場合.

このようにして決まる 2 次形式がユニモジュラーかつ II 型であることは容易に確かめられる．図 0.4.1 のようなグラフをディンキン (Dynkin) 図形と言う．一般には点同士を結んでいるのが 2 重線だったり 3 重線だったりする場合も含む.（それに対応して 2 次形式が決まる．その規則はここでは述べない.）ディンキン図形から決まるユニモジュラー 2 次形式はすべて分類されている．ディンキン図形はもともとはリー群の分類の中から見つかったものであるが，数学のいろいろな分野に現れる．ここでは特に代数曲面の有理特異点 (rational singurality) との関係に関わりがあるのであるが，それについては述べない（[BPV] III §3 など参照）.

元に戻ると定理 0.4.1 はたとえば 2 次形式 E_8 が単連結閉 4 次元多様体の交叉形式になることがないことを主張している.

整数係数ユニモジュラー対称 2 次形式の話をもう少し続けよう．2 次形式が正定値 (positive definite) とはすべての固有値が正なこと，負定値 (negative definite) とはすべての固有値が負のことをさす．どちらでもないとき 2 次形式は不定値 (indefinite) と言う．ランク 1 の 2 次形式 $I_{\pm}$ を $I_+ = (1)$, $I_- = (-1)$ で定める．(整数係数 2 次形式 Q を以後 $Q(e_i, e_j)$ を成分として持つ対称行列と同一視する．ここで e_i は $\mathbf{Z}^n$ の基底である．)

定理 0.4.5

(1) 2 次形式が I 型であって不定値であればいくつかの I_+ と I_- の直和に一致する．

(2) 2 次形式が II 型であって不定値であればいくつかの E_8 と行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で表せる 2 次形式の直和に同型である．

この定理の証明は初等的であるがここでは述べない．さて定理 0.4.5 で記述されていない場合は 2 次形式が正または負定値の場合である．この場合は無限個の既約な整数係数ユニモジュラー 2 次形式が存在する．したがってこの場合，どの 2 次形式が単連結 4 次元多様体の交叉形式として現れるか，は自然に思いつく問題である．

ドナルドソンの 1988 年の論文 [D1] （ゲージ理論の位相幾何学への応用が初めて行われたもの）の主要結果はこのようなことが決して起こらないこと，すなわち交叉形式が正定値であるような 4 次元多様体の交叉形式は I_+ のいくつかの直和であるというものであった．この定理については§2.4 で述べる（定理 2.4.12）．とにかくこの章はドナルドソン以前を説明するのが目的であった．少し先走りすぎた．

III $K3$ 曲面

定理 0.4.5 で出てきた三つの 2 次形式，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$I_+$，$I_-$, は $S^2 \times S^2$, 射影

空間 $\mathbf{C}P^2$ 及びその向きを変えたもの $\overline{\mathbf{C}P^2}$の交叉形式として実現できる．E_8 が実現できないことはロホリンの定理の帰結である．それでは E_8 を直和因子に持つような 2 次形式を交叉形式に持つような単連結閉スピン多様体はあるだろうか．

そのような例は代数曲面論で古くから知られている．その中で一番重要なのは $K3$ 曲面であろう．それだけではなく $K3$ 曲面は 4 次元多様体の微分幾何学・位相幾何学・代数曲面論などの諸分野にしばしば顔を出す興味深い空間である．そこでここでは序論に書くには多少技術的になるが，$K3$ 曲面を構成してみよう．(以下のように構成されたものをクンマー (Kummer) 曲面と言う.)（$K3$ という名前は小平，クンマー，ケーラー (Kähler) にちなんでヴェイユがつけたのである.)

まず 4 次元トーラス $T^4 = \mathbf{R}^4/\mathbf{Z}^4$ から出発する．これには自己可微分同相 $\tau : [z] \mapsto [-z]$ が働きまた $\tau^2 = 1$ である．言い換えると 4 次元トーラスには群 $\mathbf{Z}_2$ が作用する．この作用による商 $X = T^4/\mathbf{Z}_2$ を考えよう．τ は 16 個の不動点 $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4]$ を持つ．(ここで ε_i は 0 または 1/2 である.）したがって X はちょうど 16 個の特異点 p_i（$i = 1, \cdots, 16$）を持つ．これらの点の近傍で Xは実射影空間 $\mathbf{R}P^3$ の錘である．(つまり $\mathbf{R}P^3 \times [0,1]$ で $\mathbf{R}P^3 \times \{0\}$ を一点につぶしたものになっている.）この近傍で X を少し取り換えて特異点をなくしたのが $K3$ 曲面である．

もう少し説明しよう．2 次元球面の接束 TS^2 を考え $V = \left\{v \in TS^2 \mid |v| \le 1\right\}$ とおく．V の境界 $\partial V = \left\{v \in TS^2 \mid |v| = 1\right\}$ は実射影空間と可微分同相である．これを見るには次のようにすればよい．S^2 を 3 次元ベクトル空間の長さが 1 のベクトル全体と考える．すると S^2 の点 $v \in S^2 \subset \mathbf{R}^3$ での接空間 T_vS^2 は $\mathbf{R}^3$ での v の直交補空間と考えることができる．したがって

$$\partial V = \left\{(v_1, v_2) \in (\mathbf{R}^3)^2 \mid |v_1| = |v_2| = 1, \langle v_1, v_2 \rangle = 0\right\}$$

である．そこで $(v_1, v_2) \in \partial V$ に対して v_3 を (v_1, v_2, v_3) が $\mathbf{R}^3$ の向きを保つ正規直交基になるような（ただ一つの）元とする．(v_1, v_2, v_3) を 3×3 行列と思うとこれは $SO(3)$ の元になる．以上の対応で可微分同相 $\partial V \cong SO(3)$ が得られた．§1.3 で述べるように $SO(3)$ は $S^3/\{\pm 1\} = \mathbf{R}P^3$ に一致する．

さてそこで $X = T^4/\mathbf{Z}_2$ を考え，これから 16 個の特異点の小さな近傍を取り除こう．こうしてできるのは特異点のない境界付き多様体で，その境界は 16 個の $\mathbf{R}P^3$ からなる．そこでここに 16 個の V のコピーを境界に沿ってはり合わせる．こうしてできた多様体を M とする．この M のことを $K3$ 曲面と呼ぶ．

命題 0.4.6

1. $$H_k(M;\mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z} & k = 0, 4 \\ \mathbf{Z}^{22} & k = 2 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$
   でまた M の交叉形式は $2(-E_8) \oplus 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に同型である．
2. M は単連結．

証明 X から 16 個の特異点の小近傍を除いたものを X_0 と書く．写像 $T^4 \to X$ による X_0 の逆像を $\widetilde{X}_0$ とすると，$\widetilde{X}_0$ は T^4 から 16 個の点を除いたものと同相である．したがって，$H^2(\widetilde{X}_0;\mathbf{Z}) = H^2(T^4;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^6$．すると $T^4 \to X$ は 2 重（有限）被覆であること及び被覆変換群 (τ) の $H^2(X;\mathbf{Q})$ への作用が自明であることから次の補題が示せる．

補題 0.4.7 $\widetilde{X}_0 \to X_0$ は $\mathbf{Q}$ 係数コホモロジーの同型を導く．特に $H^2(X;\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^6$．

証明 X_0 の 3 角形分割を一つ選びこれを $\pi : \widetilde{X}_0 \to X_0$ で引き戻して $\widetilde{X}_0$ の 3 角形分割を定める．この 3 角形分割を用いて写像 $\pi! : H^2(\widetilde{X}_0;\mathbf{Z}) \to H^2(X_0;\mathbf{Z})$ を次のように定める．u を $\widetilde{X}_0$ の 2 コサイクルとする．X_0 の 2 単体 σ に対してこの $\pi : \widetilde{X}_0 \to X_0$ による逆像は 2 つの 2 単体 σ_1,σ_2 からなる．$\pi!(u)(\sigma) = u(\sigma_1) + u(\sigma_2)$ と定義する．変換群 (τ) の $H^2(X;\mathbf{Q})$ への作用が自明であることより $\pi!\pi^* = \pi^*\pi! = 2$ が示せる．したがって π^* は有理係数では同型を導く．
証明終わり

ところで $H_2(V;\mathbf{Z}) \cong H^2(V,\partial V;\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ で $V \subseteq TS^2$ のノルム 0 の元全体 $(= S^2)$ が生成元である．したがってマイヤー–ヴィエトリス (Mayer-Vietoris) の完全系列

$$H_2(X_0;\mathbf{Z}) \oplus 16H_2(V;\mathbf{Z}) \to H_2(M;\mathbf{Z}) \to 16H_1(\partial V;\mathbf{Z}) \to H_1(X_0;\mathbf{Z})$$

より $H^2(M;\mathbf{Q}) \cong \mathbf{Q}^{22}$.

次に M が単連結であることを示そう．まず V は単連結だったから，$\pi_1(X_0) \to \pi_1(M)$ は全射である．また $\pi : \widetilde{X}_0 \to X_0$ は 2 重被覆であるから，$\pi_1(\widetilde{X}_0)$ は $\pi_1(X_0)$ で高々指数 2 の部分群である．いっぽう $\pi : \widetilde{X}_0 \to X_0$ の被覆変換群の生成元は$\pi_1(\partial V)$ の生成元に対応する．また像 $\pi_1(\partial V) \to \pi_1(V)$ は 0 である．したがって $\pi_1(\widetilde{X}_0) \to \pi_1(M)$ は全射である．よって $\pi_1(\widetilde{X}_0) \cong \pi_1(T^4)$ の生成元に対してその元の $\pi_1(M)$ への像が 1 であることを示せばよい．

$T^4 = \mathbf{R}^4/\mathbf{Z}^4$ を考え $\mathbf{R}^4$ の座標を x, y, z, w とする．このとき $\pi_1(T^4)$ は x, y, z, w 軸が表す四つの元で生成される．構成は座標軸について対称であるから x 軸（つまり $y = z = w = 0$）の像である元$\gamma \in \pi_1(T^4)$ について見れば十分である．ただ x 軸は $\widetilde{X}_0$ に含まれていないのでこれを少し xy 平面内で動かす．

さて T^2/τ を考えるとこれは S^2 と同相である．(これを証明するやり方はいろいろある．具体的に表すこともできるしまたオイラー数を計算してもよい.) これより（S^2 は単連結であるから）γ の表す元の $\pi_1(M)$ での像は$\pi_1(\partial V)$ たちの$\pi_1(M)$ への像たちで生成される部分群に含まれる（図 0.4.2 参照）.

しかし $\pi_1(\partial V)$ の$\pi_1(M)$ への像は 1 だけであるからγ は $\pi_1(M)$ では 1 である．よって M は単連結である．

これから $H_1(M;\mathbf{Z}) = 0$ もわかる．またホモロジー論でよく知られているように $H_1(M;\mathbf{Z}) = 0$ であると $H^2(M;\mathbf{Z})$ はねじれ (torsion) を持たない．またこのとき $H_2(M;\mathbf{Z}) \cong H^2(M;\mathbf{Z})$ である．以後この二つは同一視する．以上により命題 0.4.6 は交叉形式についての主張をのぞいて証明された．

交叉形式についての主張を証明するには，定理 0.4.5 により，それが交叉形式が II 型でまた負の固有値が 19 個，正の固有値が 3 個であることをいえばよい．$H_2(V;\mathbf{Q})$ は交叉形式もこめて 16 個の $H_2(V;\mathbf{Q})$ と $H_2(T^4;\mathbf{Q})$ の直和であるから後半は明らかである．($H_2(V;\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}$ は $V \subseteq TS^2$ の 0 切断で生成さ

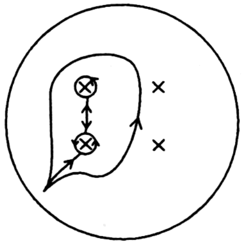


図 0.4.2

れ，この 0 切断が表すサイクルの自己交点数は S^2 のオイラー数つまり 2 である.）したがって命題の証明を完成するには M の交叉形式が II 型であることを示せばよい．このことの証明はかなりめんどうなので後（§1.3）に回す.

さて以上 $K3$ 曲面について述べた．この空間は S^4, $S^2 \times S^2$,$\mathbf{C}P^2$ と並ぶ基本的な例である．たとえば 4 次元多様体の交叉形式についての次の予想は未解決である.

予想 0.4.8 単連結閉 4 次元多様体 M に対してその交叉形式は $K3$ 曲面，$S^2 \times S^2$,$\mathbf{C}P^2$ 及びそれらの向きを変えたものの交叉形式のいくつかの直和に同型であろう.

予想 0.4.8 は「単連結閉スピン 4 次元多様体の符号数をオイラー数で割った商が $\frac{11}{8}$ 以上である」という主張と同値である．これを $\frac{11}{8}$ 予想と言う.（この予想を初めて述べたのは松本幸夫である.）

予想 0.4.8 は交叉形式が定値の場合は解かれている（ドナルドソン）．また交叉形式が I 型不定値の場合は代数である．II 型不定値の場合は交叉形式の正の固有値が 1 の場合を考えると，この予想はそれが $S^2 \times S^2$ の交叉形式と一致することを主張する．これもドナルドソンによって示されている．交叉形式の正の固有値が 2 個の場合には予想は交叉形式が $S^2 \times S^2$ の 2 個の連結和と一致することを主張する．これもドナルドソンによって示されている（定理 2.4.13）.

予想 0.4.8 についての現時点（1995 年 5 月）で最良の結果はサイバーグ

(Seiberg)–ウィッテン理論（付録参照）に基づく古田幹雄（[古田 5]）によるもので，$H^2(M;\mathbf{Z}) \cong 2k(-E_8) \oplus \ell \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ならば $k \geq 2\ell + 1$ というものである（予想 0.4.8 は $k \geq 3\ell$ にあたる）.

IV　4次元における手術の理論

上にあげた 4 次元多様体 $K3$ 曲面，$S^2 \times S^2$,$\mathbf{C}P^2$ はすべて複素多様体あるいはもっと強く代数曲面である．このように 4 次元多様体の重要な例は多くは代数曲面である．それで 4 次元位相幾何学の研究には代数曲面論がしばしば用いられる．これについて述べる前に高次元の微分位相幾何学的手法のいくつかを思いだし，これらのどれが 4 次元で適用できどれができないのか，できないとしたらその理由は何なのかについて述べてみたい.

n 次元多様体の間の h 同境 (h cobordism) とは，$n+1$ 次元境界付き単連結多様体 N であって$\partial N = M_- \cup M_+$ で $M_\pm$は単連結かつ $H_*(M_-;\mathbf{Z}) \to H_*(N;\mathbf{Z})$ が同型であるもののことであった.

4 次元単連結多様体の間の h 同境は次のように特徴付けられる.

定理 0.4.9（ウォール (Wall)–ミルナー (Milnor)）　M_-,M_+ を 4 次元単連結閉可微分多様体とする．M_- と M_+ の間に h 同境が存在するための必要十分条件は M_- と M_+ の交叉形式が同型なことである.

証明は省略する（[Ma],[Ki] 参照）．したがってもし定理 0.2.6 が 4 次元でも成り立つとすれば，4 次元単連結可微分多様体の分類はたとえば予想 0.4.8 に帰着することになる．しかしながらそう簡単ではない．つまり定理 0.2.6 は 4 次元では成立しない．§0.2 で少し述べた h 同境定理の証明の中で問題になるのは定理 0.2.4 である．ここでは次元が 5 以上とされていた．なぜ 5 かを説明するために定理 0.2.4 の証明についてほんの少し述べてみよう.

N,X_1,X_2 を定理 0.2.4 のとおりとしよう．$p_1, p_2 \in X_1 \cap X_2$ とし，この 2 点で X_1 と X_2 は横断的に交わりまた交点数 $[X_1]\cdot[X_2]$ への寄与は p_1 が $+1$, p_2

が −1 とする．このとき X_1 をアイソトピーで動かしてこの 2 点をキャンセルできる．というのが証明の中核である（図 0.2.6 参照）．

さてまず p_1 と p_2 を X_1 で結んだ道を ℓ_1, X_2 で結んだ道を ℓ_2 とし，$\ell = \ell_1 \cup -\ell_2$ なる閉曲線を考える．N は単連結だったからこの曲線は 0 ホモトピックでしたがって $i : D^2 \to N$ なる写像で境界への制限が $\ell = \ell_1 \cup -\ell_2$ になるものがある．ここで次の定理を思い出す．([田村 2] 参照.)

定理 0.4.10（ホワイトヘッド (Whitehead)） $f : L \to N$ を C^∞ 級多様体の間の C^∞ 級写像とする．$2 \dim L + 1 \leq \dim N$ ならば f は C^∞ 級埋め込みでいくらでも近似できる．

さてこれを $i : D^2 \to N$ に適用しよう．次元の条件は $2 \cdot 2 + 1 \leq \dim N$ つまり $5 \leq \dim N$ である（これが 5 の由来である）．すると $i : D^2 \to N$ は埋め込みとすることができる．

この後はあまり述べないが埋め込まれた円盤の近くだけを見て（ここでは状況が具体的にわかる）X_1 を変形し p_1 と p_2 をキャンセルできる．詳しい証明は前にあげたミルナーの本 [Mi2] にのっている．以上の議論をホイットニーのトリックという．

4 次元に戻ろう．次のことが示されている（[Ma],[Ki] 参照）．

定理 0.4.11（ウォール） M_-,M_+ を 4 次元単連結閉可微分多様体とし M_- と M_+ の交叉形式が同型であるとする．このとき十分大きい k に対して $M_- \# k(S^2 \times S^2)$ と $M_+ \# k(S^2 \times S^2)$ は可微分同相である（ここで#は連結和を表す）．

この定理を見ると最初は単連結 4 次元多様体の可微分同相類は交叉形式ぐらいで決まるのではないかという気になってくる．しかし後にみるように交叉形式が一致し可微分同相でない多様体は無限個存在する．したがって可微分同相は $S^2 \times S^2$ との連結和をとるという操作で安定でないことになる．微分同相というのが相当微妙なものであることが見えるであろう．

2 次形式と同相類の関係についてもう一つ次の定理を述べておこう（[FT]）.

定理 0.4.12（フリードマン (M.Freedman)–テイラー (Taylor)） M を単連結 4 次元多様体とする．整数係数ユニモジュラー 2 次形式 $(V_1, Q_1), (V_2, Q_2)$ が存在し $(H_2(M; \mathbf{Z}), Q) \cong (V_1, Q_1) \oplus (V_2, Q_2)$ であるとする．このときホモロジー 3 球面 $N \subset M$ が存在し，$M - N = M_1 \cup M_2$ かつ $(H_2(M_1; \mathbf{Z}), Q) \cong (V_1, Q_1)$, $(H_2(M_2; \mathbf{Z}), Q) \cong (V_2, Q_2)$ が成り立つ.

（ここで Q は交叉形式．ホモロジー 3 球面とは 3 次元球面とホモロジーが同型な 3 次元多様体のことで，ホモロジー 3 球面を境界に持つコンパクト向き付け可能な 4 次元多様体の交叉形式はユニモジュラーである.）

さて定理 0.2.4 がどの程度 4 次元で成立するかに話を戻そう．§0.2 では述べなかったがこの定理の証明で $X_1 = X_2$の場合を考えると次のことがわかる.

定理 0.4.13（ホイットニー） $i : X \to N$ をはめ込み (immersion) とし $2 \dim X = \dim N$ とする．N が単連結でその次元が 5 以上ならば i をアイソトピーで動かして埋め込みにすることができる.（ここで i がはめ込みとは，そのヤコビ行列がいたるところ単射であることを指した.）

定理 0.4.10 と比べていただきたい．定理 0.4.10 と違って i を埋め込みで**近似する**ことはできない．4 次元の場合に定理 0.4.13 がどうなるのかについては多くの研究があり，現在でも（おもにゲージ理論を用いて）盛んに研究されている.

たとえば $S^2 \times S^2$ の場合を考える．$S^2 \times S^2$ は単連結だからフレビッツ (Hurewicz) の定理（§1.3 参照）によりどのホモロジー類も S^2 からの写像で実現できる．次元の勘定（と一般の位置の議論）からこの写像ははめ込みであるとすることができる．ではいつ埋め込みで実現できるであろうか．ケルヴェア (Kervair) とミルナーは 1960 年代に次のことを示していた.

定理 0.4.14 $(p, q) = p[S^2 \times point] + q[point \times S^2] \in H_2(S^2 \times S^2; \mathbf{Z})$ なる元

に対して

(1) 任意の p,q に対して**連続な**埋め込み $i : S^2 \to S^2 \times S^2$ が存在して $i_*[S^2] = (p,q)$.

(2) $(p,q) = (2,2)$ に対して，$i_*[S^2] = (p,q)$ であるような**微分可能な**埋め込みは存在しない.

この定理の (2) は最善の結果ではなく，これを最善にすることは長らく懸案であり多くの人の仕事があったが，ドナルドソンのゲージ理論に基づく定理 2.4.12 がでた直後それを用いて久我健一 [久我] により次のように解決された.

定理 0.4.15（久我） $i_*[S^2] = (p,q)$ であるような微分可能な埋め込みが存在するための必要十分条件は p,q の少なくとも一方が 0 または 1 であることである.

S^2 の埋め込みについては他の多様体（$\mathbf{C}P^2$ など）についても研究が進み解決されつつある.

S^2 以外の曲面（種数 (genus) が 1 以上の曲面）についての研究がクロンハイマー (Kronheimer) らによりゲージ理論にもとづき盛んに進められている.

$M = \mathbf{C}P^2$ の場合を考えよう．この中のホモロジー類 $k \in \mathbf{Z} = H_2(\mathbf{C}P^2;\mathbf{Z})$ を考える．これを実現する曲面として一番自然なのは k 次方程式の解集合

$$\Sigma = \{[z_1, z_2, z_3] \mid P(z_1, z_2, z_3) = 0\}$$

であろう．ここで $P(z_1, z_2, z_3)$ は斉 k 次式で，(Σ に特異点がないくらいに) generic とする．$[z_1, z_2, z_3]$ は $\mathbf{C}P^2$ の斉次座標 (homogeneous coordinate) を表す.（つまり $\mathbf{C}P^2 = (\mathbf{C}^3 - 0)/(\mathbf{C} - 0)$ とみて $[z_1, z_2, z_3]$ は (z_1, z_2, z_3) の同値類.）

このとき Σ の種数 g は $g = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$ をみたすことが知られている（証明はチャーン類を計算すればできる）．次の事実はトム予想と呼ばれる.

定理 0.4.16　$k \in \mathbf{Z} = H_2(\mathbf{C}P^2; \mathbf{Z})$ とし $i : \Sigma \to \mathbf{C}P^2$ が $i_*[\Sigma] = k > 0$ であるような微分可能な埋め込みとするとΣ の種数 g は$\frac{(k-1)(k-2)}{2}$ 以上である.

定理 0.4.15 はモノポール方程式にもとづき最近証明されたものである.(クロンハイマー–ミュロフカ (Mrowka)[KM], モーガン (Morgan)–サボー (Sabaut)–タウベスらによる.) $\mathbf{C}P^2$ 以外の代数曲面 (この場合曲面とは複素 2 次元の意味だから実 4 次元多様体) について同様な問題がありこれは様々な場合にクロンハイマー–ミュロフカらによって (ヤン–ミルズ方程式を用いて) 解かれていた. これに対してもモノポール方程式によってより強い結果が得られている.

さてドナルドソン以前を述べるはずだったが, いつのまにかゲージ理論を使っていま盛んに研究されている問題の話になってしまった. ここで話題を少し転じてゲージ理論と並ぶ 80 年代の位相幾何学の主要な成果であるフリードマンによる 4 次元位相多様体の研究について簡単に述べることにしよう.

V　4 次元位相多様体の分類

4 次元微分可能多様体の研究はまだ未完成で解くべき問題は多いが, 位相多様体を考えるとその主要問題は 80 年代に解決されたと言っていいであろう. そのために使われたのはワイルドトポロジーといわれる手法であった. ここではこれには触れず単に結果だけ述べることにする. これらについての書物として [FQ] がある. まず

定理 0.4.17 (フリードマン)　N は 5 次元境界付き単連結位相多様体であって$\partial N = M_- \cup M_+$ でかつ $H_*(M_-; \mathbf{Z}) \to H_*(N; \mathbf{Z})$ が同型でまた $M_\pm$ も単連結とする.

このとき N は $M_- \times [0, 1]$ に同相である.

これは定理 0.2.6 で次元を 4 にして可微分同相を同相で置き換えたものである. これを使うと 4 次元ポアンカレ予想,

S^4 にホモトピー同値な 4 次元多様体は S^4 に同相である．

が示される．これがフリードマンの有名な仕事であるが，フリードマンらはさらに進んで次のことを示している．

定理 0.4.18（フリードマン–クイン (Quinn)） 任意のユニモジュラー 2 次形式に対して，それを交叉形式として持つ単連結 4 次元位相多様体が存在する．

単連結 4 次元位相多様体 X に対してカービー (Kirby)–ジーベンマン (Siebenmann) 類という $H^4(X;\mathbf{Z}_2)=\{0,1\}$ の元が決まる．これを $ks(X)$ と書く．これは位相不変量である．

$ks(X)$ と交叉形式で単連結 4 次元位相多様体は同相を除いて決まる．

$ks(X)$ が 0 であることと $X\times S^1$ が可微分構造を持つことは同値である．

交叉形式が I 型であるとき，与えられた交叉形式に対して二つの位相多様体が存在し，それは $ks(X)$ の値が 0 と 1 の場合にあたる．

交叉形式が II 型であると，$ks(X)$ の値は交叉形式の符合数の 1/8 である．特に交叉形式が II 型である単連結位相多様体は交叉形式だけで同相を除いて一意に決まる．

単連結でない場合にはまだ問題が残っているようであるが，位相多様体に対しては主要問題はこれで解かれたといってよいであろう．

VI 複素曲面 1 — 爆発 —

複素曲面（実 4 次元多様体である）について述べよう．代数曲面あるいは複素曲面の分類は今世紀初頭のイタリア学派の仕事をもとに小平邦彦が発展させたものである．まず複素多様体 (complex manifold) を定義しよう．

定義 0.4.19 可微分多様体 X が複素多様体であるとは，座標系 $\bigcup U_i = X$, $\varphi_i : U_i \to \mathbf{R}^{2n}$ で座標変換 $\varphi_i\varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i\cap U_j) \to \varphi_i(U_i\cap U_j)$ が $\mathbf{R}^{2n}=\mathbf{C}^n$ の開集合から開集合への写像とみて正則写像 (holomorphic map) であるときを

いう．

2 次元複素多様体のことを複素曲面 (complex surface) という．複素多様体の研究で重要な構成に爆発 (blow up) と呼ばれるものがある．これは 4 次元多様体の位相幾何でも重要な役割を果たすので，まずこれから述べよう．爆発とは複素多様体とその複素部分多様体の組に対して定義できる．ここでは複素曲面とその上の有限個の点の組に対してだけ定義する．

2 次元複素平面 $\mathbf{C}^2$ を考えその上の点 $(0,0)=\vec{0}$ をとろう．直積 $\mathbf{C}^2\times\mathbf{C}P^1$ を考える．(1 次元射影空間 $\mathbf{C}P^1$ とは $\mathbf{C}^2$ の 1 次元複素部分空間全体の集合に複素多様体の構造を与えたもので，リーマン球面 $S^2=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ と複素多様体として同型であった.) 埋め込み $I:\mathbf{C}^2-\{\vec{0}\}\to\mathbf{C}^2\times\mathbf{C}P^1$ を $I(z)=(z,[z])$ で定義する．ここで $[z]$ とは $z\in\mathbf{C}^2-\{\vec{0}\}$ を含むただ一つの 1 次元複素部分空間が表す $\mathbf{C}P^1$ の元である．

定義 0.4.20　$I:\mathbf{C}^2-\{\vec{0}\}\to\mathbf{C}^2\times\mathbf{C}P^1$ の像の閉包 $\widehat{\mathbf{C}}^2$ を $\mathbf{C}^2$ の $\vec{0}$ での爆発と呼ぶ．

射影 $p:\mathbf{C}^2\times\mathbf{C}P^1\to\mathbf{C}P^1$ の $\widehat{\mathbf{C}}^2$ への制限をまた $p:\widehat{\mathbf{C}}^2\to\mathbf{C}P^1$ と書く．$\pi:\mathbf{C}^2\times\mathbf{C}P^1\to\mathbf{C}^2$ の制限を $\pi:\widehat{\mathbf{C}}^2\to\mathbf{C}^2$ と書く．作り方から $\pi:\widehat{\mathbf{C}}^2\to\mathbf{C}^2$ の $\pi^{-1}(\mathbf{C}^2-\{\vec{0}\})$ への制限は可微分同相写像である．

補題 0.4.21　$\widehat{\mathbf{C}}^2$ は複素多様体である．

証明　まず $\mathbf{C}P^1=U_1\cup U_2$ とおく．ここで $U_1=\{[1,z]\mid z\in\mathbf{C}\}$, $U_2=\{[z,1]\mid z\in\mathbf{C}\}$ である．$p\circ I:\mathbf{C}^2-\{\vec{0}\}\to\mathbf{C}^2\times\mathbf{C}P^1\to\mathbf{C}P^1$ を考えよう．$(p\circ I)^{-1}([1,z])=\{(a,za)\mid a\in\mathbf{C}-\{0\}\}\cong\mathbf{C}-\{0\}$ であるから，容易にわかるように $(p\circ I)^{-1}(U_1)\cong U_1\times\mathbf{C}$．同様に $(p\circ I)^{-1}(U_2)\cong U_2\times\mathbf{C}$．この二つが座標系にとれる．座標変換は $(z,a)\in U_1\times\mathbf{C}$ を $(1/z,za)\in U_2\times\mathbf{C}$ に移す写像である．($[1,z]=[1/z,1]\in U_1\cap U_2$ で $(a,za)=(az/z,za)$ に注意.) よってこれは正則写像である．したがって $U_1\times\mathbf{C}\cong\mathbf{C}^2$ と $U_2\times\mathbf{C}\cong\mathbf{C}^2$ をこの写

像ではり合わせたものとみなせば，$\widehat{\mathbf{C}}^2$ は複素多様体である． 証明終わり

さて一般に X を複素曲面，$p_1,\cdots,p_k \in X$ としよう．p_i の近傍を W_i とし $(W_i,p_i) \cong (V_i,\vec{0})$ なる複素同型を選んでおく．(以後この二つは同一視する．V_i は $\mathbf{C}^2$での$\vec{0}$ の近傍．) $W_i\,(i=1,\cdots,k)$ はお互いに交わらないものとする．このとき $X-\{p_1,\cdots,p_k\}$ と$\pi^{-1}(W_i) \subseteq \widehat{\mathbf{C}}^2$ $(i=1,\cdots,k)$ を$\pi^{-1}(W_i-p_i) \cong W_i-\{\vec{0}\} \subseteq \mathbf{C}^2$ ではり合わせて得られる多様体を X の $p_1,\cdots,p_k$ での爆発と呼ぶ．爆発が座標 W_i の取り方によらないことの証明は省略する．

作り方より $\pi:\widehat{X}\to X$ が定まり，$\pi^{-1}(X-\{p_1,\cdots,p_k\})$ への制限は同型である．また $\pi^{-1}(\vec{0}) \cong \mathbf{C}P^1$ より$\pi^{-1}(p_i) \cong \mathbf{C}P^1$．

爆発で位相がどうなるかを述べよう．$\mathbf{C}P^2$の向きをかえたものを$\overline{\mathbf{C}P^2}$と書く．

補題 0.4.22 X の $p_1,\cdots,p_k$ での爆発を$\widehat{X}$ と書くと$\widehat{X}$ は X と k 個の$\overline{\mathbf{C}P^2}$の連結和 $X\#k\overline{\mathbf{C}P^2}$ に可微分同相である．

証明 まず $\widehat{\mathbf{C}}^2$ が$\overline{\mathbf{C}P^2}$ から一点を除いたものと可微分同相であることを証明しよう．$\mathbf{C}P^2$ は $\mathbf{C}^3$ の中の 1 次元複素線形部分空間全体であった．$(z_1,z_2,z_3) \in \mathbf{C}^3-\{(0,0,0)\}$ に対して，$[z_1,z_2,z_3] \in \mathbf{C}P^2$ をその点を含む 1 次元複素線形部分空間の表す $\mathbf{C}P^2$ の元とする．$\mathbf{C}P^2-\{[1,0,0]\}$ から$\widehat{\mathbf{C}}^2$ への向きをひっくり返す可微分同相写像を作ろう．

$\{[1,z_2,z_3] \mid (z_2,z_3)\neq(0,0)\} \subseteq \mathbf{C}P^2-\{[1,0,0]\}$ の元に対しては

$$\varphi([1,z_2,z_3]) = \left(\left(\frac{z_2}{|z_2|^2+|z_3|^2},\frac{z_3}{|z_2|^2+|z_3|^2}\right),[z_2,z_3]\right) \in \mathbf{C}^2\times\mathbf{C}P^1$$

とおく．右辺は $I:\mathbf{C}^2-\{\vec{0}\}\to\mathbf{C}^2\times\mathbf{C}P^1$ の像に含まれる．$\{[0,z_2,z_3] \mid (z_2,z_3)\neq(0,0)\} \subseteq \mathbf{C}P^2-\{[1,0,0]\}$ に対しては

$$\varphi([0,z_2,z_3]) = ((0,0),[z_2,z_3]) \in \mathbf{C}^2\times\mathbf{C}P^1$$

とおく．これらは $\varphi:\mathbf{C}P^2-\{[1,0,0]\}\to\mathbf{C}^2\times\mathbf{C}P^1$ なる C^∞ 級写像を定める．したがって$\varphi:\mathbf{C}P^2-\{[1,0,0]\}\to\widehat{\mathbf{C}}^2$ なる C^∞ 級写像が定まる．これが可微分同相写像で向きをひっくり返すことは容易に確かめられる．

さていま示したことから，$\pi^{-1}(D^2) \subseteq \widehat{\mathbf{C}}^2$ が $\overline{\mathbf{C}P^2}$ から複素 2 次元の円盤 D^2 を除いたものと可微分同相であることがわかる．したがって爆発の定義の U_i として複素 2 次元の円盤をとれば，$\pi^{-1}(U_i) \subseteq \widehat{\mathbf{C}}^2$ も $\overline{\mathbf{C}P^2}$ から複素 2 次元の円盤 D^2 を除いたものと可微分同相である．また $X - U_i$ は X から k 個の複素 2 次元の円盤 D^2 を除いたものと可微分同相である．したがって連結和の定義より $\widehat{X}$ は X と k 個の $\overline{\mathbf{C}P^2}$ の連結和と可微分同相である．

証明終わり

$H^2(\overline{\mathbf{C}P^2};\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ で，この生成元は $\mathbf{C}P^1 \subseteq \mathbf{C}P^2$ で表される．上で述べた $\widehat{\mathbf{C}}^2 \cong (\overline{\mathbf{C}P^2}) - 1$ 点の証明よりこれは $\pi^{-1}(0)$ に同一視される．よってマイヤー–ヴィエトリスの完全系列より

$$H^i(\widehat{X};\mathbf{Z}) = \begin{cases} H^i(X;\mathbf{Z}) & i \neq 2 \\ H^i(X;\mathbf{Z}) \oplus \mathbf{Z}^k & i = 2 \end{cases}$$

また $\overline{\mathbf{C}P^2}$ 上で $H^2(\overline{\mathbf{C}P^2};\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ の生成元の自己交点数は -1 だから，$H^2(\widehat{X};\mathbf{Z})$ と $H^2(X;\mathbf{Z})$ の交叉形式を比べると

$$H^2(\widehat{X};\mathbf{Z}) = H^2(X;\mathbf{Z}) \oplus kI_-$$

である．

複素曲面 X の複素部分多様体 V で $\mathbf{C}P^1$ と同型かつ $V \cdot V = -1$ なるものを例外曲線 (exceptional curve) という．今までの議論より $\widehat{X}$ には k 本の例外曲線が存在する．実はこの逆が成り立つ．

定理 0.4.23　複素曲面 Y に例外曲線 V が存在すれば複素曲面 X と $p \in X$ が存在し Y は X の p での爆発 $\widehat{X}$ と複素同型で $V = \pi^{-1}(p)$．

証明は別に難しくないが本書は代数幾何に深入りしたくないので書かない([BPV] III 参照)．

他の多様体の爆発になっていない複素曲面を極小 (minimal) という．定理 0.4.23 によって極小であることと例外曲線を含まないことは同値である．

ここで双有理 (birational) 同値についてちょっとだけ触れよう．二つの複素曲面 X,Y が双有理同値とは X のある何回かの爆発と Y のある何回かの爆発が複素同型であることをいう．

双有理同値はもっと一般的な概念で元々の定義は上で書いたのと異なるが，複素曲面に対しては上のようにいってしまってかまわない．

定理 0.4.24 複素曲面 X に対して X と双有理同値な極小複素多様体 Y が存在する．X が $\mathbf{C}P^2$ と双有理同値でなければ Y は一意である．

定理の証明はしない．この Y のことを極小モデル (minimal model) という．$\mathbf{C}P^2$ と $\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^1$ は双有理同値であるが両方とも極小であるので，一意性のために書いた条件は必要である．

複素曲面を分類するとき定理により極小なものだけを分類すれば十分である．

定理 0.4.24 を定理 0.4.11 と比べてみて欲しい．定理 0.4.11 のところで触れたように $X_1\#k(S^2 \times S^2)$ と $X_2\#k(S^2 \times S^2)$ が可微分同相でも X_1 と X_2 が可微分同相かはわからない．定理 0.4.24 によれば X_1 と X_2 が極小で X_1 の k 点の爆発と X_2 の k 点の爆発が複素多様体として同型ならば（例外を除いて）X_1 と X_2 は同型になる．このことから極小でない場合でも X_1 と X_2 がホモトピー同値で X_1 の k 点の爆発と X_2 の k 点の爆発が複素多様体として同型ならば X_1 と X_2 は可微分同相であることはわかる．

この二つの状況の差は，$S^2 \times S^2$ の交叉形式が不定値で $\overline{\mathbf{C}P^2}$ の交叉形式が定値（負定値）であることである．後に述べるようなゲージ理論に基づく 4 次元多様体の可微分同相類の不変量は，不定値の交叉形式を持つ 4 次元多様体と連結和をとると消えてしまうが，定値の交叉形式を持つ 4 次元多様体との連結和では生き残る．

ここまで爆発は特異点のない曲面についてだけ考えてきたが，特異点のある場合も同様な操作が存在する．実は $K3$ 曲面を作るときに使った操作も爆発に他ならない．すなわちそこでは $T^4/\mathbf{Z}_2$ なる特異点のある空間を考え，この 16 個の特異点のまわりで空間を少し変えて $K3$ 曲面を構成した．

この最後の操作をもう少し一般的にみてみよう．この操作は局所的であるから，次の状況から出発してよい．$\mathbf{C}^2$ の開集合 $D^2_{\mathbf{C}} = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$ を考えよう．$U(2)$（内積を保つ複素線形写像全体）は $D^2_{\mathbf{C}}$ の上に（線形変換として）作用する．Γ を $U(2)$ の有限部分群とする．（$K3$ 曲面の構成で使ったのは $\Gamma = \mathbf{Z}_2$ の場合である.）$U(2)$ （したがって Γ）は $\mathbf{C}P^1$ 上にも作用する．これから Γ の $D^2_{\mathbf{C}} \times \mathbf{C}P^1$ の作用を考えよう．爆発の定義で使った写像 $I : D^2_{\mathbf{C}} - \{\vec{0}\} \to D^2_{\mathbf{C}} \times \mathbf{C}P^1$ は Γ の作用で保たれる．したがって $\overline{I} : D^2_{\mathbf{C}} - \{\vec{0}\}/\Gamma \to D^2_{\mathbf{C}} \times \mathbf{C}P^1/\Gamma$ が導かれる．この像の閉包を考える．これは $\widehat{D}^2_{\mathbf{C}}/\Gamma$ である.（ここで $\widehat{D}^2_{\mathbf{C}}/\Gamma$ は$\widehat{\mathbf{C}}^2 \to \mathbf{C}^2$ による $D^2_{\mathbf{C}}$ の逆像である.）$\widehat{D}^2_{\mathbf{C}}/\Gamma$ は多様体である．それを示すには Γ の $\widehat{D}^2_{\mathbf{C}}$ への作用が不動点を持たないことを言えば十分である．これは $U(2)$ の $\mathbf{C}P^1$ への作用が不動点を持たないことから直ちにわかる．

さて X を 2 次元複素空間でその特異点はすべて局所的には $D^2_{\mathbf{C}}/\Gamma$ の形で表されているとする.（特異点のある場合の複素空間の定義はしない．とりあえず $T^4/\mathbf{Z}_2$ だけを考えてもよい.）このとき，おのおのの $D^2_{\mathbf{C}}/\Gamma$ を$\widehat{D}^2_{\mathbf{C}}/\Gamma$ で置き換えることで複素曲面（特異点のない）ができる．この操作も爆発という.（より一般の特異点も爆発させることができるがここではそれは述べない.）$K3$ 曲面は $T^4/\mathbf{Z}_2$ の 16 個の特異点をすべて爆発させたものにあたる．このことの証明は省略する．

一般に特異点のある空間があったときその特異点を爆発させて非特異なものを作る操作を特異点解消 (resolution of singularity) という.（一般には特異点は孤立点とは限らないから爆発の概念ももっと一般化する必要がある.）任意の 2 次元複素空間で特異点解消ができることはザリスキ (Zariski) が証明した．高次元の場合には広中平祐によって証明された.（標数 0 の代数多様体に対して．標数が正の場合は未解決である.）

VII　複素曲面 2　── 多重標準写像と小平次元 ──

これから複素曲面を有理曲面，$K3$ 曲面，楕円曲面，一般型曲面の順に少しだけ解説したい．これらは勝手に並べたわけではなくてこう並べるのは理由が

ある．それを説明するために多重標準写像と小平次元について述べよう．

まず（複素）1 次元の場合すなわち代数曲線（リーマン面）の場合を思い出そう．リーマン面 Σ には粗く言って 3 種類ある．すなわちリーマン球面，トーラス，そして穴の数（種数）が 2 個以上のリーマン面である．この 3 通りに分けるのが便利なことにはいろいろな理由付けがあるが，一つの言い方は曲率でみることである．すなわち第一の場合（リーマン球面）は曲率が正，トーラスは 0，それ以外は負になる．

別の言い方は（多重）標準写像を考えるものである．標準写像をリーマン面の場合に定義してみよう．Σ をリーマン面とし，$\Sigma = \cup_{i=1}^{k} U_i$ を座標近傍系とする．Σ 上の正則微分 1 型式 (holomorphic one form) の全体 $H^0(\Sigma; K_\Sigma)$ を考える．(記号 $H^0(\Sigma; K_\Sigma)$ は層係数コホモロジーの記号でちゃんと意味があるのだが，ここではそれは解説しないので単なる記号と思って頂きたい.) ここで正則微分 1 型式とは次のようなものである．$z_i : U_i \to \mathbf{C}$ を U_i 上の座標関数とする．このとき $H^0(\Sigma; K_\Sigma)$ の元とは $(\varphi_1, \cdots, \varphi_k)$ なる正則写像 $\varphi_i : U_i \to \mathbf{C}$ の組で $U_i \cap U_j$ 上$\varphi_i = \frac{\partial z_j}{\partial z_i}\varphi_j$ を満たすものを指す．言い換えると$\varphi_i dz_i$ なる微分型式のことである.(ここで $z = x + \sqrt{-1}y$ とおいて $dz = dx + \sqrt{-1}dy$ である.)（これは正則 1 型式の作る複素線束 K_Σ の正則な切断全体といってもよい．ベクトル束上の複素構造を定義していなかったから上のように述べた.)

$H^0(\Sigma; K_\Sigma)$ はベクトル空間だからこの基底を $s_1, \cdots, s_N$ としよう．これを使って $\Sigma \to \mathbf{C}P^{N-1}$ なる「写像」を次のようにして定義する．

$p \in U_i$ とする．U_i 上 s_j は $\varphi_{j,i} dz_i$ と表せるとしよう．ここで $s_1(p) = \cdots = s_N(p) = 0$ ではないとしよう．すると必要なら U_i を小さくとり直してどの $q \in U_i$ に対しても $s_1(q) = \cdots = s_N(q) = 0$ とはなっていないとしてよい．$I(q) = [\varphi_{1,i}(q), \cdots, \varphi_{N,i}(q)] \in \mathbf{C}P^{N-1}$ とおこう．ここで $[\varphi_{1,i}(q), \cdots, \varphi_{N,i}(q)]$ とは $(\varphi_{1,i}(q), \cdots, \varphi_{N,i}(q)) \in \mathbf{C}^N - \{\vec{0}\}$ を含んでいる $\mathbf{C}^N$ の 1 次元部分線形空間の表す $\mathbf{C}P^{N-1}$ の元である．

$p \in U_i \cap U_j$ のとき $(\varphi_{1,i}(p), \cdots, \varphi_{N,i}(p))$ と $(\varphi_{1,j}(p), \cdots, \varphi_{N,j}(p)) = \frac{\partial z_i}{\partial z_j} \cdot (\varphi_{1,i}(p), \cdots, \varphi_{N,i}(p))$ は $\mathbf{C}P^{N-1}$ の同じ元を定める．したがってこれにより写像 $I : \Sigma - \Sigma_0 \to \mathbf{C}P^{N-1}$ が定まる．ここで Σ_0 は $s_1(p) = \cdots = s_k(p) = 0$ なる点 p 全体で basic locus という．この写像を標準写像 (canonical map) とい

う．(以上の構成は複素直線束を用いて射影空間への写像を構成する一般的なやり方を K_Σ に当てはめたものである．)

さて $\Sigma = S^2, T^2, \Sigma_g (g \geq 2)$ に対して $I : \Sigma - \Sigma_0 \to \mathbf{C}P^{N-1}$ を調べてみよう．(Σ_g は種数（穴の数）g のリーマン面を指す．)

まず $\Sigma = S^2$ であるがこのときは $H^0(S^2; K_{S^2}) = 0$ つまり正則な微分 1 型式はない．したがって $S^2 = S^2_0$ つまり全体が basic locus になってしまい，標準写像は定義できない．次に $\Sigma = T^2$ とおこう．このときは dz なるどこでも 0 にならない正則微分 1 型式がある．したがって $H^0(T^2; K_{T^2})$ の元は$\varphi(z)dz$ ($\varphi : T^2 \to \mathbf{C}$ は正則写像）と書ける．コンパクト集合 T^2 上の正則写像 φ は定数であるから，結局 $H^0(T^2; K_{T^2})$ の任意の元は dz の定数倍である．つまり $\dim H^0(T^2; K_{T^2}) = 1$．したがって標準写像の行き先は $\mathbf{C}P^0$ つまり 1 点である．よって標準写像は退化してしまう．以上の二つの場合には標準写像はあまり役に立たない．

次に，$\Sigma = \Sigma_g, g \geq 2$ としよう．このとき $H^0(\Sigma; K_\Sigma) = \mathbf{C}^g$ がわかる．このことはきちんとは示さないが大体次のように証明する．

$\Sigma = \Sigma_g$ 上の複素係数調和 1 型式は $u + \bar{v}$ （ここで u, v は正則 1 型式で $\bar{v}$ は v の複素共役）と一意に書けることが知られている．すなわち $\mathcal{H}^1(\Sigma) = H^0(\Sigma; K_\Sigma) \oplus \overline{H^0(\Sigma; K_\Sigma)}$．(これはホッジ分解とよばれるもの（ここでは解説しない）の一番易しい場合，つまり 1 次元の場合である．) よって $\mathrm{rank}_{\mathbf{C}} H^0(\Sigma; K_\Sigma) = \frac{1}{2}\mathrm{rank}_{\mathbf{C}} \mathcal{H}^1(\Sigma) = g$.

標準写像は $I : \Sigma_g \to \mathbf{C}P^{g-1}$ と表せる．この写像は退化しないこと，すなわちその像が（複素）1 次元であることが知られている．たとえば $g = 2$ とするとこの行き先はリーマン球面 $\mathbf{C}P^1$ である．こうすると種数 2 のリーマン面がリーマン球面上の分岐被覆として表される．

さて以上の構成を 2 次元でまねてみよう．この場合正則 1 型式の全体に対応するのは正則 2 型式である．(複素) 2 次元多様体の正則 2 型式とは局所的に正則関数 φ と座標 z^1, z^2 を使って$\varphi dz^1 \wedge dz^2$ と表せるもの全体である．(2 次元の場合は 2 型式の方が直線束をなす．) 言い換えると複素曲面 X が座標近傍に $X = \cup U_i$ と分解し U_i 上の座標が $z^1_{(i)}, z^2_{(i)}$ であるとき，正則 2 型式とは正則写

像$\varphi_i : U_i \to \mathbf{C}$ の組で

$$\varphi_i = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial z^1_{(j)}}{\partial z^1_{(i)}} & \frac{\partial z^1_{(j)}}{\partial z^2_{(i)}} \\ \frac{\partial z^2_{(j)}}{\partial z^1_{(i)}} & \frac{\partial z^2_{(j)}}{\partial z^2_{(i)}} \end{pmatrix} \varphi_j$$

なる関係式を満たすものである．X 上の正則 2 型式全体のことを $H^0(X;K_X)$ と書く．

これを一般化して $n \geq 0$ に対して $H^0(X;K_X^{\otimes n})$ を次のように定義する．$H^0(X;K_X^{\otimes n})$ の元とは正則写像 $\varphi_i : U_i \to \mathbf{C}$ の組で

$$\varphi_i = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial z^1_{(j)}}{\partial z^1_{(i)}} & \frac{\partial z^1_{(j)}}{\partial z^2_{(i)}} \\ \frac{\partial z^2_{(j)}}{\partial z^1_{(i)}} & \frac{\partial z^2_{(j)}}{\partial z^2_{(i)}} \end{pmatrix}^n \varphi_j$$

なる関係式を満たすものを指す．この概念が座標によらないことの証明は省略する．

$\dim H^0(X;K_X)$ を幾何学的種数 (geometric genus) p_g と呼び，$\dim H^0(X;K_X^{\otimes n})$ を多重種数 (plurigenus)P_n と呼ぶ．

さて $H^0(X;K_X^{\otimes n})$ の基底 $(s_1,\cdots,s_N)$ $(N = P_n)$ をとり写像 $I_n : X - X_0 \to \mathbf{C}P^{N-1}$ を前と同様に次のようにして定義する．s_j は U_i 上 φ_i^j で表されるとし $p \in U_i$ とすると $I_n(p) = [\varphi_1^i(p),\cdots,\varphi_N^i(p)]$．この写像のことを多重標準写像 (pluricanonical map) という．

I_n が定義されていない点の集まり X_0 は $X_0 = \{p \in X \mid \forall i\ s_i(p) = 0\}$ と表される．I_n の像 $I_n(X - X_0)$ は射影空間の部分空間であるが，この（複素）次元は十分大きい n に対しては n によらず一定になることが知られている．この空間の次元のことを小平次元 κ と呼ぶ．ただし $P_n \equiv 0$ のときは多重標準写像は定義域が空集合である．この場合は小平次元は $-\infty$ であるという．(小平次元は飯高茂によって導入された.)

幾何学的種数，多重種数，小平次元は双有理不変である．これは例外曲線に制限すると $H^0(X;K_X^{\otimes n})$ の元は 0 であることからわかる．(その大体の理由は $\mathbf{C}P^1$ 上正則 1 型式は 0 しかないことである.)

幾何学的種数について次のことが知られている（ホッジの指数定理（の系））．

定理 0.4.25　$\mathrm{rank}H^1(X;\mathbf{Q})$ が偶数ならば $b_2^+ = 2p_g + 1$ である．(b_2^+ は $H^2(X;\mathbf{Q})$ 上の交叉形式の正の固有値の数であった.)

一般に代数曲面がケーラー多様体ならば奇数次のベッチ (Betti) 数は偶数である．(本書ではケーラー多様体は定義しない．代数多様体はケーラー多様体である.) 以下では $\mathrm{rank}H^1(X;\mathbf{Q})$ が偶数である場合のみ考える．(おもに単連結，特に $\mathrm{rank}H^1(X;\mathbf{Q}) = 0$ の場合を考える.) この場合定理 0.4.25 より b_2^+ はいつも奇数である．

また同じ定理より幾何学的種数 p_g が多様体の（向きを保った）ホモトピー型だけで決まり多様体の微分構造にもまた複素構造にもよらないこともわかる．多重種数についてはそうではない．

VIII　複素曲面 3　— 有理曲面 —

2 次元射影空間 $\mathbf{C}P^2$ と双有理同値な複素曲面を有理曲面 (rational surface) と呼ぶ．これには $\mathbf{C}P^2$ で k 個の点を爆発させた曲面や $\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^1$ がある．

極小有理曲面の別の作り方を説明する．$S^2 = \mathbf{C}P^1$ の上の 2 次元複素解析的なベクトル束を E とする．$P(E)$ で $p \in \mathbf{C}P^1$ と E_p の 1 次元（複素）部分空間の組 (p, L) 全体を表す．$P(E)$ は複素多様体になり写像：$P(E) \to \mathbf{C}P^1$ が存在する．この写像はファイバー束（定義はもうちょっと先の楕円曲面の項でする，大体積のようなものと思ってよい）になり，1 点 p の逆像は $E_p = \mathbf{C}^2$ の 1 次元部分空間全体つまり $\mathbf{C}P^1 = S^2$ になる．この曲面は $S^2 \times S^2$ またはもう一つのねじれた積 $S^2 \tilde{\times} S^2$ と可微分同相でまた有理曲面になる．これをヒルツェブルフ曲面と呼ぶ．(どちらになるかは次に述べる n の偶奇による.)

ヒルツェブルフ曲面はベクトル束 E で決まるがこれを $E \otimes L$ でおき換えても同じ曲面ができる（ここで L は複素直線束）．$\mathbf{C}P^1$ 上のベクトル束はすべて直線束の直和になる（グロタンディク (Grothendieck) の定理）．また $\mathbf{C}P^1$ 上の直線束はそのチャーン類 $c^1 \in H^2(\mathbf{C}P^1) = \mathbf{Z}$ で決まる．(チャーン類の定義は §1.2 にある.) このことをあわせるとヒルツェブルフ曲面は $\Sigma_n = P(\mathbf{C} \oplus L_n)$ と書ける（L_n は $c^1 = n$ なる直線束）．これらはお互いに（複素多様体として）

同型でない．$\Sigma_0 = \mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^1$ （直積）である．

次のことが知られている．

定理 0.4.26 極小な有理曲面は $\mathbf{C}P^2$ とヒルツェブルフ曲面に限る．

可微分多様体の（可微分同相による）分類が球面の特徴付けすなわちポアンカレ予想から始まるのと同様に，代数曲面の分類では有理曲面の特徴付けが大切である．これについては次の定理がある．

定理 0.4.27 $H^1(X;\mathbf{Q}) = 0$, $P_2 = 0$ なる複素曲面は有理曲面である．

この定理をカステルヌオヴォ(Castelnuovo)の判定条件という．特に単連結で小平次元が$-\infty$ の曲面は有理曲面に限ることがわかる．$H^1(X;\mathbf{Q}) = 0$, $P_2 = 0$ はいずれも双有理不変な条件である．

$H^1(X;\mathbf{Q}) = 0$ なる条件は勿論位相的な条件であるが，$P_2 = 0$ はそうではない．そこでこの条件を位相不変にしたいという問題がある．その候補として一番最初に思いつくのが $p_g = 0$，言い換えると $b_2^+ = 1$ という条件である．$\mathbf{C}P^2$ の n 点での爆発の交叉形式は $I_+ \oplus nI_-$ であるからむろんこの条件は有理曲面では満たされる．それでは逆はどうであろうか．

実は逆は正しくない．その例にドルガチェフ (Dolgachëv) 曲面がある（以下単連結な場合のみ考える）．ドルガチェフ曲面は楕円曲面の項でもう少し述べるが，これは $b_2^- = 9, \kappa = 1$ である．$b_2^- = 9$ ゆえ，ドルガチェフ曲面は $\mathbf{C}P^2$ の 9 点での爆発とホモトピー同値である．したがってフリードマンの定理より $\mathbf{C}P^2$ の 9 点での爆発 $\mathbf{C}P^2\#9\overline{\mathbf{C}P^2}$ と同相である．一方ドナルドソン [D5] によってドルガチェフ曲面は $\mathbf{C}P^2\#9\overline{\mathbf{C}P^2}$ と可微分同相でないことが示されている．

またバーロー (Barlow) による構成もある．これは $b_2^- = 8, \kappa = 2$ である．再びフリードマンの定理よりバーロー曲面は $\mathbf{C}P^2\#8\overline{\mathbf{C}P^2}$ と同相である．コチック (Kotchik)[Ko] は（ゲージ理論を用いて）バーロー曲面が $\mathbf{C}P^2\#8\overline{\mathbf{C}P^2}$ と可微分同相でないことを示した．

もっと b_2^- が小さいときはどうであろうか．最初に考えるべき場合は $b_2^- = 0$

の場合つまり（フリードマンの定理を使うと）$\mathbf{C}P^2$ と同相な場合である．この場合にはヤウ (Yau) によって次のことが示されている．

定理 0.4.28　$\mathbf{C}P^2$ とホモトピー同値な複素曲面は $\mathbf{C}P^2$ と同型である．

次に $b_2^- = 1$ の場合を考えるとこれは有理曲面としてはヒルツェブルフ曲面または $\mathbf{C}P^2$ の 1 点での爆発がある．

予想 0.4.29　$S^2 \times S^2$ と同相な複素曲面はヒルツェブルフ曲面に限る．

$S^2 \times S^2$ と同相な曲面がヒルツェブルフ曲面でなければ$\kappa = 2$ であることが知られている．後で少しだけ述べるが，$\kappa = 2$ の曲面は一般型曲面と呼ばれていて，一般論はあるがまだわからないことが多い．

ゲージ理論を用いて $S^2 \times S^2$ と**可微分同相**な曲面はヒルツェブルフ曲面に限ることが示された．また小平次元が可微分同相で不変なこと（ファン・ドゥ・ヴェン (Van de Ven) 予想）も示された．これらはフリードマン (Friedman)–キン (Qin)，ピドゥストリッヒ (Pidstrigach)–チューリン (Tyurin)（[FQi],[PT]）らによる．

以上はヤン–ミルズ方程式に基づく研究であるが，モノポール方程式を用いることによりこのあたりのことは簡略化されたようである。

IX　複素曲面 4　— $K3$ 曲面 —

次に $\kappa = 0$ の曲面を考えよう．

命題 0.4.30　クンマー曲面 X に対して $P_n(X) = 1$ が成り立つ．

これを証明してみよう．それには次のことを示せばよい．

補題 0.4.31　X 上にはどこでも 0 にならない正則 2 型式が存在する．

0.4.31 ⇒ 0.4.30 の証明　$X=\bigcup U_i$ として，補題 0.4.31 でいう 2 型式が U_i 上 φ_i で表せたとする．$H^0(X;K_X^{\otimes n})$ の元が ψ_i で表せたとすると，定義式より $\frac{\psi_i}{\varphi_i^n}=\frac{\psi_j}{\varphi_j^n}$ が $U_i\cap U_j$ 上成立する．したがってこれらは X 上の正則関数を与える．X はコンパクトゆえこの上の正則関数は定数に限る．すなわち $\psi_i=c\varphi_i^n$．これから $\dim H^0(X;K_X^{\otimes n})=1$ は直ちに得られる．

補題 0.4.31 の証明　X は$\overline{X}=T^4/\mathbf{Z}_2$ を 16 個の特異点で爆発させたものであった．$\overline{X}$ から特異点を除いたものを$\overline{X}_{reg}$ と書こう．まずこの上にどこでも 0 にならない正則 2 型式を作ろう．これは実は易しい．すなわちまずトーラス $T^4=\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^4$ を考えると，この上には明らかにどこでも 0 にならない正則 2 型式がある．すなわち $\mathbf{C}^2$ 上の 2 型式 $dz_1\wedge dz_2$ は $\mathbf{Z}^4$ の作用で不変であるからトーラス上の 2 型式ができる．$\mathbf{Z}_2$ のトーラス上の作用は $(z_1,z_2)\mapsto(-z_1,-z_2)$ から導かれた．$dz_1\wedge dz_2$ はこの作用でも不変であるから$\overline{X}_{reg}$ 上のどこでも 0 にならない正則 2 型式が導かれる．

さてこの 2 型式を特異点の近傍で調べ，これが X の上のどこでも 0 にならない正則 2 型式に拡張されることをみよう．問題は局所的であるから各点の近傍で考えよう．$D^2_{\mathbf{C}}/\mathbf{Z}_2$ を考え，この空間の原点（特異点）で爆発させた空間を Z とおき，$\pi:Z\to D^2_{\mathbf{C}}/\mathbf{Z}_2$ を自然な射影としよう．

$D^2_{\mathbf{C}}/\mathbf{Z}_2$ の特異点の外で定義された正則 2 型式 $dz_1\wedge dz_2$ を考え，$\pi^*(dz_1\wedge dz_2)$ が Z 全体で定義されたどこでも 0 にならない 2 型式に拡張されることを示そう．それには群で割る前を考えれば十分である．すなわち $D^2_{\mathbf{C}}-\{\vec{0}\}$ 上の 2 型式 $dz_1\wedge dz_2$ をとり $\pi^*(dz_1\wedge dz_2)$ を考えると，これが $D^2_{\mathbf{C}}$ の原点での爆発 $\widehat{D}^2_{\mathbf{C}}$ のどこでも 0 にならない 2 型式に拡張されることを示せばよい．($dz_1\wedge dz_2$ が $\mathbf{Z}_2$ 不変ゆえその拡張も $\mathbf{Z}_2$ 不変．また $Z=D^2_{\mathbf{C}}/\mathbf{Z}_2$.)

これは直接計算すればよい．補題 0.4.21 の証明で使った座標で考えよう．すなわち $\widehat{D}^2_{\mathbf{C}}=U_1\cup U_2$.

$$U_1=\left\{((z_1,z_2),[1,z])\in D^2_{\mathbf{C}}\times\mathbf{C}P^1 \mid z_2=zz_1, z_1\neq 0\right\}$$

$$U_2=\left\{((z_1,z_2),[z,1])\in D^2_{\mathbf{C}}\times\mathbf{C}P^1 \mid z_1=z_2z, z_2\neq 0\right\}$$

である．z_1 と z を U_1 の座標としてとれる．このとき $dz_1 \wedge dz_2$ の引き戻しは $dz_1 \wedge (zdz_1 + z_1dz) = z_1dz_1 \wedge dz$, これは $z=0$ へも拡張され決して 0 にならない．U_2 でも同様である．これで補題 0.4.31 の証明が完成した．

証明終わり

補題 0.4.30 よりクンマー曲面は $\kappa = 0$ である．クンマー曲面の連続変形として得られる複素曲面を $K3$ 曲面とよぼう．(連続変形の定義はしない複素構造の変形理論の本たとえば [小平 1],[小平 4] をみよ.）小平次元は連続変形不変であることが知られているので $K3$ 曲面はすべて $\kappa = 0$ を満たす．

他に $\kappa = 0$ である曲面はあるだろうか．単連結を仮定しなければ 4 次元トーラス T^4 がそれにあたる．また 2 重被覆が $K3$ 曲面である $\kappa = 0$ であるような曲面，エンリケス (Enriques) 曲面というのも知られている．まだ幾つかあるがここではそれを並べあげるのはやめて次のことを述べておく．

定理 0.4.32 単連結で $\kappa = 0$ である曲面は $K3$ 曲面に限る．

小平は論文 [小平 5] の中で $K3$ 曲面とホモトピー同値な複素曲面を分類した．これには $K3$ 曲面以外の楕円曲面（次項で述べる）がある．小平はこれをみてこれらのホモトピー $K3$ 曲面が $K3$ 曲面と同相か可微分同相かどうかを問題として提出した．フリードマンの定理によればこれらはすべて $K3$ 曲面と同相である．一方ゲージ理論によりホモトピー $K3$ 曲面は $K3$ 曲面と可微分同相とは限らないことが示されている．これについては第 5 章で論ずる．

X 複素曲面 5 — 楕円曲面 —

楕円曲面とはファイバー (fiber) がトーラスである（特異な）ファイバー束のようなものである．まず普通のファイバー束 (fiber bundle) の定義を思い出し，それから楕円曲面を定義しよう．

定義 0.4.33 可微分多様体の間の C^∞ 級の写像 $\pi : E \to B$ が可微分多様体 F

をファイバーとするファイバー束であるとは，任意の点 $p \in B$ に対してその近傍 U_p と可微分同相$\pi^{-1}(U_p) \to U_p \times F$ が存在することをいう．

本書ではファイバー束の一種であるベクトル束については詳しく述べるが，ファイバー束についてはあまり触れない．ファイバー束 $\pi : E \to B$ の一番単純な例は直積 $B \times F \to B$ である．一般にはファイバー束は直積ではない．定義が言っているのは局所的には直積であるということである．

ファイバー束 $E \to B$ の大事な性質は 1 点の逆像 $\pi^{-1}(p)$ が点 p によらない (すなわち F に一致する) ことである．本項で述べる楕円曲面ではこの逆像は，ほとんどすべての点 p に対しては 2 次元トーラス T^2 であるが，有限個の点ではこれとは違ったものになる．(したがって楕円曲面はファイバー束ではない．) もう少しきちんと定義しよう．

定義 0.4.34 複素曲面 X が楕円曲面 (elliptic surface) であるとは，リーマン面 Σ と正則写像 $\pi : X \to \Sigma$ が存在して次の性質を満たすことをいう．有限個の点の集合 $\{p_1, \cdots, p_N\} \in \Sigma$ があって，制限 $\pi^{-1}(\Sigma - \{p_1, \cdots, p_N\}) \to \Sigma - \{p_1, \cdots, p_N\}$ はファイバー束でそのファイバーは T^2 と可微分同相である．

注意 上の定義で $\pi^{-1}(\Sigma - \{p_1, \cdots, p_N\}) \to \Sigma - \{p_1, \cdots, p_N\}$ は複素多様体の意味でのファイバー束とは仮定されていない．つまり定義 0.4.34 中の可微分同相は複素多様体の同型でなくてもよい．したがって特にファイバーの位相（及び微分構造）は一定であるがその複素構造は一定であるとは限らない．

以後，集合 $\{p_1, \cdots, p_N\} \in \Sigma$ は定義 0.4.34 の性質が成り立つ中で最小にとっておく．このとき逆像 $\pi^{-1}(p_i)$ を特異ファイバー (singular fiber) といい，それ以外のファイバーを非特異ファイバー (regular fiber) と呼ぶ．

楕円曲面は小平邦彦によって導入され精力的に研究された．たとえば特異ファイバーの分類などが行われている．楕円曲面は複素曲面の例を多く与える．

楕円曲面の概念は松本幸夫によって可微分カテゴリーに一般化された．ここではそれには触れない．

楕円曲面の例を挙げよう．

例 0.4.35　クンマー曲面 X は楕円曲面である．これをみるには次のようにすればよい．まず作り方から $X \to T^4/\mathbf{Z}_2$ なる正則写像が存在する．また $T^4/\mathbf{Z}_2 \to T^2/\mathbf{Z}_2$ なる正則写像も明らかに存在する．ここで $T^2/\mathbf{Z}_2$ は 4 個の特異点を持つ $\mathbf{C}P^1$ である．したがって $T^4/\mathbf{Z}_2 \to \mathbf{C}P^1$ なる正則写像が存在する．$X \to T^4/\mathbf{Z}_2$ と $T^4/\mathbf{Z}_2 \to \mathbf{C}P^1$ の合成を $\pi : X \to \mathbf{C}P^1$ としよう．この写像が 4 点の外でファイバー束でそのファイバーが T^2 であることをみよう．まず $T^4/\mathbf{Z}_2$ には 16 個の特異点が存在し，その外では $X \to T^4/\mathbf{Z}_2$ は可微分同相であることを思い出そう．一方この 16 個の特異点はすべて $T^4/\mathbf{Z}_2 \to T^2/\mathbf{Z}_2$ で $T^2/\mathbf{Z}_2$ の 4 個の特異点に移る．したがって $\pi^{-1}(\mathbf{C}P^1 - 4\text{ 点}) \to \mathbf{C}P^1 - 4\text{ 点}$ は $T^4/\mathbf{Z}_2 \to T^2/\mathbf{Z}_2$ の $T^2/\mathbf{Z}_2$ から 4 個の特異点を除いた部分への制限と思ってよい．この写像がファイバー束でファイバーが T^2 であることは明らかである．

いま与えた楕円曲面の構造は generic なものではない．すなわち特異ファイバーが generic な場合より退化しすぎている．しかしここでの目的にはこれで十分なのでこの場合に限ることにしよう．

クンマー曲面が楕円曲面であることを述べたが，すべての $K3$ 曲面が楕円曲面であるわけではない．

例 0.4.36　$\mathbf{C}P^2$ のある 9 点での爆発 X は楕円曲面である．このことの略証を与えよう．まず 3 変数の斉次 3 次式を二つ generic にとり，$P(x_1, x_2, x_3)$,$Q(x_1, x_2, x_3)$ とおこう．集合 $\{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbf{C}P^2 \mid P(x_1, x_2, x_3) = Q(x_1, x_2, x_3) = 0\}$ は 9 個の点からなる．(ベズー (Bezout) の定理，代数幾何の書物を見よ.) この集合を $A \subseteq \mathbf{C}P^2$ とおこう．写像 $\mathbf{C}P^2 - A \to \mathbf{C}P^1$ が $[x_1, x_2, x_3]$ を $[P(x_1, x_2, x_3), Q(x_1, x_2, x_3)]$ に移すことで定義できる．

$\mathbf{C}P^2$ の A での爆発を X とおこう．$\mathbf{C}P^2 - A \to \mathbf{C}P^1$ は $\pi : X \to \mathbf{C}P^1$ に拡張される．このことの証明は省略する．(A の近傍で写像を局所座標で表してみればよい.) さて generic な点 $p \in \mathbf{C}P^1$ に対してその逆像 $\pi^{-1}(p)$ が T^2 であ

ることをみよう．逆像 $\pi^{-1}(p)$ はある $a \in \mathbf{C}$ を使って

$$\overline{\left\{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbf{C}P^2 - A \;\middle|\; \frac{P(x_1, x_2, x_3)}{Q(x_1, x_2, x_3)} = a\right\}}$$

と表せる．すなわち

$$\overline{\{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbf{C}P^2 - A \mid P(x_1, x_2, x_3) - aQ(x_1, x_2, x_3) = 0\}}$$

である．$P(x_1, x_2, x_3) - aQ(x_1, x_2, x_3) = 0$ は 3 次方程式であるからこれは 3 次曲線でその種数は $\frac{(3-1)(3-2)}{2} = 1$ である．したがってこの逆像が非特異ならそれは T^2 である．

以上でほとんどすべてのファイバーが T^2 であることが示せた．このようなファイバーの像に制限すると π がファイバー束であることも示すことができる．したがって $\pi : X \to \mathbf{C}P^1$ は楕円曲面を与える．

この写像の特異ファイバーとしてどのようなものがあり得るかみてみよう．それは特異な 3 次曲線である．それにはどんなものがあるだろうか．$F(x_1, x_2, x_3)$ を斉次 3 次式としよう．$F(x_1, x_2, x_3)$ で定まる $\mathbf{C}P^2$ の部分集合が特異点を持つ場合を考えよう．

場合 1　ある点 $p \in \mathbf{C}P^2$ でヤコビ行列が 0 になる場合．(この言い方の意味は少し曖昧である．次に述べる例で理解して欲しい．)

たとえば $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^2 x_3$ を考えよう．これに対して $F(0,0,1) = 0$．この点の近傍での $\mathbf{C}P^2$ の座標として $[x_1, x_2, x_3] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = (a, b) \in \mathbf{C}^2$ がとれる．これを使うと $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ は $a^3 + b^2 = 0$ と言い換えられる．これは勿論 $(a, b) = (0, 0)$ でヤコビ行列が消えしたがって $(a, b) = (0, 0)$ は特異点である．

この場合は（上の例がそうであるように）$F(x_1, x_2, x_3) = 0$ は 1 点が特異点であるような 2 次元複素空間で空間としては S^2 と同相である．この特異ファイバーを II と書く．(この特異ファイバーにある特異点（上の例では $(a, b) = (0, 0)$）のことをカスプ (cusp) という．)

場合 2　$F(x_1, x_2, x_3)$ が既約でなく $F(x_1, x_2, x_3) = F_1(x_1, x_2, x_3) F_2(x_1, x_2, x_3)$

と分解する場合．$F_1(x_1,x_2,x_3)=0$ 及び $F_2(x_1,x_2,x_3)=0$ はそれぞれ 2 次及び 1 次の超曲面である．その種数は $\frac{(2-2)(2-1)}{2}=\frac{(1-2)(1-1)}{2}=0$ である．したがってこれらが特異でなければ，ともに $S^2=\mathbf{C}P^1$ である．したがって $F_1(x_1,x_2,x_3)=0$ 及び $F_2(x_1,x_2,x_3)=0$ が非特異な場合 $F(x_1,x_2,x_3)=0$ は二つの $S^2=\mathbf{C}P^1$ の和である．この二つの交点数は 2 である．したがってこれらは 2 点で横断的に交わるか，1 点で接するかのどちらかである．第一の場合，この特異ファイバーを I_1 という．

$F_1(x_1,x_2,x_3)=0$ が特異になるのは $F_1(x_1,x_2,x_3)$ がさらに二つの 1 次式の積になるときに限る．このときは $F(x_1,x_2,x_3)=0$ は三つの $S^2=\mathbf{C}P^1$ の和である．この三つがすべて異なれば，そのどの二つも 1 点で交わる．3 個が 1 点で交わるときの特異ファイバーを IV，そうでないとき（こっちが generic）を I_2 と書く．

三つがすべて一致する場合には $F(x_1,x_2,x_3)=F_1(x_1,x_2,x_3)^3$ となる．このときのファイバーは次に述べる多重ファイバーである（この場合は 3 重）．

二つが一致して第三のものと 1 点で交わるのが最後の場合である．

一般の場合に戻ろう．上にいくつかの特異ファイバーを例示した．特異ファイバーは分類されているがここではそれは述べない．特異ファイバーの例である多重ファイバー (multiple fiber) を定義しよう．

定義 0.4.37　$\pi: X\to\Sigma$ を楕円曲面とする．このとき $\pi^{-1}(p)$ が多重ファイバーとは任意の $q\in\pi^{-1}(p)$ に対して q と p のまわりの座標を選んで，この座標に関して $\pi(z_1,z_2)=z_2^k$ とできることをいう．

上の定義で $k=1$ である場合は $\pi: X\to\Sigma$ のヤコビ行列は $\pi^{-1}(p)$ 上，全射である．このとき $\pi: X\to\Sigma$ は（$\pi^{-1}(p)$ の近傍で）沈め込み (submersion) であると言った．閉多様体の間の沈め込みはファイバー束であることが知られている．したがって $k=1$ である多重ファイバーは非特異ファイバーである．

$k>1$ の場合は多重ファイバーは特異であるが，空間としては T^2 である．また特異ファイバーの近くで $\pi: X\to\Sigma$ は以下のようになっている．$\pi(p)=q$

とし q の十分小さい近傍 V をとると$\pi^{-1}(V)$ への $\pi^{-1}(p)$ の埋め込みはホモトピー同値を与える．一方 $q' \in V$ を q 以外の点とすると $\pi^{-1}(q')$ は非特異ファイバーであるがこの埋め込みによって導かれる写像で $i_* : H_1(\pi^{-1}(q'); \mathbf{Z}) \to H_1(\pi^{-1}(V); \mathbf{Z}) = H_1(\pi^{-1}(q); \mathbf{Z})$ は指数 k の部分群への同型になる．

ファイバーの次元を一つ下げて模式図を書くと図 0.4.3 のようになる．以上の事実は証明しないが，具体例は次の対数変換のところで与える．

さて非特異ファイバーを変形して多重ファイバーにする手続きが対数変換 (logarithmic transform) である．これについて述べよう．構成は局所的であるのでファイバー束 $\pi : E \to D^1_{\mathbf{C}}$ でファイバーが T^2, 写像は正則写像であるものから出発しよう．

簡単のため複素構造を忘れて可微分多様体として構成する．すると $E = T^2 \times D^1_{\mathbf{C}}$ である．$T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ とみて x,y を座標とする．E 上に，巡回群 $\mathbf{Z}_k$ の作用を $j \cdot ([x,y], z) = \left(\left[x + \frac{j}{k}, y\right], e^{2\pi\sqrt{-1}j/k} z\right)$ で定義する ($j \in \mathbf{Z}_k$, $[x,y] \in T^2$, $z \in D^1_{\mathbf{C}}$)．この作用は不動点を持たない．したがってこの商空間 $\overline{E}$ は多様体である．また $\pi : E \to D^1_{\mathbf{C}}$ は$\overline{\pi} : \overline{E} \to D^2_{\mathbf{C}}/\mathbf{Z}_k = D^2_{\mathbf{C}}$ を導く．$\overline{\pi}$ の制限 $\overline{\pi} : \overline{\pi}^{-1}(D^2_{\mathbf{C}} - 0) \to D^2_{\mathbf{C}} - 0$ がファイバー束であることは容易にわかる．またこのファイバー束はねじれていない．すなわち直積と可微分同相である．また 0 の逆像は多重（k 重）ファイバーになる．

実は $\overline{E}$ に複素多様体の構造がはいり$\overline{\pi} : \overline{E} \to D^2_{\mathbf{C}}/\mathbf{Z}_k = D^2_{\mathbf{C}}$ は正則写像になり$\overline{\pi} : \overline{\pi}^{-1}(D^2_{\mathbf{C}} - 0) \to D^2_{\mathbf{C}} - 0$ が$\pi : E \to D^1_{\mathbf{C}}$ の制限と複素解析的に一致することが示せる．これは難しいわけではないがここでは証明を省略する．(具体的に写像を書けばよい．[BPV] p.164 参照.)

一般に楕円曲面 $\pi : X \to \Sigma$ と非特異ファイバー $\pi^{-1}(p)$ があったとき p の近傍で上の操作を行ない楕円曲面 $\pi' : X' \to \Sigma$ を作ることができる．$\pi' : X' \to \Sigma$ は $\pi : X \to \Sigma$ に比べて多重（k 重）ファイバーが一つだけ増えている．これを p での k 次の対数変換と呼ぶ．

例 0.4.38 $\mathbf{C}P^2$ の 9 点での爆発 X を考えよう．これは $\mathbf{C}P^2$ 上の楕円曲面とみなせた．この X をさらに 2ヶ所で対数変換しよう．このとき得られた多様体が単連結であるのは 2 点で次数がそれぞれ k,ℓ なる対数変換をして k,ℓ の最大

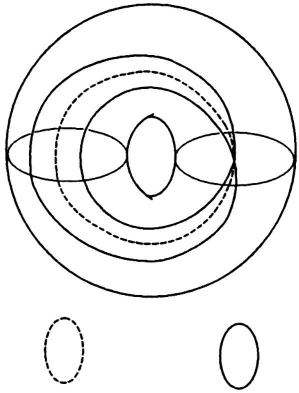


図 0.4.3

公約数が 1 であるときであることが示されている．そのような対数変換をして得られる X をドルガチェフ曲面と呼ぶ．ドルガチェフ曲面は $\mathbf{C}P^2$ の 9 点での爆発とホモトピー同値であることが分かっている．これらの中には $\mathbf{C}P^2$ の 9 点での爆発と可微分同相でないものがある．

例 0.4.39 クンマー曲面を考えて同じようにこれを対数変換しよう．このとき得られた多様体が単連結であるのは，2ヶ所で次数がそれぞれ k, ℓ なる対数変換をしていて，k, ℓ の最大公約数が 1 であるときである．k, ℓ がともに奇数であると対数変換でできる多様体は $K3$ 曲面とホモトピー同値になる．この場合をホモトピー $K3$ 曲面と呼ぶ．$K3$ 曲面とホモトピー同値である複素曲面はこれらだけである（小平）．ホモトピー $K3$ 曲面は $K3$ 曲面と可微分同相でない（第 5 章）．k, ℓ の一方が偶数であると，交叉形式は I 型になりしたがって，ベッチ数と指数を調べてフリードマンの定理を使うとこれは $3\mathbf{C}P^2 \# 19(\overline{\mathbf{C}P^2})$ と同相であることがわかる．

さて一般の場合にもどり楕円曲面 $\pi : X \to \Sigma$ を考えよう．

補題 0.4.40 X を単連結とすると，Σ は $\mathbf{C}P^1$ でしかも $\pi : X \to \Sigma$ の多重ファイバーは高々2 個で，2 個のときはその次数の最大公約数は 1 である．

これを例 0.4.38，0.4.39 と比べていただきたい．

これ以外の場合つまり底空間がある程度複雑な場合の楕円曲面の可微分同相類は松本幸夫，上正明（[松本 4]，[上 2]）によって分類された．つまり

定理 0.4.41 底空間が S^2 で多重ファイバーの数が 2 個以下の場合を除くと，楕円曲面の可微分同相類は，基本群，コホモロジー環で決まる．特にホモトピー同値なら可微分同相である．

これはゲージ理論による逆の結論（Σ があまり複雑でないとき）と相補うものである．

さて曲面論に戻り次のことを書いておこう．

定理 0.4.42 小平次元が 1 の複素曲面は楕円曲面である．

$K3$ 曲面や $\mathbf{C}P^2$ の 9 点での爆発の例があるから，逆は成立しない．

楕円曲面の可微分同相類は近年ゲージ理論を用いて精力的に研究されている．これについては [FM1] に詳しい．

XI 複素曲面 6 — 一般型曲面 —

最後に小平次元が 2 の場合を少し述べよう．小平次元が 2 であるような複素曲面を一般型曲面 (surface of general type) と呼ぶ．これについては次の定理 0.4.43 が知られている．

定理 0.4.43(Gieseker) 任意の組 (k, ℓ) に対して $(c^1)^2 \cap [X] = k$, $c^2 \cap [X] = \ell$ であるような一般型曲面 X 全体に対しては準射影多様体 (quasi projective

variety) をなす粗なモジュライ空間 (coarse moduli) が存在する.

定理の言葉は (筆者は素人でよく知らないので) 説明せず次の系を書いておく.

系 0.4.44 任意の組 (k,ℓ) に対して $(c^1)^2 \cap [X] = k$, $c^2 \cap [X] = \ell$ であるような一般型曲面 X は可微分同相の意味で有限個しかない.

$(c_1)^2 \cap [X] = k$, $c^2 \cap [X] = \ell$ は（リーマン–ロッホの定理とヒルツェブルフの符合定理を使うと）X の符号数とベッチ数で決まるから，ホモトピー型の不変量である．楕円曲面の場合はお互いにホモトピー同値で可微分同相でないような無限個の複素曲面が存在する.

定理 0.4.43 の証明には多重標準写像を用いるそうである．すなわち $(c^1)^2 \cap [X] = k$, $c^2 \cap [X] = \ell$ なる X は (k,ℓ) だけで決まる次元の射影空間に（双有理的に）埋め込むことができることを用いる．これ以上は述べない.

一方でどの組 (k,ℓ) に対して $(c^1)^2 \cap [X] = k$, $c^2 \cap [X] = \ell$ であるような極小一般型曲面 X があるかは未解決である．知られている結果は次の通り.

$$
\begin{aligned}
&k + \ell \equiv 0 \quad \mod 12, \quad k > 0, \ell > 0 \\
&k \leq 3\ell \\
&5k - \ell + 36 \geq 0 \quad (k\text{偶数}) \\
&5k - \ell + 30 \geq 0 \quad (k\text{奇数})
\end{aligned}
$$

2 行目の不等式を宮岡–ヤウの不等式，3，4 行目の不等式をネーター (Noether) の不等式という．これらを満たすどの (k,ℓ) に対して $(c^1)^2 \cap [X] = k$, $c^2 \cap [X] = \ell$ なる X が存在するかは分かっていない.

これらの不等式を使うと予想 0.4.8 が複素曲面に対して成立していることが示される.

可微分多様体に対しても（極小（のかわりに既約）の概念を同様に定義して）似た問題が考えられる．このとき上の不等式は必ずしも満たされない.

複素曲面についてはすでに何回も引いた [BPV] がその上の（古典的な方法及

びヤン–ミルズ方程式に基づく）微分位相幾何学については [FM1] がある．ここから先はこれらの本を参照していただきたい.（すでに何回か触れたがこの辺のことはモノポール方程式の応用が著しいところで，現在急速に書き変えられつつある.）

一時期単連結な可微分 4 次元多様体は複素曲面の連結和と可微分同相になるのではないかと漠然と考えられていた時期もあったようであるが，今ではたとえば二つの多様体の連結和にはならないが複素多様体に可微分同相でないような単連結 4 次元多様体が作られている（ゴンプ (Gompf)–ミュロフカ [GM]）．複素多様体がダメならシンプレクティック多様体ではどうかといった提案も（漠然と）されているようであるが，よくわからない（[T7] 参照）．

第 1 章　ベクトル束と接続

§ 1.1　接続とゲージ変換

ベクトル束の定義は序章で与えた．ここではまずその上の接続を定義しよう．Mを多様体としEをその上のベクトル束とする．M上の開集合Uに対してEのU上での（C^∞級の）切断全体を$\Gamma(U;E)$と書くのであった．またU上のMのベクトル場全体を$\chi(U)$と書いた．すなわち$\chi(U)=\Gamma(U;TM)$．$\Gamma(U;E)$,$\chi(U)$は環$C^\infty(U)$上の加群である．これをみるには，$s\in\Gamma(U;E)$,$f\in C^\infty(U)$に対してfsのpでの値を$(fs)(p)=f(p)s(p)$で定義すればよい．ここで$s(p)$はベクトル空間E_p（Eのpでのファイバー）の元で$f(p)$は実数だった．

定義 1.1.1　EのU上の接続 (connection) ∇とは写像$\nabla:\chi(U)\times\Gamma(U;E)\to\Gamma(U;E)$であって，次の条件を満たすものをいう．

(1) $\nabla_{fX}(s)=f\nabla_X s$が任意の$f\in C^\infty(U)$,$X\in\chi(U)$,$s\in\Gamma(U;E)$に対して成立する．(これ以後$\nabla(X,s)$のことを$\nabla_X s$と書く．)

(2) $\nabla_X(fs)=f\nabla_X s+X(f)\nabla_X s$が任意の$f\in C^\infty(U)$,$X\in\chi(U)$,$s\in\Gamma(U;E)$に対して成立する．

$\nabla_X s$をsの接続∇についての（X方向の）共変微分 (covariant derivative) と呼ぶ．定義 1.1.1 は∇が$\mathbf{R}$上の線形写像でまた$C^\infty(U)$上は第 1 成分につい

ては線形であることを示している．第2成分については必ずしも $C^\infty(U)$ 線形でなくてもよい．次の事実はこのことの反映である．

補題 1.1.2

(1) $\nabla_X s$ の $p \in U$ での値は $X(p)$ と $s \in \Gamma(U; E)$ のみで定まり X のほかの点の値によらない．つまり $X(p) = X'(p)$ ならば $(\nabla_X s)(p) = (\nabla_{X'} s)(p)$ である．

(2) $\nabla_X s$ の $p \in U$ での値は $s \in \Gamma(U; E)$ の p の近傍の値のみによる．つまり p の近傍で $s = s'$ ならば $(\nabla_X s)(p) = (\nabla_X s')(p)$.

略証　$X(p) = X'(p)$ とする．$Y = X - X'$ とおく．p の近くで座標をとると $Y = \sum Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y^i(p) = 0$ と表せる．よって定義 1.1.1 (2) より

$$(\nabla_Y s)(p) = (\nabla_{\sum Y_i \frac{\partial}{\partial x^i}} s)(p) = \sum Y_i(p)(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} s)(p) = 0$$

よって　$(\nabla_X s)(p) = (\nabla_{X'} s)(p)$ ゆえ (2) が成り立つ．

(1) の証明はもっとやさしい．

補題 1.1.2 は補題 1.1.3 からも従う．

s と s' が1点で一致していても，すなわち $s(p) = s'(p)$ でも $(\nabla_X s)(p) = (\nabla_X s')(p)$ となるとは限らない．

一般に2つのベクトル束の切断の間の写像が C^∞ 線形であることは，それが各点で定義されていることと同値である．すなわち $\varphi : \Gamma(U; E) \to \Gamma(U; E')$ に対して次の二つは同値である．

(1) 任意の $s \in \Gamma(U; E)$,$p \in U$ に対して $\varphi(s) \in \Gamma(U; E')$ の p での値 $\varphi(s)(p)$ は s の p での値だけから決まり s の他の点での値によらない．

(2) 任意の $s \in \Gamma(U; E)$, $f \in C^\infty(U)$ に対して $\varphi(fs) = f\varphi(s)$ が成り立つ．

このことの証明は補題 1.1.2 の (1) の証明と同様である．

さて接続を局所座標で表示しよう．U を M の一つの座標近傍とする．すなわち U には $\mathbf{R}^n$ の開集合への可微分同相写像が与えられているとする．記号の節約

のためUを$\mathbf{R}^n$の開集合とみなし$x^1,\cdots,x^n$をその座標系とする．次にU上ベクトル束Eは自明としベクトル束の同型$E\cong U\times\mathbf{R}^k$（または$E\cong U\times\mathbf{C}^k$）を与えておく．これにより$\Gamma(U;E)$の元$s$は$k$個の$C^\infty(U)$の元の組$(s_1,\cdots,s_k)$とみなすことができる（$k$はベクトル束の階数(rank)である）．$(s_a)$などと書いて縦ベクトル$\begin{pmatrix}s_1\\ \vdots\\ s_k\end{pmatrix}$を表す．(縦ベクトルを書くと無駄にページ数を食うのでできるだけ省略する.）$s_i\equiv 1$で他の成分が0である$\Gamma(U;E)$の元をe_iと書く．

補題 1.1.3　$k\times k$行列値のn個の関数$A_i=(A_i^{ab})_{a,b=1,\cdots,k}$があって次の式が成立する．

$$\nabla_{\sum X^i\frac{\partial}{\partial x^i}}(s_a)=\left(\sum_i X^i\frac{\partial s_a}{\partial x^i}+\sum_{i,b}X^iA_i^{ab}s_b\right) \tag{1.1.1}$$

逆に$k\times k$行列値のn個の関数から(1.1.1)で∇を定義すると，これはU上の接続を定める．

証明　$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}e_a=\sum A_i^{ba}e_b$で$A_i^{ba}$を定める．定義式から素直に計算すれば(1.1.1)が示せる．逆の証明も同様.　証明終わり

(1.1.1)が成り立つとき$\nabla=d+\sum A_idx^i$と書く．さて座標変換についてこれらの量$A_i=(A_i^{ab})_{a,b=1,\cdots,k}$がどう振舞うか調べよう．ここで座標という場合，多様体の座標とベクトル束の座標（自明化）の2通りある．同時に調べてもよいがここではそれぞれ別々に調べよう．

そこでまず$U\cup V$上で束は自明でU,Vがそれぞれ多様体Mの座標近傍である場合を考えよう．Uの座標関数を(x^i), Vの座標関数を(y^i)とする．補題1.1.3により$\nabla=d+\sum A_idx^i$なるU上の行列値関数たちA_iと，$\nabla=d+\sum B_idy^i$なるV上の行列値関数たちB_iが定まる．次の補題によって$\nabla=d+\sum A_idx^i$という書き方が正当化される．

補題 1.1.4　$U \cap V$上の微分1型式のなす行列として$\sum A_i dx^i = \sum B_i dy^i$ が成り立つ．つまり$\sum_i A_i^{ab} dx^i = \sum_i B_i^{ab} dy^i$が各々の a, b に対して成立する．

証明

$$
\begin{aligned}
\sum_a B_i^{ab} e_a &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} e_b \\
&= \sum_j \nabla_{\frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x_j}} e_b \\
&= \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial y^i} A_j^{ab} e_a
\end{aligned}
$$

よって$\sum_i A_i^{ab} dx^i = \sum_i B_i^{ab} dy^i$.　　　証明終わり

補題は次のように言い換えられる．$M = \bigcup U_\alpha$とし各々の U_αな Eの座標とする．すると補題 0.3.7 により $s \in \Gamma(M; E)$ は $s_\alpha \in \Gamma(U_\alpha; E) = C^\infty(U_\alpha)^k$を定める．このとき M上の Eの接続 ∇ が与えられると，U_α上の微分1型式のなす $k \times k$行列 A_αが定まり $\nabla = d + A_\alpha$が各々の U_α上成立する．

すなわち $s \in \Gamma(M; E)$ が (s_α) に対応し Xを M上のベクトル場とすると $\nabla_X s$ は $(\langle X, ds_\alpha \rangle + \langle X, A_\alpha \rangle s_\alpha)$ に対応する．

ここで式 $\langle X, ds_\alpha \rangle + \langle X, A_\alpha \rangle s_\alpha$ の意味は次の通りである．s_αは U_α上の関数の作る k列の縦ベクトルであったから，成分ごとの外微分 ds_αは U_α上の微分1型式の作る k列の縦ベクトルである．Xは U_α上のベクトル場であるから，ds_α の各成分を縮約させ $\langle X, ds_\alpha \rangle$ を作ると，これは U_α上の関数の作る k列の縦ベクトルである．ここで縮約させるとは写像 $T_p(M) \otimes T_p^*(M) \to \mathbf{R}$ を用いてベクトル場と微分1型式から関数を作ることを言う．($T_p(M)$ は Mの p での接空間 $T_p^*(M)$ は余接空間でこの二つはお互いの双対空間であった．また $T(M)$ の切断がベクトル場 $T^*(M)$ の切断が微分1型式であった.)

次にやはり成分ごとに縮約して得られる $\langle X, A_\alpha \rangle$ は U_α上の関数の作る $k \times k$ 行列である．これを s_αにかけると再び U_α上の関数の作る k列の縦ベクトルが得られる．この二つを足したのが $\langle X, ds_\alpha \rangle + \langle X, A_\alpha \rangle s_\alpha$ である．

以上の記述は U_αが同時に多様体の座標でもある場合，前に述べたものと一

致する．

さらに次のようにも言い換えられる．$s=(s_\alpha)\in\Gamma(M;E)$ に対して，U_α上で $ds_\alpha+A_\alpha s_\alpha$であるような E値微分 1 型式（すなわちの $E\otimes\Lambda^1(M)$ の切断）の族をとる（座標で書けば$\sum_a ds_{\alpha,a}\otimes e_a+\sum_{b,j}A^{ab}_{\alpha,i}s_\alpha dx^i\otimes e_b$）．するとこれらは $U_\alpha\cap U_\beta$上で一致し（はり合い）$M=\bigcup U_\alpha$上の $E\otimes\Lambda^1(M)$ の切断を定める（このことは (1.1.1.1) の言い換えでもある）．

切断 ∇s のことを $d_A s$ とも書く．

さて次にベクトル束の変換を考察しよう．$M=\bigcup U_\alpha$などの記号を上の通りとし，これに対する変換系を $g_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to GL(k;\mathbf{R})$（または $g_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to GL(k;\mathbf{C})$）とする．$\nabla$ を Eの M上の接続とし A_αを U_α上 $\nabla=d+A_\alpha$となるような $k\times k$行列値微分 1 型式とする．

補題 1.1.5

(1) $U_\alpha\cap U_\beta$上 $A_\beta=g_{\alpha\beta}^{-1}dg_{\alpha\beta}+g_{\alpha\beta}^{-1}A_\alpha g_{\alpha\beta}$ が成立する．(微分 1 型式のなす行列の間の等式.)

(2) 逆に各々の U_α上微分 1 型式のなす $k\times k$行列 A_αがあって，$U_\alpha\cap U_\beta$ 上 $A_\beta=g_{\alpha\beta}^{-1}dg_{\alpha\beta}+g_{\alpha\beta}^{-1}A_\alpha g_{\alpha\beta}$が成り立つとすると，$M$上の接続 ∇ があって U_α上 $\nabla=d+A_\alpha$が成立する．

証明　$ds_\alpha+A_\alpha s_\alpha$と $ds_\beta+A_\beta s_\beta$が $E\otimes\Lambda^1(M)$ の切断として $U_\alpha\cap U_\beta$で一致することを式で書くと

$$ds_\alpha+A_\alpha s_\alpha=g_{\alpha\beta}(ds_\beta+A_\beta s_\beta)$$

一方 $s_\beta=g_{\alpha\beta}^{-1}s_\alpha$．よって

$$\begin{aligned}g_{\alpha\beta}(ds_\beta+A_\beta s_\beta)&=d(g_{\alpha\beta}s_\beta)+A_\alpha g_{\alpha\beta}s_\beta\\&=(dg_{\alpha\beta})s_\beta+g_{\alpha\beta}ds_\beta+A_\alpha g_{\alpha\beta}s_\beta\end{aligned}$$

すなわち $A_\beta=g_{\alpha\beta}^{-1}dg_{\alpha\beta}+g_{\alpha\beta}^{-1}A_\alpha g_{\alpha\beta}$．(2) は上の計算を逆にたどれば示せる．

証明終わり

以上接続の定義とその座標表示，変換法則を述べた．ここまではベクトル束には特に構造群を考えなかった．そのため接続の係数 A_α たちは微分1型式のなす $k \times k$ 行列になった．次にベクトル束が構造群としてリー (Lie) 群 G を持つとはどういうことかを定義しよう．リー群の一般論を前提にしたくないので，ここでは G として $GL(k;\mathbf{R})$ または $GL(k;\mathbf{C})$ の部分群になっているものだけを考える．このとき G のリー環 (Lie algebra)$\mathfrak{g}$ を行列の指数関数を用いて

$$\mathfrak{g} = \{A \in gl(k;\mathbf{R}) | \exp A \in G\}$$

で定義する．(ここで $gl(k;\mathbf{R})$ は $k \times k$ 行列全体を指す．これは $GL(k;\mathbf{R})$ のリー環である．) G が行列の積で閉じていることから，$\mathfrak{g}$ が括弧積 $[A,B] = AB - BA$ で閉じていることが証明できる．また準同型が $\varphi : G \to G'$ あると $\varphi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ で $\exp \varphi_* = \varphi \exp$ なるものが一意に定まる．$\varphi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ は括弧積を保つ．(これらのことの証明は省略する．[松島] などを参照．本書に出てくる群についてはそれぞれ容易に計算で確かめられる．) また $\mathfrak{g}$ はベクトル空間であるが，この上には G の $g \cdot A = g^{-1}Ag$ で定義される線形表現（共役 (adjoint) 表現という）がある．

さて ζ を，変換系が $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ であるような G 束とする．すると共役表現を用いてファイバーが $\mathfrak{g}$ であるようなベクトル束が定まる（§0.3）．これのことを $\zeta \times_{ad} \mathfrak{g}$ または $Ad\,\zeta$ と書く．

定義 1.1.6　G 束 ζ の G 接続とは $A_\alpha \in \Gamma(U_\alpha; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M))$ なる族であって，$U_\alpha \cap U_\beta$ 上 $A_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} A_\alpha g_{\alpha\beta}$ が成立するもののことをいう．

定義 1.1.6 には少し注釈が必要であろう．G の共役表現で $\mathfrak{g}$ が閉じていることから $g_{\alpha\beta}^{-1} A_\alpha g_{\alpha\beta}$ は $\Gamma(U_\alpha; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M))$ の元である．$g_{\alpha\beta}$ が G への写像であることを使って少し計算すると $g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta} \in \Gamma(U_\alpha; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M))$ もわかる．

さて G 束 ζ に接続 $A_\alpha \in \Gamma(U_\alpha; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M))$ が与えられ，ベクトル束 E が線形表現 $\varphi : G \to GL(k;\mathbf{R})$ によって得られているとすると，E の接続 ∇ が $\varphi_*(A_\alpha)$ から補題 1.1.5 によって得られる．このような接続を G 接続という．$\varphi : G \subseteq GL(k;\mathbf{R})$ の場合の例を少し挙げる．

例 1.1.7　$G = GL(k;\mathbf{C}) \subseteq GL(2k;\mathbf{R})$．このとき G 接続とは複素ベクトル束としての接続のことである．

例 1.1.8　$\varphi : G = O(k) \subseteq GL(k;\mathbf{R})$ のとき．この場合 $G = O(k)$ を構造群とするベクトル束には内積が入る．より正確には，

命題 1.1.9　Eを階数 kのベクトル束とする．このとき Eの構造群の $O(k)$ への簡約化と E上の計量とは 1 対 1 に対応する．

略証　E の構造群の $O(k)$ への簡約化が与えられているとする．$u, v \in E_p$ の内積を定義しよう．$p \in U_\alpha$ なる α を選ぶと，$\varphi_\alpha(u), \varphi_\alpha(v) \in \mathbf{R}^k$ とみなせる．

$$\langle u, v\rangle = \langle \varphi_\alpha(u), \varphi_\alpha(v)\rangle$$

とおく．ただし右辺は $\mathbf{R}^k$ の内積である．$p \in U_\beta$ なる別の β があると，$g_{\beta\alpha}(p) \in O(k)$ ゆえ

$$\begin{aligned}\langle \varphi_\beta(u), \varphi_\beta(v)\rangle &= \langle g_{\beta\alpha}(p)\varphi_\alpha(u), g_{\beta\alpha}(p)\varphi_\alpha(v)\rangle \\ &= \langle \varphi_\alpha(u), \varphi_\alpha(v)\rangle\end{aligned}$$

よって内積は α によらない．

逆の証明は省略する．

したがって $O(k)$ を構造群とするベクトル束には計量が自動的に定まっている．これを $\langle\ \ \rangle$ で表すと：

命題 1.1.10　Eの接続 ∇ に対して次の 2 つは同値である．

(1) ∇ は $O(k)$ 接続である．

(2) 任意の $X \in \chi(M)$, $s_1, s_2 \in \Gamma(M;E)$ に対して $X\langle s_1, s_2\rangle = \langle \nabla_X s_1, s_2\rangle + \langle s_1, \nabla_X s_2\rangle$ が成り立つ．

この条件を満たす接続のことを計量接続 (metric connection) という．

証明は (1)⇒(2) の方だけ行う．局所的な問題であるから一つの座標系 U_αで考えてよい．このとき $X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ とおくと

$$\begin{aligned} X\langle s_1, s_2 \rangle &= \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(s_{1,\alpha,i} s_{2,\alpha,i}) \\ &= \sum_i X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} s_{1,\alpha,i} \right) s_{2,\alpha,i} + X^i s_{1,\alpha,i} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} s_{2,\alpha,i} \right) \end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X s_1, s_2 \rangle &+ \langle s_1, \nabla_X s_2 \rangle \\ &= \sum_{i,a} X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} s_{1,\alpha,a} \right) s_{2,\alpha,a} + \sum_{i,a,b} X^i A^{ab}_{\alpha,i} s_{1,\alpha,b} s_{2,\alpha,a} \\ &\quad + \sum_{i,a} X^i s_{1,\alpha,a} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} s_{2,\alpha,a} \right) + \sum_{i,a,b} X^i s_{1,\alpha,b} A^{ba}_{\alpha,i} s_{2,\alpha,a} \end{aligned}$$

$O(k)$ のリー環は反対称行列からなるから，第2項と第4項は打ち消しあう．したがってこの二つの式を見比べて命題の (1) ⇒(2) が得られる．　　証明終わり

G がユニタリ群 $U(k)$ の場合も同様の命題が得られる．

ゲージ変換について述べる前に，もう2つ基本的な命題を示しておこう．ζを G 束，$\varphi : G \to GL(k; \mathbf{R})$ をリー群 G の表現，Eをこれらから導かれるベクトル束とする．

命題 1.1.11　∇, ∇'を G 束ζの2つの G 接続とすると$\Gamma(M; Ad\, \zeta \otimes \Lambda^1(M))$ の元 Bがただ一つ存在し，任意の $s \in \Gamma(M; E)$ に対して $\nabla' s = \nabla s + \varphi_*(B)s$ が成り立つ．

逆にζの G 接続 ∇, $\Gamma(M; Ad\, \zeta \otimes \Lambda^1(M))$ の元 Bが与えられたとき $\nabla' s = \nabla s + \varphi_*(B)s$ で ∇'を定義するとこれはζの G 接続になる．

証明　ζの座標 U_αをとり，これを使って ∇ は U_α上 $\nabla = d + A_\alpha$, ∇'は U_α上 $\nabla' = d + A'_\alpha$と表されるとする．変換系を $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ とすると定義

1.1.6 より

$$A_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1}dg_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1}A_\alpha g_{\alpha\beta}$$
$$A'_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1}dg_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1}A'_\alpha g_{\alpha\beta}$$

が成立する．この式を辺々引くと $A_\beta - A'_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1}(A_\alpha - A'_\alpha)g_{\alpha\beta}$が得られる．これは$\Gamma(M; Ad\,\zeta\otimes\Lambda^1(M))$ の元 Bで各々の U_α上 $A_\alpha - A'_\alpha$に一致するものが存在することを意味する．この元が $\nabla's = \nabla s + \varphi_*(B)s$ を満たすことは定義にしたがって計算すれば直ちにわかる．

後半は上の計算を逆にたどればよい．　証明終わり

命題 1.1.12　任意の G 束に対して少なくとも一つは G 接続が存在する．

証明　$\bigcup U_\alpha = M$で U_α上 G 束ζは自明とする．すると U_α上にはたとえば $\nabla = d + 0$ をとれば接続が存在する．これを ∇^αと書く．開被覆$\bigcup U_\alpha = M$に伴う 1 の分解$\chi_\alpha : U_\alpha \to [0,1]$ をとり $X \in \chi(M)$ に対して $\nabla_X = \sum \nabla^\alpha_{\chi_\alpha X}$とおけばこれが G 接続を定めることが直接計算で容易に確かめられる．証明終わり

上の 2 つの補題から G 束ζの接続全体は (無限次元) ベクトル空間$\Gamma(M; Ad\,\zeta\otimes\Lambda^1(M))$ の元と 1 対 1 に対応する．この対応は接続 ∇^0を一つ固定すると $\nabla \mapsto \nabla - \nabla^0$で与えられる．しかし$\zeta$が自明でない限り接続 ∇^0の標準的なとり方はない．言い換えると接続全体と$\Gamma(M; Ad\,\zeta\otimes\Lambda^1(M))$ の対応は原点の分だけ標準的には定まらない．これは接続全体の空間がアフィン空間と考えるべきであることを示している．

ζの (C^∞級の) G 接続全体を $\mathcal{A}(M,\zeta)$ で表す．接続は長い間微分幾何学で使われてきたが，ゲージ理論の始まる前は都合の良い接続を一つとり，それを固定して議論することが多かった．接続全体の空間を考えてその性質を利用するといった方法は比較的新しいものである．

さて次にゲージ変換を定義しよう．そのためにベクトル束および G 束が同型ということを定義しよう．(これはベクトル束の定義を序章で行ったとき曖昧に

していた点である.）まずベクトル束の場合を論じよう.

定義 1.1.13　E, Fを M上のベクトル束とする．$\varphi : E \to F$がこの二つのベクトル束の間の同型写像であるとは:

(1) $\pi_F \varphi = \pi_E$．ここで$\pi_F : F \to M$, $\pi_E : E \to M$はベクトル束の射影を表す.

(2) φ は C^∞級写像である.

(3) φ の各ファイバー E_pへの制限は線形同型 $E_p \to F_p$を導く.

同型$\varphi : E \to F$に対して切断の間の（同型）写像$\varphi_* : \Gamma(M; E) \to \Gamma(M; F)$を $s \mapsto \varphi \circ s$ によって定める.

さてベクトル束の同型を局所座標で表してみよう．$\bigcup U_\alpha = M$を Eに対する座標近傍，$\bigcup V_\beta = M$を Fに対する座標近傍とする．開被覆$\bigcup_{\alpha,\beta}(U_\alpha \cap V_\beta) = M$は E, F双方の座標近傍とみなすことができる．それでこれからはいくつかのベクトル束（G 束）を考えるときはいつも，共通の座標近傍をとっているとする.

さて$\varphi : E \to F$を線形同型とし$\bigcup U_\alpha = M$を共通の座標近傍とする．$\Phi_E^\alpha : E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbf{R}^k$, $\Phi_F^\alpha : F|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbf{R}^k$ なる同型が定まっている．合成 $\Phi_F^\alpha \circ \varphi \circ (\Phi_E^\alpha)^{-1} : U_\alpha \times \mathbf{R}^k \to U_\alpha \times \mathbf{R}^k$ を考えるとこれは定義 1.1.13 (1) より U_α成分を変えず，(3) より各々のファイバー上で同型である．したがって $h_\alpha : U_\alpha \to GL(k; \mathbf{R})$ が存在して$\Phi_F^\alpha \circ \varphi \circ (\Phi_E^\alpha)^{-1}(p, v) = (p, h_\alpha(p)(v))$ が成立する.

また$\varphi_* : \Gamma(M; E) \to \Gamma(M; F)$ は補題 0.3.7 を用いて$\Gamma(M : E)$ の元を (s_α) と表すと $(s_\alpha) \mapsto (h_\alpha s_\alpha)$ で与えられる.

次にこれらの h_αたちの座標変換に対する関係を求めよう．Eの変換系 $g_{\alpha\beta}^E : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k; \mathbf{R})$ は $\left(\Phi_E^\alpha \circ \left(\Phi_E^\beta\right)^{-1}\right)(p, v) = (p, g_{\alpha\beta}^E(p)(v))$ で定まっている．したがって

$$(p, h_\alpha(p) g_{\alpha\beta}^E(p)(v)) \quad = \quad \left(\Phi_F^\alpha \circ \varphi \circ (\Phi_E^\alpha)^{-1} \circ \Phi_E^\alpha \circ \left(\Phi_E^\beta\right)^{-1}\right)(p, v)$$

$$= \left(\Phi_F^\alpha \circ \left(\Phi_F^\beta\right)^{-1} \circ \Phi_F^\beta \circ \varphi \circ \left(\Phi_E^\beta\right)^{-1}\right)(p,v)$$
$$= (p, g_{\alpha\beta}^F(p)h_\beta(p)(v))$$

よって $h_\alpha(p)g_{\alpha\beta}^E(p) = g_{\alpha\beta}^F(p)h_\beta(p)$ が任意の $p \in U_\alpha \cap U_\beta$に対して成立する．

逆に $h_\alpha : U_\alpha \to GL(k;\mathbf{R})$ が $h_\alpha(p)g_{\alpha\beta}^E(p) = g_{\alpha\beta}^F(p)h_\beta(p)$ を任意の $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ に対して満たせば Eから Fへの同型が存在しその座標表示が h_αである．

このことを使って G 束の間の同型を次のように定義する．

定義 1.1.14　ζ,ξを G 束としその座標系を U_α（両者共通），変換系をそれぞれ $g_{\alpha\beta}^\zeta : U_\alpha \cap U_\beta \to G$, $g_{\alpha\beta}^\xi : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ とする．

このときζからξへの同型とは$h_\alpha : U_\alpha \to G$ なる C^∞級写像の族で$h_\alpha(p)g_{\alpha\beta}^\zeta(p) = g_{\alpha\beta}^\xi(p)h_\beta(p)$ が任意の $p \in U_\alpha \cap U_\beta$に対して満たされるようなものをいう．

E,Fがζ,ξから表現 $G \to GL(k;\mathbf{R})$ によって得られるとすると，ζからξへの同型は Eから Fへの同型を導く．

定義 1.1.15　G 束ζのゲージ変換 (gauge transform) とはζから自分自身への同型のことをいう．

ζのゲージ変換全体のことを $\mathcal{G}(M,\zeta)$ と書く．定義より

$$\mathcal{G}(M,\zeta) = \left\{ (h_\alpha) \;\middle|\; \begin{array}{l} h_\alpha : U_\alpha \to G \\ h_\alpha(p)g_{\alpha\beta}(p) = g_{\alpha\beta}(p)h_\beta(p) \quad \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta \end{array} \right\} \tag{1.1.2}$$

が成り立つ．$\mathcal{G}(M,\zeta)$ は群をなす．群演算は $(h_\alpha)\cdot(h'_\alpha) = (h_\alpha h'_\alpha)$ で与えられる．ここで $h_\alpha h'_\alpha$は $p \mapsto h_\alpha(p)h'_\alpha(p)$ なる写像である．$\mathcal{G}(M,\zeta)$ をゲージ変換群 (gauge transformation group) とよぶ．

この群は $\mathcal{A}(M,\zeta)$ に作用する．この作用を定義しよう．まずベクトル束 E に対しては，$s \in \Gamma(M;E)$, $\nabla \in \mathcal{A}(M,E)$, $\varphi \in \mathcal{G}(M,E)$ のとき $(\varphi^*\nabla)(s) = \varphi^{-1} \circ \nabla \circ \varphi(s)$．この式が接続を定めることは次に行う局所座標表示からわかる．

$s \leftrightarrow (s_\alpha), \nabla \leftrightarrow d + A^\alpha$, $\varphi \leftrightarrow (h_\alpha)$ なる局所座標表示を持つとすると

$$(1.1.3) \qquad \begin{aligned} (\varphi^*\nabla)(s) \quad \leftrightarrow \quad & h_\alpha^{-1}(d + A^\alpha)h_\alpha(s_\alpha) \\ & = (d + h_\alpha^{-1}dh_\alpha + h_\alpha^{-1}A^\alpha h_\alpha)(s_\alpha) \end{aligned}$$

すなわちゲージ変換の座標表示は$\varphi^*(d + A^\alpha) = (d + h_\alpha^{-1}dh_\alpha + h_\alpha^{-1}A^\alpha h_\alpha)$で与えられる．$G$ 束のときはこの式を逆に定義にしてしまおう．つまり，(h_α) の $(d + A^\alpha)$ なる G 接続への作用を $(h_\alpha)^*(d + A^\alpha) = (d + h_\alpha^{-1}dh_\alpha + h_\alpha^{-1}A^\alpha h_\alpha)$ で定義する．(右辺が G 接続を定めることは直接計算で容易に確かめられる.)

$\mathcal{G}(M,\zeta)$ の $\mathcal{A}(M,\zeta)$ への作用は右作用である．すなわち

$$(\varphi_1\varphi_2)^*\nabla = (\varphi_2)^*(\varphi_1)^*\nabla$$

ところで接続のゲージ変換の式 $(h_\alpha)^*(d + A^\alpha) = (d + h_\alpha^{-1}dh_\alpha + h_\alpha^{-1}A^\alpha h_\alpha)$ は座標変換の式（補題 1.1.5(1)）と同じ形をしている．これは当然であって座標変換とは重なった領域上で同型で束をはり合わせることに他ならない．

さて商空間 $\mathcal{A}(M,\zeta)/\mathcal{G}(M,\zeta)$ のことを $\mathcal{B}(M,\zeta)$ と書く．前に述べたように $\mathcal{A}(M,\zeta)$ はアフィン空間でそのホモトピー型は自明であったが，この商空間は自明でないホモロジーやホモトピーを持っており，これらを使って Mの位相を調べることができる．

§ 1.2　曲率と特性類

前節では接続とその間のゲージ変換を定義した．そこで考えられるのが二つの接続がゲージ変換でいつ移り合うかという問題であろう．これに答えるには接続に対してゲージ変換で「不変」な量を対応させる必要がある．これが曲率である．

定義 1.2.1　$E \to M$をベクトル束，∇をその上の接続とする．∇の曲率(curvatur $\chi(M) \times \chi(M) \times \Gamma(M;E) \to \Gamma(M;E)$ を次の式で定義する．

$$F_\nabla(X,Y,s) = \nabla_X\nabla_Y s - \nabla_Y\nabla_X s - \nabla_{[X,Y]}s$$

接続はテンソルではない（つまり $\nabla_X s$ の $p \in M$での値は X,s のその点での値からは決まらない（補題 1.1.2）.）しかし曲率はテンソルである．これは次の補題の帰結である．

補題 1.2.2　$F_\nabla(f_1X, f_2Y, f_3s) = f_1f_2f_3F_\nabla(X,Y,s)$ が任意の $X,Y \in \chi(M)$,$s \in \Gamma(M;E)$，$f_1,f_2,f_3 \in C^\infty(M)$ に対して成立する．

系 1.2.3　$F_\nabla(X,Y,s)$ の $p \in M$での値は $X,Y \in \chi(M)$,$s \in \Gamma(M;E)$ のでの値から定まる．

補題 1.2.2 の証明

$$\begin{aligned}
F_\nabla(X,Y,fs) &= \nabla_X\nabla_Y(fs) - \nabla_Y\nabla_X(fs) - \nabla_{[X,Y]}(fs) \\
&= \nabla_X((Yf)s) + \nabla_X(f\nabla_Y s) - \nabla_Y((Xf)s) + \nabla_Y(f\nabla_X s) \\
&\quad -f\nabla_{[X,Y]}s - ([X,Y](f))s \\
&= (XY(f))s + (Yf)\nabla_X s + (Xf)\nabla_Y s + f\nabla_X\nabla_Y s \\
&\quad -(YX(f))s - (Xf)\nabla_X s + (Yf)\nabla_Y s + f\nabla_Y\nabla_X s \\
&\quad -f\nabla_{[X,Y]}s - ([X,Y](f))s
\end{aligned}$$

$$= \quad fF_\nabla(X,Y,s)$$

ほかの部分も同様である．

系 1.2.3 の証明　補題 1.2.2 を用いるとあとは補題 1.1.2(1) の証明と同様である．または後に示す座標変換の式からも得られる．

定義から直ちに $F_\nabla(X,Y,s) = -F_\nabla(Y,X,s)$ が成り立つ．これに系 1.2.3 を合わせると次のことがわかる．

補題 1.2.4　F_∇はベクトル束 $Hom(\Lambda^2 M \otimes E, E)$ の切断である．

曲率を座標で表示しよう．U_α上で $\nabla = d + A_\alpha$, $A_\alpha = \sum A_{\alpha,i}dx^i$と表されているとする．すると

$$\begin{aligned} F_\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, e_a\right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}e_a - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}e_a - \nabla_{[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}]}e_a \\ &= \sum_b \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(A^{ba}_{\alpha,j}e_b) - \sum_b \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}(A^{ba}_{\alpha,i}e_b) \\ &= \sum_{b,c}\left(\frac{\partial A^{ba}_{\alpha,j}}{\partial x^i} - \frac{\partial A^{ba}_{\alpha,i}}{\partial x^j} + A^{bc}_{\alpha,i}A^{ca}_{\alpha,j} - A^{bc}_{\alpha,j}A^{ca}_{\alpha,i}\right)e_b \end{aligned}$$

よって U_α上

$$F_\nabla = dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha \tag{1.2.1}$$

ここで $A_\alpha \wedge A_\alpha$は行列値微分型式の外積でたとえば

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}\wedge v_{11} + u_{21}\wedge v_{12} & u_{11}\wedge v_{21} + u_{21}\wedge v_{22} \\ u_{12}\wedge v_{11} + u_{22}\wedge v_{12} & u_{12}\wedge v_{21} + u_{22}\wedge v_{22} \end{pmatrix}$$

で定義される．さて (1.2.1) の微分型式が座標変換（ゲージ変換）でどう変わるか調べよう．$A_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1}dg_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1}A_\alpha g_{\alpha\beta}$ であったから

$$\begin{aligned} dA_\beta + A_\beta \wedge A_\beta &= d(g_{\alpha\beta}^{-1}dg_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1}A_\alpha g_{\alpha\beta}) \\ &\quad + (g_{\alpha\beta}^{-1}dg_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1}A_\alpha g_{\alpha\beta}) \wedge (g_{\alpha\beta}^{-1}dg_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1}A_\alpha g_{\alpha\beta}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -g_{\alpha\beta}^{-1}(dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1}(dg_{\alpha\beta}) - g_{\alpha\beta}^{-1}(dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1}A_\alpha g_{\alpha\beta} \\
&\quad + g_{\alpha\beta}^{-1}(dA_\alpha)g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}^{-1}A_\alpha dg_{\alpha\beta} \\
&\quad + g_{\alpha\beta}^{-1}(dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1}(dg_{\alpha\beta}) + g_{\alpha\beta}^{-1}A_\alpha g_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}^{-1}dg_{\alpha\beta} \\
&\quad + g_{\alpha\beta}^{-1}(dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1}A_\alpha g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1}A_\alpha g_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}^{-1}A_\alpha g_{\alpha\beta} \\
&= g_{\alpha\beta}^{-1}(dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha)g_{\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

この式は F_∇がベクトル束 $Hom(E \otimes \Lambda^2 M, E)$ の切断であることを示している．

$A_\alpha = \sum_i A_{\alpha,i}dx^i$であるとき $A_\alpha \wedge A_\alpha = \sum_{i<j}[A_{\alpha,i}, A_{\alpha,j}]\,dx^i \wedge dx^j$とも書ける．したがって $A_\alpha \in \mathfrak{g} \otimes \Lambda^1(TM)$ （$\mathfrak{g}$ はあるリー群のリー環，つまり行列の作るベクトル空間で括弧積で閉じたもの）とすると $A_\alpha \wedge A_\alpha \in \mathfrak{g} \otimes \Lambda^2(TM)$ である．これから次の定義が正当化される．

定義 1.2.5　ζを G 束，$\nabla = d + A_\alpha$をその G 接続とする．∇ の曲率を $F_\nabla = dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha \in \Gamma(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^2 M)$ で定義する．

ベクトル束の場合と同じ計算で上の定義で $dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha$たちがはり合って $\Gamma(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^2 M)$ の元を定めることがわかる．

また同じ計算でゲージ変換で曲率がどう変わるかもわかる．すなわち

補題 1.2.6　$h = (h_\alpha)$ が G 束のζゲージ変換とすると U_α上で $F_{h^*\nabla} = h_\alpha^{-1}F_\nabla h_\alpha$ が成り立つ．

この節の最初に書いた問題つまり接続がゲージ変換で 0 にできるかについては次のことが成り立つ．$I^n = [0,1]^n$とおく．

定理 1.2.7　$\nabla = d + A$ を I^n上の G 束のζ接続とする．(ζは自明である．) このとき次の二つは同値である．

(1) $F_\nabla = 0$.

(2) I^n上のゲージ変換gが存在し$g^*\nabla = d + 0$（自明な接続）となる.

この定理はフロベニウス (Frobenius) の定理の系であるがここでは直接証明してみよう.（フロベニウスの定理については [松島] p.144 参照.）(2)⇒(1) は明らかである.

(1)⇒(2) を証明するために次の補題（これは後にも用いる）を示す.

補題 1.2.8　Mを任意の多様体（境界があってもなくてもよい）ζをその上の任意のG束とする. $\pi : M \times (a,b) \to M$を射影, ∇ を$\pi^*\zeta$の任意のG接続とする. このとき$c \in (a,b)$に対して$M \times (a,b)$上のゲージ変換hがあって

(1) hは$M \times \{c\}$上恒等写像.

(2) $h^*\nabla$ を局所的に$d + A_\alpha$と書いたときA_αはdt成分を持たない. ここでtは(a,b)の座標である.

証明　$\{U_\alpha\}$がζの座標系のとき$\{U_\alpha \times (a,b)\}$は$\pi^*\zeta$の座標系になる. この座標系を使ってゲージ変換を$(h_\alpha)$で表すと$h^*\nabla$は$U_\alpha \times (a,b)$上$h_\alpha^{-1}\frac{\partial h_\alpha}{\partial t} \wedge dt + h_\alpha^{-1}A_\alpha h_\alpha$で与えられる. $A_\alpha = a_\alpha + b_\alpha dt$（$a_\alpha$は$dt$成分を持たない行列値1次微分型式で$b_\alpha$は行列値0次微分型式.）と表せる. したがって常微分方程式

$$h_\alpha^{-1}\frac{\partial h_\alpha}{\partial t} = -a_\alpha$$

の解(h_α)をとれば$h_\alpha^*\nabla$はdt成分をもたない. このような解で, $t = c$で単位行列になるものはただ一つ存在する. 一意性を使うとこれらの解は各々の$U_\alpha \cap U_\beta$上ではり合い$M \times (a,b)$上のゲージ変換を定める.　　　　証明終わり

補題のようなゲージ変換をすることを同時刻ゲージ (temporal gauge) をとるという.

さて補題を用いて定理 1.2.7(1)⇒(2) を次元に関する帰納法で証明しよう. 0次元の場合は明らかである. $n-1$次元の場合に証明されているとする. I^n上

の接続 $\nabla = d + A$ で曲率が 0 であるものを考える．帰納法の仮定から，ゲージ変換をすることで A の $I^{n-1} \times \{0\}$ への制限は 0 にできる．ここで補題 1.2.8 を用いると $I^{n-1} \times \{0\}$ 上 1 であるゲージ変換を使って A の dt 成分は 0 とできる．dt 成分が 0 の場合の曲率が 0 という方程式を書くと

$$\frac{\partial A}{\partial t} \wedge dt + F_A = 0$$

dt 成分が含まれる方だけ考えると $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$. A の $I^{n-1} \times \{0\}$ への制限は 0 であるから $A = 0$.　証明終わり

定理 1.2.7 により曲率 0 の接続は I^n 上ではゲージ変換で 0 に移される．一般の多様体上ではこのことは正しくない．

曲率 0 の接続のことを平坦接続 (flat connection) と呼ぶ．多様体上の平坦接続は基本群から構造群への準同型で分類される．このことを説明しよう．$\pi_1(M)$ を多様体 M の基本群とする．リー群 G に対して

$$R(M;G) = \frac{Hom(\pi_1(M), G)}{\sim}$$

とおく．ただし二つの準同型 $\rho_1, \rho_2 \in Hom(\pi_1(M), G)$ に対して $\rho_1 \sim \rho_2$ とは $g \in G$ が存在して任意の $\gamma \in \pi_1(M)$ に対して $\rho_1(\gamma) = g^{-1}\rho_2(\gamma)g$ が成り立つことをいう．(このとき ρ_1 と ρ_2 は共役であるという.)

定理 1.2.9　任意のリー群 G と多様体 M に対して，M 上の G 束とその上の平坦接続の組のゲージ同値類と $R(M;G)$ の元は 1 対 1 に対応する．

定理 1.2.9 の対応はホロノミー (holonomy) を用いて構成される．そこで平行移動 (parallel transform) について述べそれを用いてホロノミーを定義しよう．

M を多様体，E を構造群 G を持つベクトル束とする．$\ell : [a,b] \to M$ を区分的に微分可能な曲線とする．このとき ℓ に沿った E の切断とは引き戻し $\ell^* E$ の切断をいう．言い換えると ℓ に沿った E の切断 s とは $t \in [a,b]$ に対して $E_{\ell(t)}$ の元 $s(t)$ を対応させる（(区分的に）C^∞ 級の）写像をいう．ℓ に沿った E の切断全体を $\Gamma(\ell^* E)$ と書く．

定義 1.2.10　∇ を E の G 接続とする．このとき $s \in \Gamma(\ell^* E)$ が平行 (parallel) とは $\nabla_{\dot{\ell}} s = 0$ であることをいう．

ここで $\nabla_{\dot{\ell}} s$ は $[a,b]$ へ引き戻した接続についての共変微分である．一般に $f : N \to M$ なる C^∞ 級の写像と M 上の G 束 E とその上の G 接続があると，この接続を $f^* E$ の接続に引き戻すことができる．定義は次のとおりである．$\{U_\alpha\}$ をベクトル束 E の座標系を与える M の開被覆とする．U_α 上 $d + A_\alpha$ であるような接続を考えると，これの引き戻しは $f^{-1}(U_\alpha)$ 上 $d + f^* A_\alpha$ であるような接続である．($f^* E$ の座標系は $\{f_\alpha^{-1}(U_\alpha)\}$ であった．) $d + f^* A_\alpha$ たちがはりあわさること，すなわち定義 1.1.6 の座標変換の式を満たすこと，は $f^* E$ の変換系の定義式から計算すれば直ちにわかる．

補題 1.2.11　任意の $\ell : [a,b] \to M$, $s_0 \in E_{\ell(a)}$ に対して平行な切断 $s \in \Gamma(\ell^* E)$ で $s(a) = s_0$ なるものがただ一つ存在する．

証明　方程式 $\nabla_{\dot{\ell}} s = 0$ を（座標で）書き直すと常微分方程式になる．したがって常微分方程式の解の存在と一意性定理により補題は直ちに得られる．

証明終わり

補題 1.2.11 の記号を使って $P_\ell^\nabla(s_0) = s(b) \in E_{\ell(b)}$ とおく．この元 $P_\ell^\nabla(s_0)$ を $s_0 \in E_{\ell(a)}$ の曲線 $\ell : [a,b] \to M$ に沿った平行移動という．

逆に平行移動を与えると接続を決定できる．このことは後で用いるのでここで述べておこう．

補題 1.2.12　$E \to M$ をベクトル束，∇ をその接続とする．$\ell : [0,1] \to M$ を曲線，$s \in \Gamma(M; E)$ とする．$\ell_t^{-1} : [0,t] \to M$ を $\ell_t^{-1}(u) = \ell(t-u)$ とおき，この曲線に沿った $s(\ell(t)) \in E_{\ell(t)}$ の平行移動を $P_{\ell_t^{-1}}^\nabla s(\ell(t)) \in E_{\ell(0)}$ とおく．このとき

$$\frac{d}{dt} P_{\ell_t^{-1}}^\nabla s(\ell(t)) \bigg|_{t=0} = \nabla_{\dot{\ell}(0)} s$$

証明 $E_{\ell(0)}$の基底 $e_1(0),\cdots,e_k(0)$ を何でもよいから選ぶ．$\ell_t:[0,t]\to M$を ℓ の制限とし，これによる $e_i(0)$ の平行移動を $e_i(t)\in E_{\ell(t)}$とおく．

$e_1(t),\cdots,e_k(t)$ は $E_{\ell(t)}$の基底である．したがって $s_i:[0,1]\to\mathbf{R}$ が存在して $s(\ell(t))=\sum_i s_i(t)e_i(t)$ が成り立つ．

すると定義より $P^{\nabla}_{\ell_t^{-1}}s(\ell(t))=\sum_i s_i(t)e_i(0)$．よって

$$\frac{d}{dt}P^{\nabla}_{\ell_t^{-1}}s(\ell(t))\bigg|_{t=0}=\sum_i\frac{ds_i}{dt}(0)e_i(0)$$

一方

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot\ell(0)}s &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\left(\sum_i s_i(t)e_i(t)\right)\bigg|_{t=0}\\ &= \sum_i\frac{ds_i}{dt}(0)e_i(0)+\sum_i s_i(0)\cdot\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}e_i\bigg|_{t=0}\\ &= \sum_i\frac{ds_i}{dt}(0)e_i(0)\end{aligned}$$

証明終わり

さて ℓを p と qを結ぶ曲線，ℓ'を qと rを結ぶ曲線とする．$\ell\circ\ell'$をこの２本をつないだ p と rを結ぶ曲線とする．定義から容易に

$$P^{\nabla}_{\ell'}\circ P^{\nabla}_{\ell}=P^{\nabla}_{\ell\circ\ell'} \tag{1.2.2}$$

が示せる．このことからホロノミー群 $Hol(M,E,\nabla)$ が次のように定義される．まず（区分的に C^∞級の）曲線の集合$\Omega(M,p)$ を：

$$\Omega(M,p)=\left\{\ell:[a,b]\to M\;\middle|\;\begin{array}{l}a,b\in\mathbf{R}\\ \ell(a)=\ell(b)=p\end{array}\right\}$$

で定義する．このとき

$$Hol(M,E,\nabla)=\left\{P^{\nabla}_{\ell}\,\middle|\,\ell\in\Omega(M,p)\right\}$$

とおく．∇ が G 接続とするとき $Hol(M,E,\nabla)$ の元 P^{∇}_{ℓ}は G の元とみなすことができる．(このことの証明は省略する.) また (1.2.2) 式を使うと $Hol(M,E,\nabla)$

は G の部分群とみなすことができる．$Hol(M,E,\nabla)$ は起点 p の取り方によらない．(ただし共役で移り合う G の部分群どうしは同一視する．)

さて平坦接続の平行移動は次の基本的な性質を持つ．

補題 1.2.13　$\ell, \ell' : [a,b] \to M$ を p と q を結ぶ曲線とし ∇ を G 束 E の平坦接続とする．ℓ と ℓ' がホモトピックならばこの二つの定める平行移動は一致する．

証明　$\tilde{\ell} : [a,b] \times [0,1] \to M$ を ℓ と ℓ' の間のホモトピーとする．4角形 $[a,b] \times [0,1]$ への G 束 E の引き戻しおよびその上の接続 ∇ の引き戻しを考えると，定理 1.2.7 より適当なゲージ変換でこの接続を 0 にできる．ホロノミーはゲージ変換で不変であるから補題が示される．　　　　証明終わり

補題よりホロノミーは準同型 $\pi_1(M) \to G$ を導くことがわかる．これによって定理 1.2.9 の対応が与えられる．この対応が 1 対 1 であることの証明は省略する．

ホロノミーについてのもう一つの重要な結果を述べておく．

定理 1.2.14　多様体 M 上の G 束 E とその G 接続 ∇ を考えそのホロノミーを $H \subseteq G$ とおく．このとき E の構造群は H に簡約化され，また ∇ も H 接続から得られる．

略証　M の（多様体としての）座標系 U_i をとる．各座標近傍 U_i は D^n と可微分同相であるように選ぶ．この可微分写像を $\Phi_i : D^n \to U_i$ とし $\Phi_i(0) = p_i$ とおき，起点 p_0 と p_i を結ぶ曲線 ℓ_i を選んでおく．$p = \Phi_i(x) \in U_i$ に対して p_i と p を結ぶ曲線 ℓ_x^i を $\ell_x^i(t) = \Phi_i(tx)$ で定める．さて写像 $g_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ を

$$g_{ij}(x) = \left(P_{\ell_j}^{\nabla}\right)^{-1} \left(P_{\ell_x^j}^{\nabla}\right)^{-1} \left(P_{\ell_x^i}^{\nabla}\right) \left(P_{\ell_i}^{\nabla}\right)$$

で定める．これがある H 束の変換系を定めること，およびその H 束が G 束として E と同型であり，したがって E の構造群の H への簡約化を与えることの証明は省略する．(必要な場合には，後（第2章）で証明する．)

さて以上で接続と曲率についての基本的な性質の概略を述べた．より詳しくは [茂伊],[小林],[小野] などを見ていただきたい．

次に述べなければならない重要な話題として，ベクトル束の特性類 (characteristic class) およびチャーン (Chern)–ヴェイユ (Weil) 理論がある．これらを一般の次元で述べるにはかなりの紙数を要するのでここでは特別な場合に限って述べることにする．

まず複素ベクトル束の第 1 および第 2 チャーン類について述べよう．

Mを多様体，Eをその上の複素ベクトル束，∇ を Eの（複素）接続とする．Eの座標近傍 U_α上で $\nabla = d + A_\alpha$と書けるとすると，U_α上曲率 F_∇は $F_\alpha^\nabla = dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha$と表される．(ここで右辺は複素行列値の微分型式と考えている．) するとそのトレース (trace) $Tr(dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha)$ は複素数値微分 2 型式である．曲率の座標変換の式 $F_\alpha^\nabla = g_{\alpha\beta}^{-1} F_\beta^\nabla g_{\alpha\beta}$より $U_\alpha \cap U_\beta$上 $Tr(F_\alpha^\nabla) = Tr(F_\beta^\nabla)$ がわかる．したがって

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} Tr(dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha)$$

ははり合わさって M上の微分 2 型式を定める．これを (E, ∇) の第 1 チャーン型式 (first Chern form) と呼び $c^1(E, \nabla)$ と書く．

補題 1.2.15 $c^1(E, \nabla)$ は閉形式である．$(dc^1(E, \nabla) = 0)$

証明 U_α上で考えてよい．一般に行列値 k次微分型式 A と行列値 m 次微分型式 Bの間で関係式

$$Tr(A \wedge B) = (-1)^{km} Tr(B \wedge A) \tag{1.2.3}$$

が成り立つことに注意する．これから実は $Tr(dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha) = Tr(dA_\alpha)$．これより補題は明らかである． 証明終わり

第 1 チャーン型式の定めるド・ラーム (de Rham) コホモロジー類のことを第 1 チャーン類 (first Chern class) という．

補題 1.2.16　第1チャーン類 $[c^1(E,\nabla)]$ はベクトル束 E のみで定まり接続の取り方によらない．

証明　∇_1, ∇_2 を E の二つの接続とする．$M\times[0,1]$ 上に E を引き戻したものをやはり E と書く．$M\times[0,1]$ 上の接続 ∇ で $M\times\{0\}$ 上 ∇_1 に，$M\times\{1\}$ 上 ∇_2 に一致するものを作ることができる（証明略）．するとストークス (Stokes) の定理と補題 1.2.15 より M の任意の 2 サイクル Δ_2 に対して

$$\begin{aligned}\int_{\Delta_2} c^1(M,E,\nabla^1) - \int_{\Delta_2} c^1(M,E,\nabla^2) &= \int_{\partial(\Delta_2\times[0,1])} c^1(M\times[0,1],E,\nabla) \\ &= \int_{\Delta_2\times[0,1]} dc^1(M\times[0,1],E,\nabla) \\ &= 0\end{aligned}$$

したがってド・ラームの定理により $c^1(M,E,\nabla^1)$ と $c^1(M,E,\nabla^2)$ の表すコホモロジー類は同一である．　　証明終わり

第2チャーン類について述べる前にベクトル束の階数が1の場合に第1チャーン類の幾何学的意味を述べておく．E を向きの付いた多様体 M 上の階数が1の複素ベクトル束とする．E の切断 $s\in\Gamma(M;E)$ を次に述べる意味で0と横断的とする．

すなわち任意の $p\in M$, $s(p)=0$ に対して p の近傍 U 上のベクトル束 E の座標（自明化）を用いて $s|_U$ を U 上の複素数値関数とみなしたとき（E の階数が1であることに注意）p での $s|_U$ の微分 J_ps は $Hom_{\mathbf{R}}(T_pM,\mathbf{C}) = Hom_{\mathbf{R}}(T_pM,\mathbf{R}^2)$ の元としてその階数が2であるとする．

こう仮定すると集合 $s^{-1}(0)=\{p\in M|s(p)=0\}$ は（実）余次元2の M の部分多様体である．$s^{-1}(0)$ に向きを次のように定める．$p\in M$, $s(p)=0$ とする．$s^{-1}(0)$ の p での接空間は $J_ps\in Hom_{\mathbf{R}}(T_pM,\mathbf{C}) = Hom_{\mathbf{R}}(T_pM,\mathbf{R}^2)$ の核に一致する．したがって M の向き（つまり $T_p(M)$ の向き）と $\mathbf{C}=\mathbf{R}^2$ の標準的な向きは $T_ps^{-1}(0)$ の向きを定める．

したがって $s^{-1}(0)$ の基本ホモロジー類は $H_{m-2}(M;\mathbf{Z})$ の元を定める．

定理 1.2.17 $[s^{-1}(0)]$ は $[c^1(M,E)]$ のポアンカレ (Poincaré) 双対である.

証明は省略する.

さて次に第 2 チャーン類 (second Chern class) を定義する. まず:

$$s^2(\nabla) = \frac{1}{8\pi^2}Tr((dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha) \wedge (dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha)) = \frac{1}{8\pi^2}Tr(F_\nabla \wedge F_\nabla)$$

とおく. 曲率の座標変換公式により, $s^2(\nabla)$ は $U_\alpha \cap U_\beta$上ではり合い M上の微分型式を定める.

補題 1.2.18 $ds^2(\nabla) = 0$.

証明 補題 1.2.15 と同様に局所的に考えてよい. そこで U_α上で考えその上で $\nabla = d + A_\alpha$と書けるとしよう. チャーン–サイモンズ (Simons) 微分型式 $cs(A_\alpha)$ を次の式で定める.

$$cs(A_\alpha) = \frac{1}{8\pi^2}Tr\left(A_\alpha \wedge dA_\alpha + \frac{2}{3}A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha\right) \tag{1.2.4}$$

補題 1.2.18 は次のことから直ちに従う.

補題 1.2.19 $d\,cs(A_\alpha) = s^2(\nabla)$.

証明 (1.2.3) 式より

$$\begin{aligned} d\,cs(A_\alpha) &= \frac{1}{8\pi^2}Tr(dA_\alpha \wedge dA_\alpha + 2dA_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha) \\ &= \frac{1}{8\pi^2}Tr((dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha) \wedge (dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha)) \\ &= s^2(\nabla) \end{aligned}$$

($Tr(A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha) = -Tr(A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha) = 0$ に注意.)

証明終わり

補題 1.2.18 より $s^2(\nabla)$ は Mのド・ラームコホモロジー類を定めるが, 補題 1.2.16 と同様な議論によりこののド・ラームコホモロジー類は接続によらず複

素ベクトル束の同型類で定まる．

第2チャーン型式 $c^2(E,\nabla)$ は次の式で定義される．

$$c^2(\nabla) = s^2(\nabla) + \frac{1}{2}c^1(\nabla)\wedge c^1(\nabla)$$

これが閉形式で，またそれが表すド・ラームコホモロジー類は接続によらない．接続が局所的に対角行列

$$d + \begin{pmatrix} \sqrt{-1}a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{-1}a_k \end{pmatrix}$$

で表されるとすると（$a_1,\cdots,a_k$は実数値1形式）

$$\begin{aligned} c^1 &= -\frac{1}{2\pi}(da_1+\cdots+da_k) \\ c^2 &= \frac{1}{4\pi^2}\sum_{i<j} da_i\wedge da_j \end{aligned}$$

すなわちチャーン類は基本対称式に対応する．

次に第1ポントリャーギン (Pontryagin) 類を定義しよう．まずEを多様体上の向きの付いた実ベクトル束とする．E上に内積を定める．(言い換えると構造群の $SO(k)$ への簡約化を与える.）この上の計量接続（命題1.1.10の結論を満たす接続）∇ を考える．$E\otimes\mathbf{C}$ を考えると，これは複素ベクトル束で ∇ はその上の接続を与える．このとき

補題 1.2.20　$c^1(E\otimes\mathbf{C}) = 0$

証明　接続 ∇ で考えよう．∇ を局所的に $d+A_\alpha$と書くと，A_αは実反対称行列値1次微分型式である．したがって $Tr(dA_\alpha)=0$. つまり第1チャーン類はこの接続に対しては微分型式として0である．　証明終わり

$E\otimes\mathbf{C}$ の第2チャーン類は一般には0でない．$p^1(E) = -c^2(E\otimes\mathbf{C})$ とおいて，これを第1ポントリャーギン類と呼ぶ．ここでは証明しないがチャーン類，ポントリャーギン類は整係数コホモロジー類とみなせることが知られている．

次にオイラー (Euler) 類を定義する．Eを向きの付いた $2n$ 次実ベクトル束としその上の計量（内積）を決める．この計量に伴う計量接続を一つとり ∇ とする．∇ は局所的には $d+A_\alpha$と書き表され A_αは実反対称行列値 1 次微分型式である．

実反対称 $2n \times 2n$ 行列 A に対してそのパフィアン (Pfaffian)$\Delta(A)$ が次のように定義される．反対称行列を 2 次形式とみなす（つまり基底 $e^1, \cdots, e^{2n}$をとり，$\omega = \sum_{i<j} A_{ij} e^i \wedge e^j$を考える.）この n 乗の $e^1 \wedge \cdots \wedge e^{2n}$の係数の $n!$の 1 を$\Delta(A)$ とおく．式で書けば

$$n!\omega^n = \Delta(A) \cdot e^1 \wedge \cdots \wedge e^{2n}$$

これが基底によらないことは容易にわかる. (ついでに書くと$\Delta(A)^2 = \det A$ が成り立つ.）さて接続 ∇ のオイラー類を

$$e(\nabla) = \frac{1}{(2\pi)^n} \Delta(A_\alpha)$$

で定義する. (右辺が座標によらないことは容易に示せる.)

補題 1.2.21 $d\,e(\nabla) = 0$. オイラー類の定めるド・ラームコホモロジー類は接続の取り方によらない.

証明は省略する（[小林] 参照）.

0.3 節に述べたガウス (Gauss)–ボンネ (Bonnet) の定理は次のように述べられる.

定理 1.2.22 $\int e(TM, \nabla) = \chi(M)$

(つまり偶数次元の多様体のオイラー類の積分は多様体のオイラー数に一致する.)

このことは一般の（偶数階数・実）ベクトル束に次のように一般化される. (以下の議論はチャーン類に対するものと同様である.)

向きの付いた多様体 M上の向きの付いた偶数次ベクトル束 Eを考える．$s \in$

$\Gamma(M;E)$ を（チャーン類の定義に使ったのと同様の意味で）0 と横断的な切断とする．$s^{-1}(0) \subseteq M$ は次元が $\dim M - \mathrm{rank} E$ の部分多様体である．これの向きは M の向きおよび E の向きから定まる．

定理 1.2.23　$s^{-1}(0)$ の基本ホモロジー類は $[e(E)]$ のポアンカレ双対である．

証明は省略する（[MS] p.147 など参照）．定理 1.2.23 と定理 1.2.17 より複素直線束（1 次元束）を 2 次元の実ベクトル束とみなすと，そのオイラー類は第 1 チャーン類に一致することがわかる．(これと同様のことは実は高次の複素ベクトル束でも成立する．つまり次数 n の複素ベクトル束を $2n$ 次の実ベクトル束とみなすと第 n チャーン類がオイラー類に一致する．)

以上で特性類のうち本書で使うものをいくつか述べた．これらの事柄はより一般にチャーン–ヴェイユ理論として扱うこともでき，それは大変重要である．これについては [茂伊],[小林],[小野] などを見ていただきたい．

§ 1.3 スピン構造とディラック作用素

スピン構造については序章で名前だけ出した．ここではスピン構造とそれから得られるディラック作用素を定義し，また命題0.4.2を示す．スピン構造を数学的に一般に定義するにはクリフォード (Clifford) 代数が用いられる．スピン構造の話には一般の次元で通用することと低次元（2・3・4次元）に特徴的なことがある．本書のテーマは4次元であるので，ここでは一般のクリフォード代数について述べると同時に4・3・2次元の場合も述べる（しかし一般の次元の場合は証明を省略する）．まずクリフォード代数を定義しよう．Vを実数体上のベクトル空間とし，$\langle\rangle$ をその上の内積とする．内積は正定値とする．Vの正規直交基を $e_1, \cdots, e_k$とする．

定義 1.3.1 クリフォード代数$CL(V, \langle\ \rangle)$（または省略して$CL(V)$）とは $e_{i_1} \cdot \cdots \cdot e_{i_m}$, $m = 0, 1, \cdots, k, 1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq k$で張られる 2^k次元（実）ベクトル空間に次の式で定まる積構造を入れたものである．

(1.3.1.1)
$$e_i \cdot e_i = -1$$

(1.3.1.2)
$$e_i \cdot e_j = -e_j \cdot e_i \quad (i \neq j)$$

(1.3.1.1),(1.3.1.2) は次の式 (1.3) と同値である（このことの証明は読者に任せる）．

(1.3)
$$v \cdot v = -\langle v, v\rangle$$

ここで$v \in V$は$e_1, \cdots, e_k$の1次結合であるから$CL(V)$の元とみなせる．クリフォード代数は (1.3) を満たすような実数体上の代数（多元環）でVで生成されるもののうちで一番大きいものとして特徴付けられる．このことから$CL(V)$は基底$e_1, \cdots, e_k$の取り方によらない．より正確には

補題 1.3.2 $\varphi : V \to V$なる内積を保つ線形同型写像に対してそれを拡張する環同型$CL(\varphi) : CL(V) \to CL(V)$がただ一つ存在する．

証明は省略する．さて2・3・4次元の場合にクリフォード代数が何になるか調べてみよう．

2次元の場合：$e_1 = i$, $e_2 = j$, $e_1e_2 = k$とすると関係式 $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$が容易に確かめられる．$CL(\mathbf{R}^2)$ は $1, i, j, k$で張られるベクトル空間であるから結局これはハミルトン (Hamilton) の四元数 $\mathbf{H}$ に一致する．

3次元の場合：$CL(\mathbf{R}^3)$ は8次元で $\mathbf{H}$ の二つの直積 $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ に一致する．この同型は次のように与えられる．$e_1 \mapsto (i, i)$, $e_2 \mapsto (j, j)$, $e_3 \mapsto (k, -k)$.

4次元の場合：$CL(\mathbf{R}^4)$ は16次元で $\mathbf{H}$ を成分とする 2×2 行列全体 $M_2(\mathbf{H})$ に一致する．これを具体的に見るには次のようにすればよい．

$$e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad e_3 \mapsto \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix}, \quad e_4 \mapsto \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}.$$

と対応させる．これが (1.3.1.1),(1.3.1.2) を満たすことは容易に確かめられる．一方これらの積が $M_2(\mathbf{H})$ をベクトル空間として張ることがやはり直接計算してわかる．したがってこれは同型 $CL(\mathbf{R}^4) \cong M_2(\mathbf{H})$ を定める．

次にスピノル群 (Spinor group) $Spin(n)$ を定義する．

まずクリフォード代数 $CL(V)$ の中で Vの元偶数個の積で張られる部分空間を $CL_0(V)$, Vの元奇数個の積で張られる部分空間を $CL_1(V)$ と書く．関係式 (1.3.1.1),(1.3.1.2) は $CL_0(V)$ の元どうしの等号であるから，この分解 $CL(V) = CL_0(V) \oplus CL_1(V)$ は Vの内積を保つ自己同型で保たれる．また $CL_i(V) \oplus CL_j(V) \subseteq CL_{i+j}(V)$ （次数は2を法にして考える）が成立する．

次に$*: CL(V) \to CL(V)$ を $(e_{i_1} \cdots e_{i_m})^* = e_{i_m} \cdots e_{i_1}$で定める．これは $(x \cdot y)^* = y^* \cdot x^*$を満たす．さて

$$Spin(V) = \left\{ g \in CL_0(V) \,\middle|\, \begin{array}{l} g^*g = 1 \\ g^*vg \in V \quad \forall v \in V \end{array} \right\}$$

と定義する．$(x \cdot y)^* = y^* \cdot x^*$により $Spin(V)$ は（クリフォード代数のかけ算について）群をなすことが容易にわかる．$g \in Spin(V)$ について$\pi(g) \in GL(V)$

を$\pi(g)(v) = gvg^*$で定める．

$$\langle gvg^*, gv'g^* \rangle = -gvg^*gv'g^* = -gvv'g^* = g\langle v, v' \rangle g^* = \langle v, v' \rangle$$

ゆえ，$\pi(g) \in O(V)$（内積を保つ Vの自己同型全体）である．$O(V)$ には二つの連結成分がある．単位元を含む方を $SO(V)$ と書く．$\pm 1 \in Spin(V)$ であるが $\pi(-1) = I$である．よってπは $Spin(V)/\pm 1 \to O(V)$ を引き起こす．

補題 1.3.3　πによって同型 $Spin(V)/\pm 1 \to SO(V)$ が得られる．すなわち $Spin(V)$ は $SO(V)$ の 2 重被覆である．

証明の代わりに2・3・4 次元の場合を計算してみよう．2 次元の場合 $CL_0(\mathbf{R}^2)$ は1 と kで張られ，したがって $\mathbf{C}$ と同型である．その上で$*$は複素共役に一致する．したがって $Spin(\mathbf{R}^2)$ は長さ 1 の複素数全体すなわち $\{\cos\theta + \sin\theta k | \theta \in \mathbf{R}\}$ に一致する．これの $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}\cdot i \oplus \mathbf{R}\cdot j$ への作用は

$$\pi(\cos\theta + \sin\theta k)(ai + bj) = (\cos\theta + \sin\theta k)(ai + bj)(\cos\theta - \sin\theta k)$$

で与えられ簡単な計算によりこれは角 2θの回転であることが分かる．したがって$\pi : S^1 = Spin(\mathbf{R}^2) \to S^1 = SO(2)$ は 2 重被覆である．

次に 3 次元の場合を考えよう．$CL_0(\mathbf{R}^3) \subseteq CL(\mathbf{R}^3) = \mathbf{H}\times\mathbf{H}$ は $(1,1)$,$(i,-i)$, $(j,-j)$,(k,k) で張られ，したがって第 1 成分への射影によって $\mathbf{H}$ と同型である．このとき$*$は 4 元数の共役に一致する．よって $Spin(3)$ は長さ 1 の 4 元数全体に一致する．次に $\mathbf{R}^3 \subseteq CL(\mathbf{R}^3)$ は (i,i), (j,j), $(k,-k)$ で張られていて，これを第 1 成分への射影によって純虚の 4 元数全体とみなす．このとき $Spin(3)$ の作用は $Spin(3)$ の元を 4 元数とみなしたとき共役をとることに当たる（第 1 成分を考えれば明らか）．したがって$\pi : Spin(3) \to SO(3)$ は長さ 1 の 4 元数を純虚 4 元数に共役で作用させる $(\pi(g)(v) = gvg^{-1})$ ことによって得られる．$\mathbf{H}$ の元で純虚 4 元数と可換なのは $\mathbf{R}$ の元だけであるから$\pi : Spin(3) \to SO(3)$ による 1 の逆像は± 1 である．次元を数えて長さ 1 の 4 元数全体が連結であることを使うと補題 1.3.3 はこの場合に証明される．

長さ 1 の 4 元数全体のことを $Sp(1)$ と書く．上の同型は $Spin(3) \cong Sp(1)$ と

書ける．このときもう一つ同型な群がある．つまり $Spin(3) \cong Sp(1) \cong SU(2)$ が成立する．ここで $SU(2)$ は

$$\left\{ A \in GL(2;\mathbf{C}) \middle| {}^t\overline{A} = A^{-1}, \det A = 1 \right\}$$

であった．同型 $Sp(1) \cong SU(2)$ は次のようにして確かめられる．$\mathbf{H}$ を $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{H}$ の右からのかけ算で $\mathbf{C}$ 上の 2 次元ベクトル空間だとみなす．すると $\mathbf{H}$ の元の左からのかけ算は $\mathbf{C}$ 上の線形写像になる．特に絶対値 1 の元は $SU(2)$ の元であることが容易に確かめられる．

4 次元を考えよう．この場合は結論を先にいうと $Spin(4)$ は $Sp(1) \times Sp(1)$ に同型である．また $Sp(1) \times Sp(1) \subseteq \mathbf{H} \times \mathbf{H}$ の $\mathbf{R}^4 \cong \mathbf{H}$ への作用は，$(g_1, g_2)x = g_1 x g_2{}^{-1}$ （4 元数のかけ算）で与えられる．

以下これを確かめてみよう．前に与えた同型で $CL(\mathbf{R}^4) = M_2(\mathbf{H})$ の部分環 $CL_0(V)$ は $a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の形（a, b は 4 元数）の元全体に一致する．この元を $aI + bJ$ と書くことにしよう．$*$は a, b についての 4 元数の共役に一致する．したがって条件 $g^* g = 1$ は $|a|^2 + |b|^2 = 1$, $\bar{a}b + \bar{b}a = 0$ になる．そこで $aI + bJ \in Spin(4)$ は $aI + bJ = \frac{a}{|a|} I \cdot (|a| I + \frac{|a|b}{a} J)$ と分解する．すなわち $Spin(4)$ の元は $xI \cdot (yI + zJ)$, $|x| = 1$, $y \in \mathbf{R}_+$, $\bar{z} = -z$ と表される．

ここで $S^3 = \{x \in \mathbf{H} | |x| = 1\}$ とみなし，$\varphi_1 : S^3 \to Spin(4)$, $\varphi_2 : S^3 \to Spin(4)$ を

$$\varphi_1(x) = xI \cdot (\mathrm{Re}\ xI + \mathrm{Im}\ xJ)$$
$$\varphi_2(x) = xI \cdot (\mathrm{Re}\ xI - \mathrm{Im}\ xJ)$$

で定義する．すると $\varphi_1(x)$ の $\mathbf{R}^4 \cong \mathbf{H}$ への作用（すなわち，$\mathbf{R}^4 \subset CL(\mathbf{R}^4)$ とみなして $\varphi_1(x)$ による共役をとる）は x^2 の左からのかけ算であることが確かめられる（定義が i, j, k について対称ゆえ $x = \cos\theta + i \sin\theta$ としてよい．この場合は直接計算）．同様に $\varphi_2(x)$ の作用は x^2 の右からのかけ算である．これで $Spin(4)$ が $Sp(1) \times Sp(1)$ でその作用が左右からのかけ算であることが確かめられた．すると写像 $Spin(4) \to SO(4)$ で単位行列に移るのは $(-1, -1)$ だけである．よって $Spin(4) \to SO(4)$ が 2 重被覆であることもわかる．

以上の同型 $Spin(4) \cong Sp(1) \times Sp(1)$ はリー環レベルでは次のように見ることができる．$Spin(4)$ のリー環つまり $SO(4)$ のリー環は反対称 4×4 行列全体すなわち 2 次の外積代数$\Lambda^2(\mathbf{R}^4)$ と一致する．$\mathbf{R}^4$に内積を入れておきホッジ (Hodge) の$*$-作用素を定義する．このとき$*$は$\Lambda^2(\mathbf{R}^4)$ の元を自分自身に移し，また$*^2 = 1$ である．$\Lambda^2(\mathbf{R}^4)$ 上の$*$の± 1 固有空間を$\Lambda^2_\pm(\mathbf{R}^4)$ と書く．この分解 $\Lambda^2(\mathbf{R}^4) = \Lambda^2_+(\mathbf{R}^4) \oplus \Lambda^2_-(\mathbf{R}^4)$ が同型 $Spin(4) \cong Sp(1) \times Sp(1)$ をリー環レベルで見たものの双対である．

このことを確かめるために，$Sp(1) \times Sp(1)$ の第 1 成分の作用の微分を考えてみよう．$T_1Sp(1)$ は純虚四元数全体とみなせ，その作用は左からのかけ算である．したがって $(e_1, e_2, e_3, e_4) = (1, i, j, k)$ を $\mathbf{R}^4 = \mathbf{H}$ の基底とし (e^1, e^2, e^3, e^4) をその双対基底とすると，T_1S^3から$\Lambda^2(\mathbf{R}^4)$ への写像は

$$\begin{aligned} i &\mapsto e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 \\ j &\mapsto e^1 \wedge e^3 - e^2 \wedge e^4 \\ k &\mapsto e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3 \end{aligned}$$

であるから，これは$\Lambda^2_+(\mathbf{R}^4)$ への同型写像である．同様に第 2 成分も計算できる．

さてここで多様体のスピン構造を定義しよう．Mを向きの付いた多様体としよう．リーマン計量をとることで Mの接束 TMの構造群は $SO(n)$ と思うことができる．$M = \cup U_i$を開被覆，$g_{ij} : U_i \cap U_j \to SO(n)$ を TMの変換系とする．

定義 1.3.4 Mのスピン構造とは$\tilde{g}_{ij} : U_i \cap U_j \to Spin(n)$ なる写像たちで $\tilde{g}_{ij}\tilde{g}_{jk} = \tilde{g}_{ik}, \pi \circ \tilde{g}_{ij} = g_{ij}$を満たすもののことをいう．

言い換えるとスピン構造とは接束の構造群の $Spin(n)$ への簡約化のことである．(本当はこの場合は簡約化ではなく持ち上げといった方が語感が合うが，前に簡約化という訳語を当てたのでそのままにしておく．英語では reduce である.)

スピン構造の有無は座標系の取り方によらない．このことの証明は省略する．

同様に $SO(n)$ 束のスピン構造も定義できる．$E \to M$を $SO(n)$ 束とし g_{ij} :

$U_i \cap U_j \to SO(n)$ をその変換系としたとき，$\tilde{g}_{ij} : U_i \cap U_j \to Spin(n)$ なる写像たちで，$\tilde{g}_{ij}\tilde{g}_{jk} = \tilde{g}_{ik}$, $\pi \circ \tilde{g}_{ij} = g_{ij}$ を満たすもののことを $E \to M$ のスピン構造という．(あるいは $E \to M$ の構造群は $Spin(n)$ へ簡約化されるという．)

さてここで命題 0.4.2 を証明しよう．それには代数的位相幾何学を多少必要とする．それを知らない読者は以下の証明はとばしてもよい．

M を単連結な 4 次元多様体とし $b = \mathrm{rank} H_2(M;\mathbf{R})$ とする．

補題 1.3.5　M から 1 点を除いたものは b 個の S^2 を 1 点ではり合わせたもの $\vee_b S^2$ とホモトピー同値である．

証明には次のホモトピー論で有名な定理を使う（証明は [小中菅] 7 章 §1,[服部 3] §11.2 などにある）．

フレビッツ (Hurewicz) の定理　$\pi_i(X,p) = 0$,　$i = 1,\cdots,k-1$ とすると任意の元 $u \in H_k(X,p)$ に対して $\varphi : S^k \to X$ が存在して $\varphi_*[S^k] = u$ となる．

ホワイトヘッド (Whitehead) の定理　$f : X \to Y$ を単連結な空間の間の連続写像とし f はホモロジーに同型を導くとする．このとき f はホモトピー同値写像である．

さてフレビッツの定理により $f : \vee_b S^2 \to M$ で 2 次のホモロジーに同型を導くものが作れる．M から 1 点を除いたものは 0 次と 2 次にだけホモロジーを持つから f はホモロジーに同型を導く．よってホワイトヘッドの定理より f はホモトピー同値写像である．

さて $f : \vee_b S^2 \to M$ で M の接束を引き戻したものを η とおく．

補題 1.3.6　次の二つは同値である．

(1)　ηの構造群は $Spin(4)$ に簡約化される．

(2)　ηは自明なベクトル束である（つまり直積に同型である）．

証明　(2)⇒(1) は明らかであろう．(1)⇒(2) を示すには S^2上の $Spin(4)$ を構造群とする束が自明であることを示せばよい．ηを，S^2上の $Spin(4)$ を構造群とする束とする．$S^2 = D_1^2 \cup D_2^2$, $D_1^2 \cap D_2^2 \cong S^1 \times (0,1)$ とすると D^2は可縮だから D_1^2, D_2^2上ηは自明である．したがってこの二つを座標近傍にとることができ，その座標変換は $g_{21} : S^1 \times (0,1) \to Spin(4)$ で与えられる．ところが $Spin(4) \cong S^3 \times S^3$は単連結であるから，$g_{21}$は定値写像にホモトピックである．このことを使って$\eta$は自明であることが証明できる．　証明終わり

さて$\varphi : S^2 \to M$を $f : \vee_b S^2 \to M$のある一つの S^2への制限とし$\varphi_*[S^2] = u$ とおく．

補題 1.3.7　次の二つは同値である．

(1)　ηの構造群は $Spin(4)$ に簡約化される．

(2)　$Q(u,u) \equiv 0 \pmod 2$

ここでηはφ による Mの接束を引き戻しをさす．

証明　$\eta = TS^2 \oplus NS^2$（NS^2は$\varphi : S^2 \to M$の像の法ベクトル束）である．(φを微分可能な埋め込みでとれるかどうかは明らかでないが，はめ込み（すなわち S^2の各点の近傍で埋め込みであるもの）でとることは $2 \cdot 2 = 4$ ゆえ可能である（たとえば [田村 2],[足立] 参照）．したがって法ベクトル束は作ることができる．）NS^2の切断 s で $\{(x, s(x)) \in NS^2 | x \in S^2\}$ が $\{(x, 0) \in NS^2 | x \in S^2\}$ と横断的であるようなものをとると $Q(u,u) \equiv \#\{x \in S^2 | s(x) = 0\} \pmod 2$ が成り立つ．(右辺は$\varphi(S^2)$ を s に沿って少しずらしたものと$\varphi(S^2)$ の交点の数であり，これは左辺と一致する．)（$\varphi : S^2 \to M$は埋め込みとは限らないから NS^2は$\varphi(S^2)$ の近傍と可微分同相とは限らないのでこの議論は少し問題がある．し

かし$\varphi(S^2)$の自己交叉（$\varphi(p)=\varphi(q)$, $p\neq q$なる点の行き先）は$Q(u,u)$にそれぞれ±2の寄与をする（図1.3.1）．したがってmod 2で考える限り自己交叉を調べる必要はない.）

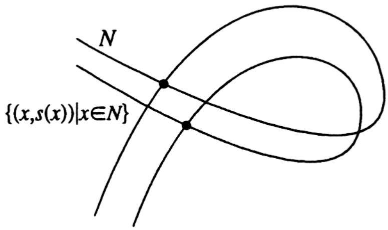


図 1.3.1

ところで，前節で述べたように$\chi(NS^2)\equiv\#\{x\in S^2|s(x)=0\}$ (mod 2). (ここでχはオイラー数を指す.)

さて$S^2=D_1^2\cup D_2^2$, $D_1^2\cap D_2^2\cong S^1\times(0,1)$とし$NS^2$の座標変換を$g_{21}:S^1\times(0,1)\to SO(2)$, TS^2の座標変換を$h_{21}:S^1\times(0,1)\to SO(2)$とする．$\eta$の座標変換は$g_{12}\oplus h_{21}:S^1\times(0,1)\to SO(4)$になる．よく知られているように（またこの場合は直接容易に示せるように）g_{21}の制限：$S^1\to SO(2)=S^1$の写像度はNS^2のオイラー数に一致し，h_{21}の制限：$S^1\to SO(2)=S^1$の写像度はTS^2のオイラー数（つまり2）である．したがって$g_{21}\oplus h_{21}:S^1\times(0,1)\to SO(4)$の定める$\pi_1(SO(4))=\mathbf{Z}_2$の元は$NS^2$のオイラー数に等しい.（ここで埋め込み：$SO(2)\to SO(4)$が基本群に全射$\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}_2$を導くことを用いた.）この元が0であることと$\eta$の構造群が$Spin(4)$に簡約化されることは同値であるから，$NS^2$のオイラー数が偶数であることと$\eta$の構造群は$Spin(4)$に簡約化されることは同値である.　　　　証明終わり

さて命題0.4.2の証明をしていたのだった．まずMがスピン構造を持つとしよう．すると補題1.3.7の(1)が成立する．よって補題により$Q(u,u)\equiv0$ (mod 2)が$H_2(M;\mathbf{Z})$のb個の生成元uに対して成立する．よって$Q(u,u)\equiv0$ (mod 2)

は常に成り立つ.

逆に $Q(u,u) \equiv 0 \pmod 2$ を仮定しよう. すると補題 1.3.6, 補題 1.3.7 より $f : \vee_b S^2 \to M$による Mの接束の引き戻しは自明である. ここでファイバー束の理論でよく知られている次の事実を用いる.

$f : X \to Y$をホモトピー同値写像としη_1, η_2を Y上のベクトル束とすると, $f^*(\eta_1) \cong f^*(\eta_2)$ と$\eta_1 \cong \eta_2$は同値である.

証明は省略する([志賀] §2.2,[小中菅] 2 章 §2,[服部 3] p.321, [足立] p.108,[St] §11 参照). この事実から Mから 1 点を除いた空間の接束は自明であることがわかる(このことを Mは概平行 (almost parallelizable) であるという).

したがって $M = (M - p_0) \cup D^4$とおきこれを TMの座標系と考えることができる. このとき変換系は $g : (M - p_0) \cap D^4 \to SO(4)$ で与えられる. $(M-p_0) \cap D^4 \cong S^3 \times (0,1)$ は単連結であるから gを$\tilde{g} : (M-p_0) \cap D^4 \to Spin(4)$ に持ち上げることができる. すなわち Mはスピン多様体である. 以上で命題 0.4.2 の証明が終わった.

ここで 0.4 節で述べた $K3$ 曲面についての命題 0.4.6 の証明を完成しておこう. 残っていたのは $K3$ 曲面の交叉形式が II 型であること, 言い換えれば $K3$ 曲面にスピン構造が入ることであった. これを示すには($K3$ 曲面は単連結であるから)任意の $f : S^2 \to X$ (Xは $K3$ 曲面)に対して, fによる接ベクトル束 TXの引き戻し f^*TXが自明であることを示せばよい. $K3$ 曲面は複素多様体であるから TXは複素ベクトル束の構造を持つ. 曲面(実 2 次元多様体)上の複素ベクトル束が自明であるための必要十分条件はその第 1 チャーン類(この場合は 2 次元多様体なので数である)が 0 であることである. ところで一般に階数 n の複素ベクトル束 Eの第 1 チャーン類は$\Lambda^n E$の第 1 チャーン類に等しい(これは定義より明らか). したがって$\Lambda^2 TX$(ここで外積は複素ベクトル束としての外積)の fによる引き戻しが自明であることを示せば十分である. ところが補題 0.4.31 より$\Lambda^2 TX$自身が自明である. これで命題 0.4.6 の証明は完成した.

これまで接ベクトル束についてそのスピン構造と特性類の関係を調べてきた．そのうち多くのことは接ベクトル束でない場合も成立する．それらをここで整理しておこう．それをするとスティーフェル (Stiefel)–ホイットニー (Whitney) 類の定義が（1次と2次の場合に）できる．

まず多様体を少し一般化して必ずしも単連結でない空間 M を考えよう．M 上の実ベクトル束 E をとる．まず E の第1スティーフェル–ホイットニー類，$w^1(E) \in H^1(M;\mathbf{Z}_2)$ を定義しよう．$H^1(M;\mathbf{Z}_2) \cong Hom(\pi_1(M),\mathbf{Z}_2)$ であった．そこで $\pi_1(M)$ の元を表す道 $\ell : S^1 \to M$ をとろう．するとこの写像による E の引き戻しは S^1 上の実ベクトル束になる．S^1 上の実ベクトル束の同型類は2種類だけでそれはベクトル束に向きが付くかどうかによってのみ決まる.（このことを見るにはたとえばベクトル束に何でもいいから接続をとる．するとホロノミー $\in GL(n;\mathbf{R})$ が定まる．$GL(n;\mathbf{R})$ はちょうど二つの連結成分を持つ．ホロノミーは連続的に変形することができるので，結局どちらの連結成分に属しているかで二つの場合しかない.）そこでこの引き戻しが自明かどうか（=向き付け可能かどうか）で $w^1(E)(\ell) = 0$ または1と定める．こう定義したとき $w^1(E) : \pi_1(M) \to \mathbf{Z}_2$ が準同型であることの証明は読者に任せる．

さて次に第2スティーフェル–ホイットニー類，$w^2(E) \in H^2(M;\mathbf{Z}_2) \cong Hom(H_2(M;\mathbf{Z}_2),\mathbf{Z}_2)$ を定義しよう．簡単のため E の第1スティーフェル–ホイットニー類は0とする.（一般の場合は E とスティーフェル–ホイットニー類の等しい実直線束 L をとり $L \oplus E$ に以下の構成を適用し公式 $w^2(E \oplus F) = w^2(E) + w^2(F) + w^1(E)w^1(F)$,$w^2(L) = 0$ を使えばよい.）$H_2(M;\mathbf{Z}_2)$ の元を表す曲面 $\Sigma \subseteq M$ をとろう．Σ には幾つかの閉曲線の和集合 Σ^1 が含まれこれを1点につぶすと Σ は2次元球面 S^2 になる．第1スティーフェル–ホイットニー類は0であるから E の Σ^1 への制限は自明である．したがって Σ^1 上で E をつぶすことで S^2 上のベクトル束ができる．先ほど述べたように S^2 上の実ベクトル束の同型類は $\pi_1(SO(N))$ の元に1対1に対応する．ベクトル束の階数が3以上ならこの基本群は $\mathbf{Z}_2$ である.（すなわちベクトル束は自明か自明でないかの2通りである.）$w^2(E)([\Sigma])$ をそれに従って0または1と定める．こう定義したとき $w^2(E) : H_2(M;\mathbf{Z}_2) \to \mathbf{Z}_2$ が準同型であることの証明は読者に任せる．第3以後のスティーフェル–ホイットニー類については [中岡],[MS],[田村 2] などをみよ．

命題 1.3.8 実ベクトル束 E に対して次の二つの条件は同値である．

(1) $w^1(E) = w^2(E) = 0$

(2) E はスピン構造を持つ

証明は省略するが，たとえば M が単連結 4 次元多様体の場合は補題 1.3.6 の証明と同じである．

ベクトル束の階数が 3 のときは $Spin(3) = SU(2)$ からスピン構造を持つ 3 次の実ベクトル束と $SU(2)$ 束とは 1 対 1 に対応する．後の節でいろいろ必要になるので，この対応を具体的に述べておこう．まず 4 次元多様体 X 上の $SU(2)$ 束 ζ から出発しよう．これのファイバーは $\mathbf{C}^2$ である．これから $SO(3)$ 束である実の 3 次元ベクトル束 E を作らなければならない．これは ζ の変換系を $g_{ij} : U_i \cap U_j \to SU(2)$ としたとき，2 重被覆 $\Psi : SU(2) \to SO(3)$ を用いて，$\Psi \circ g_{ij} : U_i \cap U_j \to SO(3)$ を変換系として得られる．3 次元の場合の Ψ は前に計算した．これは $SU(2)$ を長さ 1 の四元数全体とし，純虚四元数全体を $\mathbf{R}^3$ としたとき，四元数のかけ算による共役で与えられた．これは次のようにもみなせる．純虚四元数全体は長さ 1 の四元数全体の作る多様体の 1 での接空間と同一視できる．すなわち $\mathbf{R}^3$ は $SU(2)$ のリー環 $su(2)$ である．このとき四元数のかけ算による共役はリー環への普通の共役に一致する．すなわち Ψ は共役表現である．共役表現から得られる束を $Ad\,\zeta$ と書いたが，すると $E = Ad\,\zeta$ である．

このことを使って次の命題を証明する．

命題 1.3.9 $p^1(E) = -4c^2(\zeta)$

証明 ポントリャーギン類の定義に戻って $E \otimes \mathbf{C}$ のチャーン類を調べる．これは $SU(2)$ の共役表現の複素化 $Ad\,\zeta \otimes \mathbf{C}$ である．$SU(2)$ を普通に 2×2 行列とみなすと，そのリー環は $\{A | {}^t\bar{A} = -A, \mathrm{Tr}\,A = 0\}$．この複素化は $\{A | \mathrm{Tr}\,A = 0\}$ でしたがって，

$$Hom(\zeta, \zeta) = \mathbf{C} \oplus (Ad\,\zeta \otimes \mathbf{C})$$

よって，$p^1(E) = -c^2(Ad\,\zeta\otimes\mathbf{C}) = -c^2(Hom(\zeta,\zeta))$．$c^2(Hom(\zeta,\zeta)) = c^2(\zeta\otimes\zeta^*)$ である．一方 $c^2(\zeta\otimes\zeta^*) = 4c^2(\zeta)$ が（コホモロジーをとる前の微分型式レベルで）次のようにしてわかる．テンソルの間の等式であるから各点で考えてよい．したがって曲率を対角化してよい．すなわち

$$F_\zeta = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$

とできる．すると

$$F_{\zeta\otimes\zeta^*} = \begin{pmatrix} 2a & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & -2a \end{pmatrix}$$

（リー環の作用であるから，行列 A のテンソル積$\zeta\otimes\zeta^*$への作用は $A\otimes 1-1\otimes A$.）この 2 次の対称式をとれば $c^2(\zeta\otimes\zeta^*) = 4c^2(\zeta)$.　　証明終わり

命題 1.3.9 は特に 4 次元多様体上のスピン構造のはいる 3 次の実ベクトル束の第 1 ポントリャーギン類は 4 で割りきれることを主張する．これを一般化するのが次の補題である．

補題 1.3.10　Eを閉 4 次元多様体上の 3 次の実ベクトル束とし多様体および E には向きが付いているとする．このとき

$$\left(w^2(E)\right)^2 \equiv p^1(E) \pmod 4$$

この補題の左辺は説明を要するであろう．というのはスティーフェル–ホイットニー類は $\mathbf{Z}_2$上のコホモロジー類であるから，とりあえず左辺は 2 を法としてしか値が決まらない．本当は一般に $H^2(X;\mathbf{Z}_2) \to H^4(X;\mathbf{Z}_4), u \mapsto u^2$なる写像があるのであるが，ここではそれは定義せず Xが単連結として以下のように考える．Xが単連結であると $H^2(X;\mathbf{Z}) \to H^4(X;\mathbf{Z}_2)$ は全射である．これで $w^2(E)$ を持ち上げたものを $u \in H^2(X;\mathbf{Z})$ とすると，補題の主張は

$$u^2 \equiv p^1(E) \pmod 4$$

である．この式は持ち上げ u によらずに意味がある．つまり別の持ち上げ u'をとると，$u' = u + 2v$ゆえ，$u'^2 \equiv u^2 \pmod 4$ である．補題 1.3.10 の証明は第 5 章（そこで補題が必要になる）に持ち越す．

さらに次のことも述べておこう．

命題 1.3.11　向きの付く 4 次元多様体上の階数 3 の向きの付く実ベクトル束の同型類は w^2, p^1で定まる．また$\left(w^2(E)\right)^2 \equiv p^1(E) \pmod 4$ であるとき，これらを特性類とする実ベクトル束が一意に存在する．

証明は $w^2 = 0$ のとき（つまり $SU(2)$ 束のとき）のみ行う．簡単のため M は単連結とする．すると接ベクトル束のとき示したようにベクトル束は Mから 1 点を除いたものの上で自明である．したがって Eの座標系で二つの開集合からなり，その交わりが $S^3 \times (-1,1)$ であるものが存在する．この座標変換は $S^3 \times (-1,1) \to SU(2) = S^3$ なる写像でそのホモトピー類は$\pi_3(S^3) = \mathbf{Z}$ の元である．この元は実は第 2 チャーン類であるので命題は直ちに得られる．

一般の場合の証明は §5.1 を見よ．

さて次にディラック作用素 (Dirac operator) について述べよう．そのためにはクリフォード代数またはスピノル群のスピン表現について述べる必要がある．補題 1.3.3 で述べたように $Spin(V)$ は $SO(V)$ の 2 重被覆で，特に準同型$\pi : Spin(V) \to SO(V)$ が存在する．したがって $SO(V)$ の表現はすべて $Spin(V)$ の表現である．$Spin(V)$ の表現のほとんどはこのようにして得られる．しかしそのようには書けない表現が幾つか存在する．これらがスピン表現 (Spin representation) である．

$Spin(V)$ を $CL(V)$ にクリフォード代数のかけ算で作用させて，$CL(V)$ を $Spin(V)$ の表現空間とみなす．この表現を既約表現に分解したときの成分がスピン表現である．

命題 1.3.12　$CL(V)$ 加群として $CL(V) \otimes \mathbf{C}$ は $2^{\left[\frac{n}{2}\right]}$個の互いに同型な表現$\Delta$の直和である．($\left[\frac{n}{2}\right]$は$\frac{n}{2}$以下である整数のうちで一番大きいもの.)

n が偶数ならばΔは既約である．

n が奇数ならば$\Delta \cong \Delta^+ \oplus \Delta^-$と二つの既約表現の和に分解する．$\Delta_\pm$は既約である．

略証　$j = 1, \cdots, [(n-1)/2]$ に対して $Q_j : CL(\mathbf{R}^n) \to CL(\mathbf{R}^n)$ を $Q_j(x) = xe_{2j-1}e_{2j}$で定義する ($e_1, \cdots, e_n$は$\mathbf{R}^n$の普通の基底)．$Q_j^2 = -1$．W_j^+,W_j^-をQ_jの固有値$\pm\sqrt{-1}$に属する固有空間とすると，$W_j^+ e_{2j-1} = W_j^-$ゆえ，$\dim W_j^+ = \dim W_j^-$である．また $Q_jQ_i = Q_iQ_j (i \neq j)$ が成り立つから Q_jたちは同時対角化可能である．したがって$\vec{\varepsilon} = \left(\varepsilon_1. \cdots, \varepsilon_{[n-1/2]}\right) \in \{\pm 1\}^{[(n-1)/2]}$に対して$W_{\vec{\varepsilon}} = \bigcap W_j^{\varepsilon_j}$とおくと，$W_{\vec{\varepsilon}}$はすべて同じ次元で，また $W_j^+ e_{2j-1} = W_j^-$より (左) $CL(\mathbf{R}^n)$ 加群としてすべてお互いに同型である．これをΔとする．

n が偶数の場合にΔが既約であることの証明は省略する．

n が奇数の場合を調べるために$\gamma = e_1 \cdots e_n$と置く．

$$\gamma^2 = \begin{cases} -1 & n \equiv 1, 2 \pmod 4 \\ +1 & n \equiv 3, 4 \pmod 4 \end{cases} \tag{1.3.1}$$

がわかる．また

$$\gamma e_i = (-1)^{n-1} e_i \gamma \tag{1.3.2}$$

もわかる．(1.3.2) より n が奇数の場合γは $CL(\mathbf{R}^n)$ の中心に含まれる．

$n \equiv 3 \pmod 4$ の場合Δの中のγの± 1 の固有空間を考えるとこれは$CL(\mathbf{R}^n)$不変である．これらを$\Delta_\pm$とおく．$\Delta_\pm$の既約性の証明は省略する．

$n \equiv 1 \pmod 4$ のときはΔの中のγの$\pm\sqrt{-1}$の固有空間を考えてこれを$\Delta_\pm$とおけばよい．　証明終わり

以上はクリフォード代数上の加群としての分解であったがスピノル群上の分解も考える必要がある．これをみるには $Spin(n) \subseteq CL_0(\mathbf{R}^n)$ であったことを思い出す．すると

補題 1.3.13　n が偶数のときΔは $CL_0(V)$ 上$\Delta \cong \Delta^+ \oplus \Delta^-$なる二つの既約

表現の和に分かれる．どの n に対しても $\Delta_\pm$ は $Spin(n)$ の既約表現である．n が偶数の場合 Δ_+ と Δ_- は $Spin(n)$ の表現として異なっている．n が奇数の場合 $Spin(n)$ の表現として $\Delta_+ \cong \Delta_-$．

補題の分解を構成するには (1.3.1) により γ が $CL_0(V)$ の元と可換であることに注意して命題 1.3.12 の証明と同じ構成をすればよい．

既約性と n が偶数の場合の $\Delta_+ \not\cong \Delta_-$ の証明は省略する．n が奇数の場合 $\Delta_+ \cong \Delta_-$ なる同型は $v \mapsto ve_n$ で与えられる．(Q_j たちとこの同型は可換であることに注意．また (1.3.2) より γ と反可換．)

Δ をスピン表現，$\Delta_\pm$ を 1/2 スピン表現 (half spin representation) と呼ぶ．(n が奇数の場合 $\Delta_+ \cong \Delta_-$ の方をスピン表現と呼び Δ と書く流儀もある．)

$n = 2, 3, 4$ の場合を計算してみよう．

$n = 2$ とすると，$CL(\mathbf{R}^2) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{H} \otimes \mathbf{C} = M(2; \mathbf{C})$（複素数値 2×2 行列全体.）この普通の 2 次表現がスピン表現である．

$Spin(2) = S^1$ を $CL(\mathbf{R}^2) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{H} \otimes \mathbf{C} = M(2; \mathbf{C})$ の元とみなすと，この群は

$\begin{pmatrix} e^{\sqrt{-1}t} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1}t} \end{pmatrix}$ なる形の行列全体である．Δ_+ は $\mathbf{C} \oplus 0$,Δ_- は $0 \oplus \mathbf{C}$ である．

（この場合 Δ_+,Δ_- は $\mathbf{R}$ 上では定義できず Δ は $\mathbf{R}$ 上は既約である.）

$n = 3$．$CL(\mathbf{R}^3) \otimes \mathbf{C} = (\mathbf{H} \times \mathbf{H}) \otimes \mathbf{C} = M(2; \mathbf{C}) \times M(2; \mathbf{C})$．したがってこれには（直積分解に従い）$\Delta_\pm$ 二つの表現がある．(この分解は実数上で定まっている.）$Spin(3) = Sp(1)$ は $CL(\mathbf{R}^3) = (\mathbf{H} \times \mathbf{H})$ に埋め込まれていたが補題 1.3.3 の例示中に述べたようにこの埋め込みで第 1 成分と第 2 成分は i, j の符号が変わる．したがって Δ_+ と Δ_- は k についての共役で同型になり $Sp(1)$ の $\mathbf{H}$ への左からのかけ算である．

$n = 4$．$CL(\mathbf{R}^4) \otimes \mathbf{C} = M(2; \mathbf{H}) \otimes \mathbf{C} = M(4; \mathbf{C})$ である．これは一つの既約表現（普通の 4×4 行列としての表現）をもつ．$CL(\mathbf{R}^4) \cong M(2; \mathbf{H})$ の表現とみるとこれは 4 元数値 2×2 行列の表現としてもよい．これを分解するには

$\gamma = e_1 \cdots e_4$の固有空間に分解すればよいのだが，計算すると

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

よってΔ_+の $\mathbf{H}$ 上の基底は$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.（ここで$\Delta \cong \mathbf{H}^2$は $\mathbf{H}$ の右からのかけ算で $\mathbf{H}$ ベクトル空間とみなしている.

$Spin(4) = Sp(1) \times Sp(1)$ の$\Delta_+ \cong \mathbf{H}$ への作用を計算しよう．補題 1.3.3 の例示で述べたように $Sp(1) \times Sp(1) \cong Spin(4)$ なる同型は，$(x^2, 1) \mapsto \varphi_1(x) = xI \cdot (\mathrm{Re}\ xI + \mathrm{Im}\ xJ)$, $(1, y^{-2}) \mapsto \varphi_2(y) = yI \cdot (\mathrm{Re}\ yI - \mathrm{Im}\ yJ)$ で与えられた. 素直に計算すると$\varphi_1(x)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\varphi_2(y)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = y^2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. よって $Spin(4) = Sp(1) \times Sp(1)$ の$\Delta_+ \cong \mathbf{H}$ への作用は第 2 成分の左からのかけ算である.

同様に$\Delta_- \cong \mathbf{H}$ は第 1 成分の左からのかけ算である.

前に注意したように $Sp(1) \cong SU(2)$ と同一視すると，$\mathbf{H}$ への左からのかけ算は，$SU(2)$ の普通の行列表現に一致する.

さて次にディラック作用素を定義しよう．Mをスピン多様体とする．すると Mのスピン構造から座標系 $\cup U_i = M$と変換系$\tilde{g}_{ij} : U_i \cap U_j \to Spin(n)$ で $\pi : Spin(n) \to SO(n)$ との合成がMの接ベクトル束の変換系となっているものがある．すると$\tilde{g}_{ij} : U_i \cap U_j \to Spin(n)$ とスピン表現$Spin(n) \to GL(\Delta)$ の合成を変換系とするベクトル束が定まる．これをスピン束 (spinor bundle) といい$\Delta(M)$ で表す．これをさらに$\Delta \cong \Delta^+ \oplus \Delta^-$にともない$\Delta(M) \cong \Delta^+(M) \oplus \Delta^-(M)$ と分解する．これら二つのベクトル束$\Delta^+(M)$,$\Delta^-(M)$ を正および負のスピン束と呼ぶ.

一方接ベクトル束とその計量の組 $(T_p(M), g)$ からクリフォード代数$CL(T_pM)$ が定まる．これを点 p を動かして寄せ集めることにより，ベクトル束 $CL(TM)$ が定まる．このベクトル束のファイバーには多元環の構造が入っており，この構造は p を動かしたときそれに滑らかに依存する．このことから切断の全体 $\Gamma(CL(TM))$ は多元環になる.

補題 1.3.14　$\Gamma(\Delta(M))$ 上に$\Gamma(CL(TM))$ 加群の構造が存在する．

証明　各点で考えると，$CL(T_pM)$ は$\Delta(M)$ の p でのファイバーに作用する．したがってこの作用が座標変換と整合的であることを示せばよい．$p \in U_i \cap U_j$ としスピン構造が定める座標変換を $g = \tilde{g}_{ij}(p) \in Spin(T_pM)$ とする．$Spin(T_pM)$ の T_pMへの作用は$\pi : Spin(T_pM) \to SO(T_pM)$ を通して行われるから，これは $g \circ v = gvg^{-1}$と表される．(ここで T_pMを $CL(T_pM)$ に埋め込んで考えており，右辺はクリフォード代数のかけ算である.) したがって $Spin(T_pM)$ の $CL(T_pM)$ への作用も同じ式 $g \circ v = gvg^{-1}$で与えられる．

一方 $Spin(T_pM)$ の$\Delta(T_pM)$ への作用はクリフォード代数の左からのかけ算である．(ここで$\Delta(T_pM)$ は $CL(T_pM)$ の直和因子であった.)

したがって $x_i \in \Delta(T_pM), v_i \in CL(T_pM)$ が U_i 座標での表示とするとその積の U_i座標での表示は v_ix_iである．一方 x_i, v_iの U_j座標での表示はそれぞれ gx_i, gv_ig^{-1}であるからこの積は gv_ix_iである．これは v_ix_iの U_j座標での表示である．したがって積は座標変換不変である．　証明終わり

さらに次のことがわかる．

補題 1.3.15　n が偶数であるとき，補題 1.3.14 の作用は$\Gamma(TM) \otimes \Gamma(\Delta^+(M)) \to \Gamma(\Delta^-(M))$ および$\Gamma(TM) \otimes \Gamma(\Delta^-(M)) \to \Gamma(\Delta^+(M))$ を導く．n が奇数であるときは$\Gamma(TM) \otimes \Gamma(\Delta^+(M)) \to \Gamma(\Delta^+(M))$ および$\Gamma(TM) \otimes \Gamma(\Delta^-(M)) \to \Gamma(\Delta^-(M))$ が導かれる．

証明　n が偶数であるとき $e_i\gamma = -\gamma e_i$であることから前半が示される．n が奇数であるとき$\Delta_\pm$が $CL(\mathbf{R}^n)$ 加群であることから後半は明らか．　証明終わり

さてディラック作用素を定義するのにもう一つ注意が必要である．前に述べたように G 束の接続とは G のリー環に値を持つ座標近傍上の 1 型式たちで，しかるべき意味ではり合わさっているもののことであった．二つのリー群 $SO(n)$ と $Spin(n)$ は同じリー環を持っている．(同型は$\pi : Spin(n) \to SO(n)$ の微分で与えられる.) したがってある $SO(n)$ 束の構造群が $Spin(n)$ へ簡約化可能であ

るとき，$SO(n)$ 束の接続と $Spin(n)$ 束の接続は1対1に対応する.

多様体の接束とそのスピン構造の場合を考える. 多様体にはリーマン計量が与えられているのであった. このときその接束にはレヴィ(Levi)–チヴィタ (Civita) 接続と呼ばれる標準的な接続が存在する.（定義は省略する. 微分幾何のすべての教科書に載っている.）したがってそのスピン束にも接続が定まる.（すなわちレヴィ– チヴィタ接続から決まる $SO(n)$ のリー環値の1型式を，$Spin(n)$ のリー環値と思い直して，これをスピン表現により $End(\Delta)$ の元と見る. この接続はスピン束Δに自然に定まる計量を保つ.）以下断らずにスピン束にはこの接続を入れておく. 次元が偶数のときは$\Delta^{\pm}$にもそれぞれ接続が定まる.

さてこれでディラック作用素を定義できる.

定義 1.3.16　ディラック作用素 $\mathcal{D}:\Gamma(M;\Delta(M))\to\Gamma(M;\Delta(M))$ を

$$\mathcal{D}(s)=\sum_{i=1}^{n}e_i\cdot\nabla_{e_i}s$$

で定義する. ここで $e_i, i=1,\cdots,n$ は $T_p(M)$ の正規直交基，∇_{e_i}は上で説明した接続，・はクリフォード代数のかけ算である.

今まで証明してきたことを用いると，ディラック作用素の定義を正当化するには上の定義式の右辺が正規直交基のとり方によらないことを示せば十分である. この証明は読者に任せる. 補題 1.3.15 より偶数次元の場合ディラック作用素は

$$\mathcal{D}^{\pm}:\Gamma(M;\Delta^{\pm}M))\to\Gamma(M;\Delta^{\mp}(M))$$

を導くことがわかる.

最後に一言係数付きの場合について述べておく. すなわち Mにベクトル束 E とその計量を保つ接続が与えられているとする. このときテンソル積$\Delta\otimes E$上の接続が自然に定まる. これを用いるとディラック作用素 $\mathcal{D}:\Gamma(M;\Delta\otimes E)\to\Gamma(M;\Delta\otimes E)$ が定義 1.3.16 と同じ式で定まる. これを係数付きディラック作用素と呼ぶ.

第2章　ゲージ理論概説

§ 2.1　ドナルドソン不変量の概観

前節まででベクトル束とその上の接続などについての必要な準備を述べた．この節ではゲージ理論の考え方の一端を述べるため，ドナルドソンの不変量についてその定義の考え方を述べてみたい．(この定義を数学的に正確なものにするのは次節以後の目標である.)

まず高次元の微分位相幾何学を少し思い出そう．(高次元の) 多様体 M_1, M_2 でホモトピー型が一致するものに対して，この二つを可微分同相の意味で区別することを考える．そのための不変量を構成するのに代数的位相幾何学を用いる．ただし M_1, M_2 自身のホモトピー不変量ではなく接ベクトル束の不変量 (特性類) を用いる．言い換えれば多様体の可微分構造がその接ベクトル束を自動的に定めることを用いる．次元が高い場合，接ベクトル束の特性類は相当に強力な不変量で，サリヴァン (Sullivan) の定理によると (単連結な場合) 多様体の可微分同相類は有限個の違いを除いてこれで決定される．

4次元では事情が異なる．実際同じ特性類をもつお互いに可微分同相でない無限個の多様体の族が存在することが知られている．これらを区別するのに用いられるのがドナルドソン (Donaldson) の不変量である．ドナルドソンの不変量もやはり多様体の可微分構造から自動的に決まるベクトル束の特性類とみなすことができる．ただしここでは無限次元のベクトル束を考える必要がある．

もう少し正確に述べよう．単連結4次元多様体 M に対して，その上のベクトル束を考える．構造群としてはいろいろな可能性があるが，とりあえず非可換な群の中では一番次元が小さい群を考えよう．つまり $SU(2)$ または $SO(3)$ をとる．§1.3で述べたように，これらの群を構造群にもつ4次元多様体上のベクトル束は特性類 (c^2 または p^1 と w^2) で決まる．後には $SO(3)$ の場合も扱うが，まずとりあえず $SU(2)$ の場合を考える．この場合はベクトル束は c^2 で完全に定まる．c^2 は4次の特性類であるから4次元多様体の場合これは整数と思ってよい．すなわち各々の整数 k に対して $SU(2)$ 束 ζ_k が存在する．

するとこれから ζ_k の $SU(2)$ 接続全体の作る空間 $\mathcal{A}(M,\zeta_k)$ が定まる．この空間はアフィン空間で可縮であるので，代数的位相幾何学を用いて不変量を作るのには不向きである．それでこれをゲージ変換群で割った空間 $\mathcal{B}(M,\zeta_k) = \mathcal{A}(M,\zeta_k)/\mathcal{G}(M,\zeta_k)$ を用いる．ここで注意すべきなのは $\mathcal{B}(M,\zeta_k)$ のホモトピー型が M のホモトピー型からのみ定まり，その可微分同相類にはよらないことである．したがってそのホモロジー群 $H_*(\mathcal{B}(M,\zeta_k);\mathbf{Z})$ も M のホモトピー型から定まる（定理2.1.3）．

さて一言でいってしまうと，ドナルドソンの不変量とは $\mathcal{B}(M,\zeta_k)$ 上のあるベクトル束 E の特性類（オイラー (Euler) 類）のポアンカレ (Poincaré) 双対である．$\mathcal{B}(M,\zeta_k)$ は無限次元であるのでポアンカレ双対で有限次のホモロジー類に対応するのは無限次のコホモロジー類である．無限次のコホモロジー類を特性類にもつためには，E は無限次のベクトル束である必要がある．ここで述べているような話では無限次元にもいろいろあって，E は $\mathcal{B}(M,\zeta_k)$ の次元と有限の数だけ違う階数を持つベクトル束でなければならない．(E のオイラー類は E の階数次のコホモロジー類で，したがってそのポアンカレ双対は $\dim \mathcal{B}(M,\zeta_k) - (E$の階数$)$ 次のホモロジー類である．これが有限である場合を考えている.)

まず $\mathcal{B}(M,\zeta_k)$ の次元を勘定してみよう．$\mathcal{A}(M,\zeta_k)$ は（局所的には）$SU(2)$ のリー環に値をもつ1次微分型式で $SU(2)$ のリー環は3次元であるから，$\mathcal{A}(M,\zeta_k)$ の次元は M 上の任意関数 $4\times 3 = 12$ 個分だと思ってよい．一方ゲージ変換群 $\mathcal{G}(M,\zeta_k)$ の方は（局所的には）$SU(2)$ に値をもつ関数と思ってよいから，その次元は M 上の任意関数3個分だと思ってよい．したがって商空間 $\mathcal{B}(M,\zeta_k)$

の次元は M 上の任意関数 9 個分である．

ということはここで必要となるベクトル束 E の階数も M 上の任意関数 9 個分ということになる．このようなベクトル束を構成する一つのやり方は次の通りである．$SU(2)$ のそのリー環 $su(2)$ 上の共役表現 (adjoint representaion) を考える．この表現を用いて ζ_k からベクトル束 $Ad\,\zeta_k$ が得られる．このベクトル束と $\Lambda^2(M)$ とのテンソル積 $Ad\,\zeta_k \otimes \Lambda^2(M)$ を考える．局所的にはこの切断は 2×2 行列値の 2 次微分型式であるから，その上にホッジ (Hodge) の作用素 $*$ を（成分ごとに作用させることで）定義できる．このとき

$$\Gamma(Ad\,\zeta_k \otimes \Lambda^2_+(M)) = \{u \in \Gamma(Ad\,\zeta_k \otimes \Lambda^2(M)) \mid *u = u\}$$

と定める．

M のある点の近傍での $\Lambda^1(M)$ の正規直交基を $e^1, \cdots, e^4$ とすると$\Gamma(Ad\,\zeta_k \otimes \Lambda^2_+(M))$ のそこでの正規直交基は $e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$, $e^1 \wedge e^3 - e^2 \wedge e^4$, $e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3$ と $su(2)$ の正規直交基のテンソル積で与えられる．したがって $\Gamma(Ad\,\zeta_k \otimes \Lambda^2_+(M))$ の次元は任意関数 9 個分である．これを使ってベクトル束 E を構成しよう．ゲージ変換群 $\mathcal{G}(M, \zeta_k)$ の元はζ_k の自己同型を与えるから $Ad\,\zeta_k$ の自己同型を導く．したがって $\mathcal{G}(M, \zeta_k)$ は$\Gamma(Ad\,\zeta_k \otimes \Lambda^2_+(M))$ に作用する.（テンソル積の第 2 成分には自明に作用させる.）そこで直積 $\mathcal{A}(M, \zeta_k) \times \Gamma(Ad\,\zeta_k \otimes \Lambda^2_+(M))$ に $\mathcal{G}(M, \zeta_k)$ を（成分ごとに）作用させその商を $\mathcal{A}(M, \zeta_k) \times_{\mathcal{G}(M,\zeta_k)} \Gamma(Ad\,\zeta_k \otimes \Lambda^2_+(M))$ と書こう．定義から写像 $\mathcal{A}(M, \zeta_k) \times_{\mathcal{G}(M,\zeta_k)} \Gamma(Ad\,\zeta_k \otimes \Lambda^2_+(M)) \to \mathcal{B}(M, \zeta_k)$ が定まる．もし $\mathcal{G}(M, \zeta_k)$ の $\mathcal{A}(M, \zeta_k)$ への作用が不動点を持たなければ，この写像はベクトル束を定める（そのときは各点のファイバーは明らかに$\Gamma(Ad\,\zeta_k \otimes \Lambda^2_+(M))$ であるから）．実は $\mathcal{G}(M, \zeta_k)$ の $\mathcal{A}(M, \zeta_k)$ への作用には不動点がある．したがってこれはベクトル束を定めない．この点については今はとやかくいわないことにする.（どのような点が不動点になるかなど後に詳しく触れる.）

すると $\Gamma(Ad\,\zeta_k \otimes \Lambda^2_+(M))$ がファイバーになるベクトル束ができたことになる．これを使って

「定義 2.1.1」 ベクトル束 $\mathcal{A}(M, \zeta_k) \times_{\mathcal{G}(M,\zeta_k)} \Gamma(Ad\,\zeta_k \otimes \Lambda^2_+(M)) \to \mathcal{B}(M, \zeta_k)$ のオイラー類 $e(\mathcal{A}(M, \zeta_k) \times_{\mathcal{G}(M,\zeta_k)} \Gamma(Ad\,\zeta_k \otimes \Lambda^2_+(M)) \to \mathcal{B}(M, \zeta_k)) \in H^{\infty-\ell}$

$(\mathcal{B}(M,\zeta_k);\mathbf{Z}) \cong H_\ell(\mathcal{B}(M,\zeta_k);\mathbf{Z})$ を M のドナルドソン不変量と呼ぶ.（ここで ℓ はある有限の数で $H^{\infty-\ell}(\mathcal{B}(M,\zeta_k);\mathbf{Z}) \cong H_\ell(\mathcal{B}(M,\zeta_k);\mathbf{Z})$ はポアンカレ双対である.）

無限次のベクトル束のオイラー類とか無限次元多様体のポアンカレ双対は一般には定義されないから，上の「定義」は厳密なものではない．後に述べるようにこれの正当化にはある種のフレドホルム (Fredholm) 構造が用いられる.

さて「定義 2.1.1」を正当化するのが当面の目標である．そのために §1.2 で述べたオイラー類に対する幾何学的表示（定理 1.2.23）を思い出そう．ここではこれを逆に使って定義 2.1.1 を正当化したい．すなわちベクトル束 $\mathcal{A}(M,\zeta_k)\times_{\mathcal{G}(M,\zeta_k)}\Gamma(Ad\ \zeta_k\otimes\Lambda^2_+(M))\to\mathcal{B}(M,\zeta_k)$ の切断をとり，その 0 の逆像の定めるサイクルをこのベクトル束のオイラー類のポアンカレ双対と考えるわけである.

定理 1.2.23 によれば（有限次元の場合は）generic などんな切断をとってもよかった．しかしベクトル束が無限次元である今の場合はそうはいかない．実際単に無限次元ベクトル束と考えてしまうと，無限次元ヒルベルト (Hilbert) 空間をファイバーに持つ任意のベクトル束は自明であることが証明できる.（無限次元直交群が可縮であることに基づく.）したがってあまり抽象的に考えるわけにはいかない.（以下のようなことが一般にできるような無限次元幾何学の枠組を作ることは非常に大事な問題であるが，まだだれも成功していない.）

したがって今の所はベクトル束の切断一般をとるのでなく，ベクトル束の与え方と結びついた具体的な切断をとるしかない．次のようにすればこの切断は具体的に与えることができる．$A\in\mathcal{A}(M,\zeta_k)$ に対してその曲率 F_A を考えると，これは定義 1.2.5 で述べたように$\Gamma(Ad\ \zeta_k\otimes\Lambda^2(M))$ の元を与える．したがって $F_A^+=F_A+*F_A$ は$\Gamma(Ad\ \zeta_k\otimes\Lambda^2_+(M))$ の元を与える．補題 1.2.6 より写像 $A\mapsto F_A^+$ はゲージ変換群 $\mathcal{G}(M,\zeta_k)$ の作用で保たれる．したがってこれは「ベクトル束」$\mathcal{A}(M,\zeta_k)\times_{\mathcal{G}(M,\zeta_k)}\Gamma(Ad\ \zeta_k\otimes\Lambda^2_+(M))\to\mathcal{B}(M,\zeta_k)$ の切断を与える．そこで

$$\mathcal{M}(M,\zeta_k)=\left\{[A]\in\mathcal{B}(M,\zeta_k)\mid F_A^+=0\right\}$$

とおくと「定義 2.1.1」を次のように言い換えることができる.

「定義 2.1.2」　多様体 M のドナルドソン不変量とは $\mathcal{M}(M,\zeta_k)$ の表すホモロジー類（$H_*(\mathcal{B}(M,\zeta_k);\mathbf{Z})$ の元）である．

これでだいぶ数学的な定義に近づいた．しかし本当に厳密な定義にするためには，以下の点を明らかにする必要があるであろう．

（イ）$\mathcal{M}(M,P)$ は有限次元であること．

（ロ）$\mathcal{M}(M,P)$ が基本ホモロジー類を持っていること．これはたとえば $\mathcal{M}(M,P$ がコンパクトで特異点がなければ正しい．

（ハ）$\mathcal{M}(M,P)$ には向きが付くこと．これは基本ホモロジー類が $\mathbf{Z}_2$ 上でなく $\mathbf{Z}$ 上で定義されるために必要である．

（ニ）このように定めたホモロジー類が M の計量によらないこと．($\mathcal{M}(M,P)$ の定義にはホッジの作用素が使われ，したがって $\mathcal{M}(M,P)$ は M の計量によっている．)

これらのことを証明するのは以後の目標である．その前にもう少し注意をつけ加える．まず上で定義した切断 $A\mapsto F_A^+$ は一般には必ずしも 0 と横断的とは限らない．したがって「定義 2.1.2」は多少変更を要する．すなわち切断 $A\mapsto F_A^+$ は適当に摂動して 0 と横断的にしなければならない．しかし前に述べた理由で無限次元の場合，勝手な摂動をとることはできない．今の場合はコンパクト写像による摂動をとることによってうまくいく．これについては後に述べる．摂動を加えるのであるから（ニ）ではホモロジー類が摂動の取り方によらないことも示さねばならない．

これらの問題に直接とりかかる前に，もう少し何を定義するかはっきりさせよう．まえに空間 $\mathcal{B}(M,\zeta_k)$ のホモトピー型は多様体 M のみによると述べた．以下ではもう少し具体的にこの空間のホモロジー群を調べる．そのためにまずこの空間のコホモロジー類を構成する．

コホモロジー類はあるベクトル束のチャーン (Chern) 類として構成される．まず積空間 $\mathcal{A}(M,\zeta_k)\times\zeta_k$ を考えよう．この空間は $\mathcal{A}(M,\zeta_k)\times M$ 上のベクトル束と考えることができる（構造群は $SU(2)$ である）．ゲージ変換群 $\mathcal{G}(M,\zeta_k)$ は ζ_k の自己同型であったから ζ_k 上に作用している．一方 $\mathcal{G}(M,\zeta_k)$ は $\mathcal{A}(M,\zeta_k)$ にも

作用し，この商空間が $\mathcal{B}(M,\zeta_k)$ であった．したがって $\mathcal{G}(M,\zeta_k)$ は $\mathcal{A}(M,\zeta_k)\times\zeta_k$ に作用する．

この商空間を $\mathcal{A}(M,\zeta_k)\times_{\mathcal{G}(M,\zeta_k)}\zeta_k$ と書こう．写像 $\mathcal{A}(M,\zeta_k)\times\zeta_k\to\mathcal{A}(M,\zeta_k)\times M$ は $\mathcal{G}(M,\zeta_k)$ の作用で不変であるから（$\mathcal{G}(M,\zeta_k)$ の M への作用は自明とする），$\mathcal{A}(M,\zeta_k)\times_{\mathcal{G}(M,\zeta_k)}\zeta_k\to\mathcal{B}(M,\zeta_k)\times M$ なる写像が得られる．

これを，$SU(2)$ を構造群とする「ベクトル束」と思いたいのだがこれには問題がある．それは $\mathcal{G}(M,\zeta_k)$ の元 -1 （$M=\bigcup U_\alpha$ をζ_k の座標としたとき $h_\alpha\equiv -1 : U_\alpha\to SU(2)$ で与えられるゲージ変換）はどの $\mathcal{A}(M,\zeta_k)$ の元も動かさないことである（すなわち $(-1)^*(A)=A$）．したがって，写像 $\mathcal{A}(M,\zeta_k)\times_{\mathcal{G}(M,\zeta_k)}\zeta_k\to\mathcal{B}(M,\zeta_k)\times M$ はベクトル束にならない．

一般に空間 M に群（とりあえずコンパクト群にしておこう）G が作用し，また M 上にベクトル束 E があって G はこの上に作用しているとしよう．このとき商空間 M/G 上にベクトル束が導かれるのはどういうときであろうか．

むろん空間 E/G と写像 $E/G\to M/G$ はいつも存在する．もし M 上の G の作用が不動点を持たなければこの写像がベクトル束の射影になることも明らかである．一般にはこの写像はベクトル束の射影を与えない．実際，たとえば $p\in M$ の等方部分群 (isotropy subgroup) $I_p=\{g\in G\mid gp=p\}$ が自明でなければ $E/G\to M/G$ の p の同値類 $[p]$ でのファイバーは商空間 E_p/I_p である（E_p は E の p でのファイバーを指す）．これがベクトル空間になるには I_p の E_p への作用が自明であることが必要十分である．逆にこの条件が任意の p に対して満たされれば $E/G\to M/G$ はベクトル束を与える．

そこで ζ_k のかわりに $SO(3)$ 束 $Ad\,\zeta_k$ を考えよう．($SU(2)=Spin(3)$ 束とそれから決まる $SO(3)$ 束の関係については命題 1.3.8 の直後の記述を参照せよ.) すると $\mathcal{G}(M,\zeta_k)$ の元 -1 はこのベクトル束の自己同型としては自明である．したがって $\mathcal{A}(M,\zeta_k)\times_{\mathcal{G}(M,\zeta_k)}Ad\,\zeta_k\to\mathcal{B}(M,\zeta_k)\times M$ は $SO(3)$ を構造群とする「ベクトル束」を与える．括弧がついているのは $\mathcal{G}(M,\zeta_k)/\{\pm1\}$ の $\mathcal{A}(M,\zeta_k)$ への作用にはまだ不動点が存在するため，不動点に対応する $\mathcal{B}(M,\zeta_k)$ の点すなわち $\mathcal{B}(M,\zeta_k)$ の特異点で「ベクトル束」は特異になるからである．この点については後で論ずる．

このベクトル束を P_k と書く．P_k の第1ポントリャーギン類 $p^1(P_k)$ を考えよ

う．これは $\mathcal{B}(M,\zeta_k)\times M$ の 4 次のコホモロジー類である．これから $\mathcal{B}(M,\zeta_k)$ のコホモロジー類を得るには M のホモロジー類をとって（以下に述べるように）ファイバー積分 (integratioin along fiber) すればよい．ここでは M の 2 次のホモロジー類を考える．よく知られているように多様体のなかの 2 次のホモロジー類は常に埋め込まれた 2 次元多様体（曲面）の基本ホモロジー類で表される．そこで曲面 $\Sigma\subseteq M$ がホモロジー類 $[\Sigma]\in H_2(M;\mathbf{Z})$ を表すとし $\mu([\Sigma])\in H^2(\mathcal{B}(M,\zeta_k))$ を次の式で定義する

$$\mu([\Sigma])\cap[V]=-\frac{1}{4}\int_{\Sigma\times V}p^1(P_k) \tag{2.1.1}$$

ここで $[V]$ は $\mathcal{B}(M,\zeta_k)$ の任意の 2 次のホモロジー類で $\mathcal{B}(M,\zeta_k)$ の 2 次元部分多様体 V で表されているとする．(2 次のコホモロジー群の元を決めるには (有理係数または実係数の場合) 任意の 2 次のホモロジー類に対して取る値を決めてやればよかった．)

ここで $-\frac{1}{4}$ があるのは本当は「$c^2(\mathcal{A}(M,\zeta_k)\times_{\mathcal{G}(M,\zeta_k)}\zeta_k)$」を $p^1(P_k)$ のかわりに使いたかったからで，もしも $\mathcal{A}(M,\zeta_k)\times_{\mathcal{G}(M,\zeta_k)}\zeta_k$ が $\mathcal{B}(M,\zeta_k)$ 上の $SU(2)$ ベクトル束として存在していれば $c^2(\mathcal{A}(M,\zeta_k)\times_{\mathcal{G}(M,\zeta_k)}\zeta_k)=-\frac{1}{4}p^1(P_k)$ であるからである（命題 1.3.9）．

$\mu([\Sigma])$ がどの係数のホモロジー類か述べなかったが，実は整数係数のホモロジー類とみなすことができる．これには (2.1.1) をスラント積 (slant product) ([小中菅] p.445,[服部 3] p.195,[中岡] 2.5.1 参照）を使って

$$\mu([\Sigma])=-\frac{1}{4}p^1(P_k)/[\Sigma]$$

と書き換えて議論すると証明できる（$\frac{1}{4}$ がある分についての議論が必要だが）．ここではスラント積については触れないでおき，式 (2.1.1) で定義されるホモロジー類は実は整係数ホモロジー類からくるとだけ述べておく．

ストークス (Stokes) の定理より次の定理の最初の主張はほぼ明らかである．

定理 2.1.3

(1) μ は準同型 $\mu:H_2(M;\mathbf{Z})\to H^2(\mathcal{B}(M,\zeta_k);\mathbf{Z})$ を定める．
(2) M を単連結とすると$\mu:H_2(M;\mathbf{Q})\to H^2(\mathcal{B}(M,\zeta_k);\mathbf{Q})$ は同型である．

(3) M を単連結とすると $H_2(M;\mathbf{Z})$ の基底を $[\Sigma_i]$, $i=1,\cdots,b_2(M)$ とし，$x_i=\mu([\Sigma_i])$ とするとコホモロジー環 $H^*(\mathcal{B}(M,\zeta_k);\mathbf{Z})$ は多項式環 $\mathbf{Q}[x_1,\cdots,x_{b_2(M)},y]$ と同型である．ここで y はある4次のコホモロジー類である．

y の定義は次の通りである．$H_4(\mathcal{B}(M,\zeta_k);\mathbf{Z})$ の元が，ある4次元部分多様体 V で表されているとき

$$[V]\cap y=-\frac{1}{4}\int_{\{p\}\times V}p^1(P_k)$$

ここで p は M の任意の点である．(この元が p によらないことは$\mu(\Sigma)$ が Σ のホモロジー類のみによって決まることと同様にストークスの定理からわかる.) $[p]\in H_0(M;\mathbf{Z})$ とみなして $y=\mu([p])$ と思える．(すなわち $\mu:H_i(M;\mathbf{Z})\to H^{4-i}(\mathcal{B}(M,\zeta_k);\mathbf{Z})$ なる写像と考える.)

定理2.1.3は次のようにして示される．(ただし後でこの定理を使う必要はないので概略にとどめる．代数的位相幾何に詳しくない人はとばして差し支えない.)

[ステップ1]　$\Omega\mathcal{B}(M,\zeta_k)\approx\mathcal{G}(M,\zeta_k)$ なるホモトピー同値が存在する．(ここで Ω はループ空間を表す.)

[ステップ2]　$\mathcal{G}(M,\zeta_k)\approx\mathcal{G}(M,\zeta_0)\approx Map(M,SU(2))=Map(M,S^3)$．(ホモトピー同値)

[ステップ3]　$\vee_b S^2\subset M$, $M/\vee_b S^2=S^4$ より（ここで M が単連結であることを使う．§1.3参照.）ファイバー空間$\prod_b Map_0(S^2,S^3)\subseteq Map_0(M,S^3)\to Map_0(S^4,S^3)$ が存在する（b は第2ベッチ (Betti) 数を表す）．ここでたとえば $Map_0(M,S^3)$ は $Map(M,S^3)$ の元で M の基点を S^3 の基点に移すものを指す．

[ステップ4]　これから $H^*(Map_0(M,S^3);\mathbf{Q})\cong H^*(\prod_b Map_0(S^2,S^3);\mathbf{Q})\cong\Lambda(x_1',\cdots,x_b')$ がわかる．(Λ は外積代数を表す.) x_i' は1次のコホモロジー類である．

[ステップ5]　ステップ4とファイバー空間 $Map_0(M,S^3) \subseteq Map(M,S^3) \to S^3$ より $H^*(Map(M,S^3);\mathbf{Q}) \cong \Lambda(x'_1,\cdots,x'_b,y')$.

[ステップ6]　ステップ5よりステップ1で得られるファイバー空間 $\mathcal{G}(M,\zeta_k) \subseteq$ 一点 $\to \mathcal{B}(M,\zeta_k)$ のルレー (Leray)–セール (Serre) のスペクトル系列 (spectral sequence) を調べる．x_i, y なる $H^*(\mathcal{B}(M,\zeta_k);\mathbf{Q})$ の元がすでに作られていることからこのスペクトル系列は（ある段階で）退化しなければならない．これより $H^*(\mathcal{B}(M,\zeta_k);\mathbf{Q})$ が計算できる．(たとえば戸田宏，三村護著『ホモトピー論』紀伊国屋数学叢書3 第1章例題3.21 (p.31) 参照.) 同型の作り方をよく考えればこの生成元が定理で2.1.3で与えられるものであることがわかる．

略証終わり

$\mathcal{B}(M,\zeta_k)$ の有理係数のコホモロジーはこのように比較的容易に計算できるのであるが，ねじれ (torsion) 係数のコホモロジーはよりデリケートである．特に $\mathbf{Z}_2$ 係数の場合はドナルドソンによって [D3] で用いられている．$\mathbf{Z}_p$係数（p は奇素数）の場合を応用することには誰も成功していない．

さて定理2.1.3を用いると，ドナルドソンの不変量をもう少し具体的にホモロジー群上の多項式として与えることができる．これには次のようにする．

後に述べるように空間 $\mathcal{M}(M,\zeta_k)$ の次元は多様体 M のコホモロジー環と k を用いて記述することができる．今 $\dim \mathcal{M}(M,\zeta_k) = 2\ell$ であるとしよう．$[\Sigma_i]$, $i=1,\cdots,\ell$ を $H_2(M;\mathbf{Z})$ の元とする．このとき

$$\begin{aligned} Q_\ell([\Sigma_1],\cdots,[\Sigma_\ell]) &= \int_{\mathcal{M}(M,\zeta_k)} \mu([\Sigma_1]) \wedge \cdots \wedge \mu([\Sigma_\ell]) \\ &= \left(-\frac{1}{4}\right)^\ell \int_{\mathcal{M}(M,\zeta_k)\times\Sigma_1\times\cdots\times\Sigma_\ell} p_1^* p^1(P_k) \wedge \cdots \wedge p_\ell^* p^1(P_k) \end{aligned}$$

と定義する．ここで $p_i : \mathcal{M}(M,\zeta_k)\times\Sigma_1\times\cdots\times\Sigma_\ell \to \mathcal{M}(M,\zeta_k)\times\Sigma_i \subseteq \mathcal{B}(M,\zeta_k)\times M$ は射影と包含写像の合成である．Q_ℓ は定義2.1.2のホモロジー類をμ による $H_2(M;\mathbf{Z})$ の像の積で値を取らせたものである．上の式からは明らかではないがこれは整数になる．

同様にして $\mu([\Sigma])$ の代わりに$\mu([p])$ を使って $Q_{\ell,m}([\Sigma_1],\cdots,[\Sigma_\ell],\underbrace{[p],\cdots,[p]}_{m \text{ copies}})$ も定義できる（$2\ell+4m=\dim\mathcal{M}(M,\zeta_k)$ の場合）．これらをドナルドソン多項式（ドナルドソン自身は多項式不変量 (polynomial invariant) と呼んでいる）と呼ぶ．

とはいってもこれらの定義にはまだ多くのしなければならないことがあり，またこれらが定義されるためにはいくつかの条件が必要である．次の節で必要な事実のあらましを述べ，その後で順にそれらを証明していこう．

本節の残りで方程式 $F_A+*F_A=0$ について，もう少し一般的なことを述べておこう．この方程式の解である接続のことを反自己双対接続 (anti-self-dual connection) と呼ぶ．省略して ASD 接続とも呼ばれる．$F_A-*F_A=0$ の解である接続のことを自己双対接続と呼ぶ．(これまで自己双対でなく反自己双対接続を使ってきたのは，複素多様体の場合，反自己双対接続が正則ベクトル束に対応するからである．不変量の構成には反自己双対接続が使われる．一方ドナルドソンが [D1] で4次元多様体の交叉形式を調べるのに用いたのは自己双対接続である．むろん両者は向き付けを取り替えると入れ替わるが，複素多様体は自然な向き付けを持っている.)

さて自己双対及び反自己双対接続はヤン (Yang)–ミルズ (Mills) 接続の例である．本書では自己双対および反自己双対接続だけを扱い一般のヤン–ミルズ接続は扱わないが，定義だけはここで述べておこう．

向きのついたリーマン多様体（4次元とは限らない）M 上の複素ベクトル束 ζ（構造群はとりあえず $U(N)$ にしておく）とその上の接続 A が与えられたとき，ヤン–ミルズ汎関数 (Yang-Mills functional) $\mathfrak{Ym}(A)$ を

$$\mathfrak{Ym}\ (A)=-\int_M Tr(F_A\wedge *F_A)=\int_M \|F_A\|^2 *1_M$$

で定義する．($U(N)$ のリー環上の不変正定値内積は $\langle a,b\rangle=Tr(a\cdot{}^t\bar{b})=-Tr(ab)$ で与えられていた．$\|F_A\|^2$ はこの内積と2次微分型式の内積（M のリーマン計量から定まる）のテンソル積の与える長さである．また $*1_M$ は M の体積要素である.)

定義 2.1.4　ヤン–ミルズ汎関数の極値を与える接続のことをヤン–ミルズ接続 (Yang-Mills connection) と呼ぶ.

補題 1.2.6 により $\mathfrak{Ym}(A)$ はゲージ変換によって不変である. したがってヤン–ミルズ接続をゲージ変換したものは再びヤン–ミルズ接続である.

ヤンとミルズは素粒子論で場の理論としてゲージ場を考えていて, ゲージ変換群で不変な量を（ラグランジアンにするために）探していた. その結果たどり着いたのが数学者が前から使っていた曲率であったという. 一方数学者は曲率のゲージ不変性は前から知っていても, その積分を使って変分問題を考えれば面白い理論ができることには, 物理学者が始めるまで気がつかなかった.

補題 2.1.5　A がヤン–ミルズ接続であるのは $d_A^*(F_A) = 0$ のときでそのときに限る.

実の所 d_A^* の F_A への作用はまだ定義していなかった. これは次のように定義する. 一般に ζ をベクトル束とし $A = \nabla^A$ をその接続とする. このとき $d_A : \Gamma(M; \zeta \otimes \Lambda^k(M)) \to \Gamma(M; \zeta \otimes \Lambda^{k+1}(M))$ をまず定義しよう. $u \in \Gamma(M; \zeta \otimes \Lambda^k(M))$ とすると各点の近傍で $u = \sum u_i \otimes w_i$ （u_i はその近傍での ζ の切断で w_i は k 次微分型式）. このとき

$$d_A u = \sum \nabla^A_{\frac{\partial}{\partial x^j}} u_i \otimes (dx^j \wedge w_i) + \sum u_i \otimes dw_i$$

直接計算でこの式が $u = \sum u_i \otimes w_i$ なる表示によらないことが容易に確かめられる. これで $d_A : \Gamma(M; \zeta \otimes \Lambda^k(M)) \to \Gamma(M; \zeta \otimes \Lambda^{k+1}(M))$ が定まった.

$d_A^* : \Gamma(M; \zeta \otimes \Lambda^k(M)) \to \Gamma(M; \zeta \otimes \Lambda^{k-1}(M))$ はこれを使って $\langle d_A u, v \rangle_{\zeta \otimes \Lambda^k} = \langle u, d_A^* v \rangle_{\zeta \otimes \Lambda^{k-1}}$ により定義する.

補題 2.1.5 を証明しよう. $\alpha \in \Gamma(Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M))$ とする. ヤン–ミルズ接続の定義を言い換えると

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{Ym}\ (A + t\alpha)\bigg|_{t=0} = 0$$

が任意の $\alpha \in \Gamma(Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M))$ について成立するはずである. 定義に戻って

この式を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathfrak{Y}\mathfrak{m}\ (A+t\alpha)\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\int_M \|F_{A+t\alpha}\|^2 * 1_M\Big|_{t=0} \\ &= 2\int_M \left\langle \frac{d}{dt}F_{A+t\alpha}, F_{A+t\alpha}\right\rangle * 1_M\Big|_{t=0} \\ &= 2\int_M \langle d_A\alpha, F_A\rangle * 1_M \\ &= 2\int_M \langle \alpha, d_A^* F_A\rangle * 1_M\end{aligned}$$

任意の $\alpha \in \Gamma(Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M))$ に対してこの式が0になるための必要十分条件は $d_A^*(F_A) = 0$. 証明終わり

微分幾何でよく知られている恒等式に $d_A F_A = 0$ がある.（これをビアンキ(Bianchi)の恒等式という．この式は任意の接続（必ずしもヤン–ミルズと限らない）に対して成立する．インチキな説明をすると F_A “$=$” $d_A A$「なので」$d_A F_A$ “$=$” $d_A d_A A$ “$=$” 0．本当の証明はただ計算すればよい．微分幾何の教科書にはたいてい載っているので省略する.）

そこで $\Delta_A = d_A d_A^* + d_A^* d_A$ とおくと補題2.1.5は次のように言い換えられる.

補題 2.1.6　A がヤン–ミルズ接続であるのは$\Delta_A F_A = 0$ のときでそのときに限る.

ここまで来るとヤン–ミルズ場の理論が調和積分論の非線形化であるというのがだいぶもっともらしく聞こえてくるであろう．よりそのことをはっきりさせるために，1次元のベクトル束（複素直線束）の場合を考えてみよう．この場合 $U(1)$ は可換であるので $Ad\zeta$ は自明なベクトル束（直線束）である．したがって $F_A \in \Gamma(Ad\,\zeta \otimes \Lambda^2(M))$ は単なる2次の微分型式である．また d_A は普通の外微分でΔ_A は普通のラプラシアンである．すなわち

補題 2.1.7　複素直線束の接続がヤン–ミルズ接続であるのはその曲率が調和形式である場合でその場合に限る.

これでヤン–ミルズ場の理論と調和積分論あるいはコホモロジー論との関係がついた（§2.2 でもう少し直線束の場合を述べる）．ここで直線束とそうでない場合の違いは構造群が可換か非可換かで，これは方程式が線形か非線形かに関係する．すなわち調和積分論は線形方程式（ラプラス (Laplace) 方程式）の理論であったがヤン–ミルズ理論は非線形方程式を扱う．

ところで調和積分論は任意の次数の微分型式を扱ったが，ヤン–ミルズ理論に出てくるのは 1 型式と 2 型式だけである．これは次のように考えればよいであろう．ヤン–ミルズ理論の非線形性の由来はゲージ変換の式 (1.1.2) が線形でないことによるが，この式の非線形項はゲージ変換の 1 階微分である．したがって接続にはゲージ変換の非線形性が反映するが，2 次以降のものを考えてもそこには非線形性は反映しないであろう．

閑話休題．以上は任意の次元で成立する話であった．4 次元の特殊性を述べよう．その一番の根元はヤン–ミルズ場の方程式の共形不変性である．共形変換は前にも定義したがもう一度書いておくと

定義 2.1.8 M, N をリーマン多様体とし $f : M \to N$ を可微分同相写像とする．このとき f が共形変換であるとは M 上の関数 $\varphi \in C^\infty(M)$ が存在して $f^* g_N = \varphi \cdot g_M$ となることをいう．

すると

補題 2.1.9 M, N を 4 次元リーマン多様体とし $f : M \to N$ を共形変換とする．ζ を N 上のベクトル束，A をその接続とする．これらを f で引き戻すと M 上のベクトル束 $f^*\zeta$ とその上の接続 f^*A が得られる．このとき

$$\mathfrak{Ym}\ (A) = \mathfrak{Ym}\ (f^*A)$$

証明 $f^* g_N = \varphi \cdot g_M$ とする．このとき曲率は 2 次の微分型式であるから

$$||F_{f^*A}||\,(p) = ||f^* F_A||(p) = \varphi(p)^{-1} ||F_A||(f(p))$$

一方体積要素については4次の微分型式であるので

$$\Omega_M(p) = \varphi(p)^2 \cdot f^*\Omega_N(p)$$

この二つの式と定義より補題は直ちに得られる.　証明終わり

補題 2.1.9 から後に見るようにエネルギーが有限のヤン–ミルズ場の特異点が有限個であることが証明される. (§0.2 で述べた調和写像の場合は, 2 次元空間からの写像の場合について方程式の共形不変性が成立しそれに基づいて定理 0.2.16 及び 0.2.12 が示されたのであった.)

次に多様体 M が 4 次元かつ閉多様体でベクトル束の構造群が $SU(N)$ の場合を考えよう. この場合には前に定義した自己双対及び反自己双対接続はヤン–ミルズ接続であることが示される. すなわち

定理 2.1.10　ζ を 4 次元で向きのついた閉多様体 M 上の構造群が $SU(N)$ のベクトル束. A をその上の接続とする. このとき

$$\mathfrak{Ym}\ (A) \geq 4\pi^2 \left| \int c^2(A) \right|$$

また $\mathfrak{Ym}\ (A) = 4\pi^2 \left| \int c^2(A) \right|$ となるのは, $\int c^2(A) > 0$ のときは A が反自己双対のとき, $\int c^2(A) < 0$ のときは自己双対のときで, そのときに限る.

さらに自己双対接続が存在するのは $\int c^2(A) < 0$ のときに限り, 反自己双対接続が存在するのは $\int c^2(A) > 0$ のときに限る.

証明　まず4次元多様体の2次微分型式に対しては $** = 1$ が成立する. したがって $F_A^+ = F_A + *F_A$, $F_A^- = F_A - *F_A$ とおくと $*F_A^{\pm} = \pm F_A^{\pm}$, $2F_A = F_A^+ + F_A^-$ が成り立ち, また $0 = \langle F_A^+, F_A^- \rangle$ が成立する. よって

$$\mathfrak{Ym}\ (A) = \int_M ||F_A||^2 * 1_M - \frac{1}{2}\left(\int_M ||F_A^+||^2 * 1_M + \int_M ||F_A^-||^2 * 1_M\right)$$

一方

$$\int c^2(A) = \frac{1}{8\pi^2} \int Tr(F_A \wedge F_A)$$

$$= \frac{1}{8\pi^2}\left(-\int\langle F_A^+, F_A^-\rangle * 1_M + \int\langle F_A^-, F_A^-\rangle * 1_M\right)$$

この二つの式から定理は容易に得られる． 証明終わり

系 2.1.11 自己双対接続及び反自己双対接続はヤン–ミルズ接続である．

系はチャーン類がベクトル束だけにより，接続によらないことに注意すれば，定理から直ちに得られる．(より詳しくいうと，自己双対接続及び反自己双対接続はヤン–ミルズ汎関数の最小値を与える．)

自己双対接続なる概念が意味を持つのは 4 次元だけであることに注意しておく．(2 次微分型式にホッジ作用素を作用させてまた 2 次になるのは 4 次元だけであるから．)

ヤン–ミルズ方程式 $d_A^* F_A = 0$ に比べて自己双対接続の方程式 $*F_A = F_A$ の方がいろいろな意味で取り扱いやすい．(たとえば前者が 2 階の微分方程式であるのに対して後者は 1 階である．また後に述べるように自己双対接続のモジュライ空間の次元は楕円型複体に結びついているが，ヤン–ミルズ方程式の解空間の次元をそのように計算するやり方は知られていない．)

4 次元の場合に自己双対接続および反自己双対接続以外にヤン–ミルズ接続が存在するかどうかはしばらくの間未解決問題であったが，意外にも 4 次元球面（普通の計量を入れる）上に自己双対でも反自己双対でもないヤン–ミルズ接続が存在することが，シブナー夫妻 (Sibner) とウーレンベック (Uhlenbeck) ([SSU]) によって示された．本書では自己双対および反自己双対接続のみを扱い一般のヤン–ミルズ接続は扱わない．

§ 2.2 反自己双対接続のモジュライ空間の基本性質（局所理論）

前節で（反）自己双対接続の作る空間（これを反自己双対接続のモジュライ空間 (moduli space) という）を使って4次元多様体の性質を調べる考え方の一つを述べた．そこでは粗い概略だけ述べたので，モジュライ空間のどういう性質がこの考察に必要であるかについては正確に述べなかった．

本章の残りでは必要なモジュライ空間の性質を順番に述べ，それらがドナルドソンの不変量を調べるのにどのように用いられるかを説明しよう．モジュライ空間の性質の証明は次章以後で行う．

I 指数定理と次元

（向きの付いた閉）4次元多様体 M とその上の $SU(2)$ を構造群とするベクトル束 ζ_k を考えよう．ただし k は第2チャーン数

$$k = \int c^2(\zeta_k)$$

である．(k は正とする.) 前節と同じように ζ_k の反自己双対接続の作る空間

$$\mathcal{M}(M, \zeta_k) = \{[A] \in \mathcal{B}(M, \zeta_k) \mid *F_A = -F_A\}$$

を考えよう．(定理 2.1.10 より k を正とするとζ_k には自己双対接続は存在しない.) これをサイクルと思ったときの基本ホモロジー類がドナルドソン不変量であった．基本ホモロジー類を定義するには $\mathcal{M}(M, \zeta_k)$ について幾つかの性質を確かめなければならない．まず第一に必要な性質はこれが有限次元の多様体であることである．有限次元性の一つの根拠は前節で説明した．すなわち $\mathcal{M}(M, \zeta_k)$ は $\mathcal{B}(M, \zeta_k)$ 上のある無限次元ベクトル束の切断の零点集合とみなせて，またベクトル束の次元と $\mathcal{B}(M, \zeta_k)$ の次元の差は有限である．

これをもう少し数学らしくしよう．そのためにまず有限次元の場合のことを思い出してみよう．X を多様体，G をそこに作用するリー (Lie) 群，E を X 上のベクトル束とし，G の作用は X に持ち上がっているとしよう．s を G の

作用で不変な E の切断とする．(我々の状況では $X=\mathcal{A}(M,\zeta_k)$, $G=\mathcal{G}(M,\zeta_k)$, $E=\Gamma(M;Ad\,\zeta_k\otimes\Lambda_2^+)$, $s=F_A^+$ である．) 調べたい空間 $\mathcal{M}(M,\zeta_k)$ は $s^{-1}(0)/G$ にあたる．

問題はこの空間がいつ多様体になりその次元はなにかである．これが多様体になるための十分条件は $s^{-1}(0)$ が多様体でかつ G のそこへの作用が不動点を持たないことである．後者については後に触れることにしよう．

$s^{-1}(0)$ が多様体になるのはいつであろうか．これには陰関数の定理を使えばよい．$p\in s^{-1}(0)$ とし p の近傍でベクトル束の自明化をとり，s を p の近傍からベクトル空間 V への写像とみなす．このとき $s^{-1}(0)$ が p の近傍で多様体になるための十分条件は s の p での微分 $ds:T_p(X)\to V$ が全射であることである．さらにこのとき $s^{-1}(0)$ の p での接空間は $\mathrm{Ker}\ ds=\{v\in T_p(X)\mid ds(v)=0\}$ に一致する．

このことをここで考えていた無限次元の状況に適用しよう．この場合 $\mathcal{A}(M,\zeta_k)$ 上のベクトル束$\Gamma(M;Ad\,\zeta_k\otimes\Lambda_2^+)$ はもともと自明である．(ゲージ変換群で割ると自明でなくなる．) また $\mathcal{A}(M,\zeta_k)$ の接空間は$\Gamma(M;Ad\,\zeta_k\otimes\Lambda^1)$ になる（命題 1.1.11）．$A\mapsto F_A^+$ の微分を計算しよう．

すなわち $A_s, s\in[0,\varepsilon)$ なる $\mathcal{A}(M,\zeta_k)$ の族で，$B=dA_s/ds\big|_{s=0}$ なるものを考えて $F_{A_s}^+$ の $s=0$ での微分を計算する．

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_{A_s}}{\partial s}\Big|_{s=0} &= \frac{\partial(dA_s+A_s\wedge A_s)}{\partial s}\Big|_{s=0}\\ &= dB+A_0\wedge B+B\wedge A_0\\ &= d_{A_0}B\end{aligned}$$

であるから，結局

$$\frac{\partial F_{A_s}^+}{\partial s}\Big|_{s=0}=d_{A_0}B+*d_{A_0}B \tag{2.2.1}$$

である．$d_{A_0}^+=d_{A_0}+*d_{A_0}:\Gamma(M;Ad\,\zeta\otimes\Lambda^1)\to\Gamma(M;Ad\,\zeta\otimes\Lambda_2^+)$ とおく．

まとめるとここまでで説明したのは$\widetilde{\mathcal{M}}(M,\zeta_k)=\{A\mid F_A=*F_A\}$ が A_0 の近傍で（無限次元）多様体になるのは $d_{A_0}^+$ が全射のときで，そのとき $\widetilde{\mathcal{M}}(M,\zeta_k)$ の A_0 での接空間は $\mathrm{Ker}\ d_{A_0}^+$ であるということであった．($d_{A_0}^+$ の連続性などの問題があるため，有限次元のときの証明で直ちにこのことが示されるわけでは

ない．§3.2 参照.）

次に群の作用について考えよう．一般に**コンパクト**リー群 G が多様体 Y に作用しその作用に不動点がないならば，商空間 Y/G はまた多様体になる．これは次のようにすればわかる．まず Y に G 不変なリーマン計量を入れておく．これは G がコンパクトであることを用いて存在することが証明できる．すなわち，必ずしも不変とは限らないリーマン計量 g_0 から出発して，

$$g(V,W) = \int_{\gamma\in G} g(\gamma^* V, \gamma^* W) d\gamma$$

とおけばよい．ここで $d\gamma$ はリー群の不変測度（[松島] 参照）である．

$p \in Y$ に対してその G 軌道 $G\cdot p = \{g\cdot p \mid g\in G\}$ を考えよう．写像 $G \to G\cdot p$, $g \mapsto g\cdot p$ をとりその微分を考えよう．これは $T_1G \to T_pY$ なる写像を与えるが，G の作用が不動点を持たないことよりこの写像は単射である．さらに G がコンパクトであることを用いると $G\cdot p$ が閉部分多様体で上の写像 $T_1G \to T_pY$ の像がその p での接空間であることがわかる．この直交補空間 $T_p(G\cdot p)^\perp$ をとり指数写像 $\exp : T_pY \to Y$ のそこへの制限を考える．$U = \{\exp v \mid v \in T_p(G\cdot p)^\perp, |v| \le \varepsilon\}$ とおく.（指数写像についてはここでは説明しない．知らなければ $T_p(G\cdot p)^\perp$ を接空間とする p の近傍の小さな部分多様体を U とする思ってよい.）G のコンパクト性を使うと $p,q\in U$, $g\in G$, $g\cdot p = q \Rightarrow g = 1$ が証明できる．また $G\cdot U$ は p の近傍である．したがって商空間 Y/G での $[p]$ の近傍は U と同相である．このことから Y/G は多様体でその $[p]$ での接空間は $T_p(G\cdot p)^\perp$ と一致する．特にその次元は $T_p(G\cdot p)^\perp$ の次元に等しい.（以上については図 2.2.1 参照.）

さて今考えている無限次元の状況でこれらに対応するのは何であろうか．これを見るために $T_1G \to T_pY$ なる写像を調べてみよう．まず群 G はゲージ変換群 $\mathcal{G}(M,\zeta_k)$ である．これのリー環 $(T_1\mathcal{G}(M,\zeta_k))$ は $\Gamma(M; Ad\ \zeta_k)$ である．そこで $p = [A] \in \mathcal{A}(M,\zeta_k)$ で写像 $T_1G \to T_pY$ を計算しよう．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\exp tu\cdot[A]\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}[\exp -tu\cdot d\exp tu + \exp -tu\cdot A\cdot\exp tu]\Big|_{t=0}\\ &= du + [A,u]\\ &= d_A u\end{aligned}$$

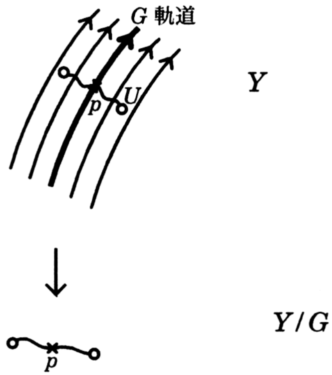


図 2.2.1

つまり写像 $T_1G \to T_pY$ $(\Gamma(M; Ad\ \zeta_k) \to T_A\mathcal{A}(M,\zeta_k) = \Gamma(M; Ad\ \zeta_k \otimes \Lambda^1(M)))$ は $u \mapsto d_A u$ で与えられる．したがって $u \in T_1\mathcal{G}(M,\zeta_k) = \Gamma(M; Ad\,\zeta_k)$ とすると $T_p(G\cdot p)^\perp = T_{[A]}(\mathcal{G}(M,\zeta_k)\cdot[A])^\perp$ は Ker d_A^* である．ただし d_A^* : $\Gamma(M; Ad\ \zeta_k \otimes \Lambda^1(M)) \to \Gamma(M; Ad\ \zeta_k)$ は $d_A : \Gamma(M; Ad\ \zeta_k \to \Gamma(M; Ad\ \zeta_k \otimes \Lambda^1(M))$ の共役作用素である．

これから $T_{[A]}\mathcal{B}(M,\zeta_k) = \mathrm{Ker}\ d_A^*$．よって

$$\begin{aligned} T_{[A]}\mathcal{M}(M,\zeta_k) &= T_{[A]}\mathcal{B}(M,\zeta_k) \cap T_{[A]}\widetilde{\mathcal{M}}(M,\zeta_k) \\ &= \mathrm{Ker}\ d_A^* \cap \mathrm{Ker}\ d_A^+ \end{aligned}$$

が有限次元の議論がそのまま成り立つならば成立する．

ここでの最大の問題は群 G のコンパクト性である．我々の場合の群 G は $\mathcal{G}(M,\zeta_k)$ でこれは無限次元であるから局所コンパクトでない．

一般に多様体をコンパクトでない群で割ると（作用が不動点を持たない場合でも）商空間は多様体にはならない．(ハウスドルフ (Hausdorff) 空間でなくなる.）この例はたとえば次のようにすればできる．$T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ 上の $\mathbf{R}$ の作用を $t\cdot[x,y] = [x+t, y+\pi t]$ で定義する．この商空間は 1 点でないがその上の商位相はすべての点がくっついた位相（開集合が全体と空集合だけ）の位相である．

したがって群 $\mathcal{G}(M,\zeta_k)$ の場合にこのようなことが起きず商空間がハウスドル

フ空間になることはきちんとした証明を要する．この点については §3.2 で論ずるが，それが可能な最大の根拠は群 $SU(2)$ がコンパクトであることである．あるいは $\mathcal{G}(M,\zeta_k)$ がコンパクト空間からコンパクト空間への写像の作る空間であることである．このことからたとえばアスコリ (Ascoli)–アルツェラ (Arzelá) の定理が成立し $\mathcal{G}(M,\zeta_k)$ は「関数空間が微分可能性などでいろいろとれることを法としてコンパクト」になるのである．(この辺のことについては§0.2 での議論を思い出して欲しい．)

実際 $SU(2)$ を非コンパクト群 $SL(n;\mathbf{C})$ で置き換えた場合にあたる多様体の複素構造のモジュライの問題（数理物理っぽい言い方をすれば，この場合は重力理論にあたる）ではモジュライ空間がハウスドルフ空間にならない場合が実際に起こる．これを考察するためにマムフォード (Mumford) が考えたのが安定性 (stability) の概念である．

閑話休題．今までの議論をまとめてみよう．まず三つのベクトル束 $Ad\,\zeta\otimes\Lambda^0(M)$, $Ad\,\zeta\otimes\Lambda^1(M)$, $Ad\,\zeta\otimes\Lambda^2_+(M)$ を考えそのあいだの微分作用素から

$$Ad\,\zeta\otimes\Lambda^0(M)\xrightarrow{d_A}Ad\,\zeta\otimes\Lambda^1(M)\xrightarrow{d_A^+}Ad\,\zeta\otimes\Lambda^2_+(M)\tag{2.2.2}$$

なる図式を考える．A が ASD 接続とすると，$d_A^+\circ d_A=F_A^+\wedge$ であるから（一般に $d_A\circ d_Au=F_A\wedge u$ が計算で分かる.），(2.2.2) は複体である．(つまり二つの写像の合成が 0 になる.）さらに

命題 2.2.1　(2.2.2) は楕円型複体である．

証明はしない（素直に計算すればよい）．この複体をアティヤ–ヒッチン–シンガー複体と呼ぶ．以後 AHS 複体と略す．

命題 2.2.1 は§2.1 で行った自由度の数の計算を数学的に厳密にしたものとみなすことができる．今まで述べてきたことは次の定理に要約される．

定理 2.2.2　A を ASD 接続とし $d_A^+: Ad\,\zeta\otimes\Lambda^1(M)\to Ad\,\zeta\otimes\Lambda^2_+(M)$ が全射かつ $d_A: Ad\,\zeta\otimes\Lambda^0(M)\to Ad\,\zeta\otimes\Lambda^1(M)$ が単射とすると $[A]$ の近傍でモジュライ空間 $\mathcal{M}(M,\zeta)$ は有限次元多様体で $[A]$ でのその接空間は $\dfrac{\mathrm{Ker}\ d_A^+}{\mathrm{Im}\ d_A}$ に一致

する．

定理の証明は §3.2 で行うがもう少し述べておこう．$d_A^+ : Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M) \to Ad\,\zeta \otimes \Lambda^2_+(M)$ の全射性とモジュライ空間の非特異性との関係はすでに述べた．(つまり全射性は陰関数の定理を使うために必要な条件である.) モジュライ空間が $[A]$ の近傍で多様体になるためのあと一つの条件はゲージ変換群の作用がそこで不動点になっていないことであった．$d_A : Ad\,\zeta \otimes \Lambda^0(M) \to Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M)$ の単射性はこれに関わる．すなわちこの写像は $\mathcal{G}(M,\zeta) \to \mathcal{A}(M,\zeta) : g \mapsto gA$ の単位元の接空間での微分であった．したがってこれが単射というのはゲージ変換群の作用が不動点を持たないことの無限小版 (infinitesimal version) である．

さてモジュライ空間 $\mathcal{M}(M,\zeta)$ は $[A]$ の近傍で多様体であるとしてこの次元は何であろうか．定理 2.2.2 の仮定が満たされているとすると AHS 複体のコホモロジーは 0 次と 2 次が消え 1 次だけが残る．したがって定理 2.2.1 より AHS 複体の指数がモジュライ空間の次元に等しい．AHS 複体は楕円型複体であるからその指数はアティヤ–シンガーの指数定理から計算できる．その計算はここではしない．([小林] 6 章 §4 に解説されている.) 答えは次のとおりである．

定理 2.2.3 定理 2.2.2 の仮定を満たす $[A]$ の近傍での多様体 $\mathcal{M}(M,\zeta)$ の次元は $8c^2(\zeta) \cap [M] + 3(b_1 - 1 - b_2^+)$ である．(記号については 0.3 節参照.)

たとえば ζ が自明なベクトル束で A が自明な接続の場合（この場合は定理 2.2.2 の仮定は満たされないが）AHS 複体の 0 次，1 次のコホモロジーは M の普通のコホモロジー $\otimes su(2)$ で 2 次のコホモロジーは $H^2_+(M;\mathbf{R}) \otimes su(2) = \{u \in \Lambda^2(M) \mid \Delta u = 0, *u = u\} \otimes su(2)$ である．したがってその指数は $3(b_1 - 1 - b_2^+)$ でこれは定理 2.2.3 の主張と一致する．

II 可約接続 (reducible connection) と特異点

次に定理 2.2.2 の 2 番目の仮定についてもう少し考えてみよう．この仮定はゲージ変換群の接続の空間への作用がいつ不動点を持つかについてのものであ

る．一般に接続 $A \in \mathcal{A}(M,\eta)$ に対してその等方部分群 (isotropy subgroup) を調べてみよう．(ここで等方部分群とは

$$I_A = \{g \in \mathcal{G}(M,\zeta) \mid gA = A\}$$

を指した.)

$g \in \mathcal{G}(M,\zeta)$（ゲージ変換）は各点 $p \in M$ に対して自己同型 $g_p : \zeta_p \to \zeta_p$ を定める．p の近傍のベクトル束の座標を決めておけば，g_p は構造群 G の元とみなすことができる．

補題 2.2.4　$gA = A$ であるための必要十分条件は任意の 2 点 p, q を結ぶ任意の道 $\ell : [0,1] \to M$ に対して $P_\ell \circ g_p = g_q \circ P_\ell$ が成り立つことである．ここで P_ℓ は ℓ に沿った平行移動を指す．

証明　$g^*A = A \Rightarrow P_\ell \circ g_p = g_q \circ P_\ell$ は平行移動の定義から明らか．

一方任意の $\ell : [a,b] \to M$ に対して $g_{\ell(b)} \circ P_\ell = P_\ell \circ g_{\ell(a)}$ が成立するとしよう．すると補題 1.2.12 により（そこの記号を使って）

$$\begin{aligned}
\nabla^{g^*A}_{\dot\ell(0)}(s) &= (g^{-1} \circ \nabla^A_{\dot\ell(0)} \circ g)(s) \\
&= g^{-1}_{\ell(0)} \left(\frac{d}{dt} P^A_{\ell_t^{-1}} \left((gs)(\ell(t))\right) \Big|_{t=0} \right) \\
&= \lim_{t\to 0} g^{-1}_{\ell(0)} \left(\frac{P^A_{\ell_t^{-1}} \left((gs)(\ell(t))\right) - (gs)(\ell(0))}{t} \right) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\left(g^{-1}_{\ell(0)} \circ P^A_{\ell_t^{-1}} \circ g_{\ell(t)}\right)(s(\ell(t))) - \left(g^{-1}_{\ell(0)} \circ g_{\ell(0)}\right)(s(\ell(0)))}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{P^A_{\ell_t^{-1}}(s(\ell(t))) - (s(\ell(0)))}{t} \\
&= \nabla^A_{\dot\ell(0)}(s)
\end{aligned}$$

すなわち $g^*A = A$.　　　　証明終わり

この補題を使って次の主張を証明しよう．

命題 2.2.5

(1) 制限写像 $I_A \to G,\ g \mapsto g_p$ は単射である．

(2) その像は A のホロノミー群の中心化群 (centralizer) $\{g \in G \mid P_\ell \circ g = g \circ P_\ell, \forall \ell \in \Omega(M,p)\}$ （すなわち p を始点とするすべての閉曲線のホロノミーと交換可能な元全体）に一致する．

証明 (1) $g \in I_A$, $g_p = 1$ とする．$q \in M$ に対して p と q を結ぶ道を何でもいいから一つとり ℓ とおく．補題 2.2.4 より $P_\ell \circ g_p = g_q \circ P_\ell$ ゆえ $g_q = 1$．これが任意の $q \in M$ に対して成り立つから $g = 1$．これで (1) が示された．

(2) 制限写像 $I_A \to G,\ g \mapsto g_p$ の像がホロノミー群の中心化群に含まれることは補題 2.2.4 よりしたがう．逆に中心化群の元 g_0 に対して $g \in I_A$ で $g_p = g_0$ なるものを作ろう．任意の $q \in M$ に対して p と q を結ぶ道を何でもいいから一つとり ℓ とおく．

$$g_q = P_\ell \circ g_0 \circ P_\ell^{-1}$$

と定める．これが ℓ の取り方によらないことを示そう．p と q を結ぶ別の道をとり ℓ' とおく．ℓ で行ってから ℓ' で帰ってくる道 $\ell - \ell'$ は$\Omega(M,p)$ の元である．したがって仮定より $P_{\ell-\ell'} \circ g_0 = g_0 \circ P_{\ell-\ell'}$．一方定義より $P_{\ell-\ell'} = P_{\ell'}^{-1} \circ P_\ell$．よって $P_{\ell'}^{-1} \circ P_\ell \circ g_0 = g_0 \circ P_{\ell'}^{-1} \circ P_\ell$．これから $P_\ell \circ g_0 \circ P_\ell^{-1} = P_{\ell'} \circ g_0 \circ P_{\ell'}^{-1}$ が直ちに得られる．すなわち g_q は ℓ の取り方によらない．これでゲージ変換が定まった．

こうして得られたゲージ変換が接続 A を保つことの証明は上の g_q が道 ℓ の取り方によらないことの証明と同様であるので読者に任せる． 証明終わり

さてここで話を構造群が $SU(2)$ である場合に限ることにしよう．命題 2.2.5 により，接続 A のホロノミー群を $H = \{P_\ell \mid \ell \in \Omega(M,p)\}$ とおくと，H は $SU(2)$ の部分群で，I_A は H の中心化群である．一般に $SU(2)$ の部分群 H は次のどれかを満たす．

(2.2.3.1) H は $SU(2)$ の中心 $\{\pm 1\}$ に含まれる．このとき H の中心化群は $SU(2)$ 全体になる．

(2.2.3.2) H は $U(1) \subseteq SU(2)$ の部分群と共役である．(そして $\{\pm 1\}$ には含まれない．) ここで $U(1)$ は対角行列全体である．このとき H の中心化群は $U(1)$ になる．

(2.2.3.3) (1),(2) のどちらでもないとき．このとき H の中心化群は $\{\pm 1\}$ に一致する．

以上の三つの場合に中心化群がそこで述べたとおりであることの証明は読者に任せる．

(2.2.3.3) が成立するとき接続は既約 (irreducible)，そうでないとき可約 (reducible) という．定理 2.2.2 の 2 番目の条件は既約性である．

補題 2.2.6　$SU(2)$ 接続に対して次の二つの条件は同値である．

(1) $d_A : Ad\,\eta \otimes \Lambda^0(M) \to Ad\,\eta \otimes \Lambda^1(M)$ が単射．

(2) A は既約．

証明

(1) ⇒ (2)　A が可約であれば上で述べたようにそのホロノミー群の中心化群は $SU(2)$ または $U(1)$ で特に次元を持つ．つまり 1 係数変換群 g_t で $g_tA = A$ なるものがある．$\left.\frac{dg_t}{dt}\right|_{t=0}$ は $Ad\,\eta \otimes \Lambda^0(M)$ の (0 でない) 元であるが $g_tA = A$ を微分することで ((2.2.1) を導いた計算により．) $d_A\left(\left.\frac{dg_t}{dt}\right|_{t=0}\right) = 0$ がわかる．したがって (1) は成立しない．

(2) ⇒ (1)　$d_A : Ad\,\eta \otimes \Lambda^0(M) \to Ad\,\eta \otimes \Lambda^1(M)$ が単射でなければ $\{\exp(tX) \mid t \in \mathbf{R}, d_AX = 0\}$ はゲージ変換群の部分群で $gA = A$ なる元で構成される．したがって A は可約である．　証明終わり

さて以上でモジュライ空間の特異点を調べるには，可約な接続を調べればよ

いことがわかった．以下可約な ASD 接続がいつ存在してそれがどのくらいあるか述べよう．

まず可約な接続のうちでそのホロノミー群の中心化群が $SU(2)$ であるものについて述べよう．これはすなわちホロノミー群が $\{\pm 1\}$ に含まれるものである．$\{\pm 1\}$ は離散的な群であるからこのような接続は平坦接続である．したがってこのような接続があれば多様体の基本群 $\pi_1 M$ から $\{\pm 1\}$ への準同型写像が導かれる．チャーン数が 0 でない限りこのような接続はない．

ただしこのような接続（自明な接続）の存在を忘れてしまってもいいわけではない．実は自明な接続はもっとも退化したやっかいなもので，これについての考察は多くの場合一番困難なものになる．これについてはおいおい後の章で触れることになるであろう．

次にホロノミー群の中心化群が $U(1)$ である場合を考えよう．正確にいえばこの場合 $p \in M$ でのホロノミー全体の作る群は $SU(2)$ に含まれる対角行列全体と共役である．p の近傍でのベクトル束の自明化を（定数行列で）取りかえればはじめからホロノミー群が対角行列からなるとしてよい．さてこれを使って（複素 2 次）ベクトル束 ζ を二つの（複素）直線束に分解しよう．ζ_p（p での ζ のファイバー）の基底 (e_1, e_2) をこの基底について接続 A のホロノミーが対角行列からなるようにとる．直線束 L を

$$L_q = \{cP_\ell(e_1) \mid c \in \mathbf{C}\}$$

ただし ℓ は p と q を結ぶ任意の道，で定義する．この定義を正当化するには次の補題を示す必要がある．

補題 2.2.7 $L_q = \{cP_\ell(e_1) \mid c \in \mathbf{C}\}$ は p と q を結ぶ道 ℓ の取り方によらない．

証明 ℓ' を別の道とすると $P_{\ell-\ell'}$ は対角行列であるから，$P_{\ell-\ell'}(e_1) = ce_1$ なる定数 $c \in \mathbf{C}$ が存在する．したがって $P_\ell(e_1) = cP_{\ell'}(e_1)$．これから補題は明らかである．　証明終わり

これで直線束 L ができた．L は定義から平行移動不変であるから$\Gamma(L) \subseteq \Gamma(\zeta)$ は共変微分で保たれる．

同様に e_2 を使って直線束 L' が得られる．これも平行移動不変である．

p で L と L' は直交する．したがって平行移動不変性より L と L' は至るところ直交する．よって $\zeta \cong L \oplus L'$．さらに補題 1.2.12 よりこの分解は接続 A を保つ．つまり L, L' 上の接続 A_L, $A_{L'}$ があって $A = A_L \oplus A_{L'}$.（接続の直和の定義をしていないが明らかであろう.）

次に $L' \cong L^*$（右辺は $Hom(L, \mathbf{C})$ を指す.）を示そう．ζ の構造群は $SU(2)$ であるからその 2 次の外積代数 $\Lambda^2\eta$ は自明である．この自明化を φ とおく．そこで準同型：$L \otimes L' \to \mathbf{C}$ を $u \otimes v \mapsto \varphi(u \wedge v)$ で定義する．$\zeta \cong L \oplus L'$ よりこれは明らかに同型である．したがって同型 $L' \cong L^*$ が得られる．この同型が接続を保つことも容易に証明できる．

以上の議論をまとめておこう．

命題 2.2.8　自明でない可約接続 A に対して分解 $\zeta \cong L \oplus L^*$ が存在してこの分解について $A = A_L \oplus (A_L)^*$ が成り立つ．

このように分解したときの ζ と L のチャーン類の関係を述べよう．ζ の第 1 チャーン類は 0 であったからその第 2 チャーン類は微分形式 $\frac{1}{8\pi^2}Tr(F_A \wedge F_A)$ の定めるド・ラーム (de Rham) コホモロジー類である．定義より

$$F_A = \begin{pmatrix} dA_L & 0 \\ 0 & -dA_L \end{pmatrix} \tag{2.2.3}$$

が成り立つ．一方 L の第 1 チャーン類は $\frac{1}{2\sqrt{-1}\pi}dA_L$ で与えられる．したがって

$$c^2(A) = -c^1(A_L) \cup c^1(A_L)$$

が成り立つ．

以上の計算は逆にたどることができる．すなわち複素直線束 L とその上の接続 A_L に対して $c^2(A) = -c^1(A_L) \cup c^1(A_L)$ であるような $SU(2)$ 束上の接続が対応する．

さて以上のような状況で A が ASD であるという条件は A_L に対して言い

換えるとどうなるであろうか．答えは (2.2.3) 式から容易にわかる．すなわち $*dA_L = -dA_L$ である．

ここで次のことを思い出そう

補題 2.2.9　多様体 M 上の 2 次微分形式 ω が閉形式でそのド・ラームコホモロジー類は $H^2(M;\mathbf{Z})$ の $H^2(M;\mathbf{C})$ への像に含まれているとする．このとき M 上の複素直線束 L とその上の接続 A_L があって ω は A_L の曲率 F_{A_L} に一致する．

証明はチェック (Čech) コホモロジーの言葉を使うのが一番自然でそうすると容易である．たとえば [小林] 4 章 §3 を見ていただくことにしてここでは省略する．

以上で述べてきたのは $c^2(\zeta) = -c^1(L) \cup c^1(L)$ なる複素直線束 L，あるいは $c^2(\zeta) = -[\omega]^2$ なる $H^2(M;\mathbf{Z})$ の元 $[\omega]$ が与えられたとき，ζ の可約接続を作ることができる，また ζ の可約接続はすべてこうして得られるということであった．それでは $c^2(\zeta) = -[\omega]^2$ なるコホモロジー類 $[\omega]$ と可約接続のゲージ同値類は 1 対 1 に対応するであろうか．ほぼそうであるが少し違う．すなわち $-[\omega]$ を考えよう．これも $c^2(\zeta) = -(-[\omega])^2$ を満たす．一方 $c^1(L) = [\omega]$ とすると $c^1(L^*) = -[\omega]$ である．すなわち $[\omega]$ に対応する可約接続が $A_L \oplus (A_L)^*$ とすると，$-[\omega]$ に対応するのは $(A_L)^* \oplus A_L$ である．容易にわかるようにこの二つの接続はゲージ同値である．これ以外にゲージ同値な組がないことも容易にわかる．

いままで述べてきたことをあわせると次の主張が証明されたことになる．

定理 2.2.10　ζ を 4 次元閉多様体 M 上の第 2 チャーン数 $k > 0$ の $SU(2)$ ベクトル束とする．このとき (1) と (2) は 1 対 2 に対応する．

(1) ζ 上の可約 ASD 接続のゲージ同値類．

(2) M 上の 2 次閉微分形式 ω で次の三つの条件を満たすもの．

(a) $*\omega = -\omega$.

(b) ω のド・ラームコホモロジー類は $H^2(M;\mathbf{Z})$ の像に含まれる.

(c) $-\int \omega \wedge \omega = c^2(\zeta) = k$.

復習をかねて対応を構成しよう．まず ζ 上の可約 ASD 接続 A から出発するとこれを使って直線束 L とその上の接続 A_L が得られた．A が ASD 接続であることから $*F_{A_L} = -F_{A_L}$ が得られる．

よって F_{A_L} は条件 (a),(b),(c) を満たす．((b) はチャーン類の整数性，(c) は ζ と L のチャーン類の関係からでる.）これで (1) $\Rightarrow$ (2) が示せた．(2) $\Rightarrow$ (1) を示すにはまず (a),(b),(c) を満たす微分形式 ω をとる．補題 2.2.9 よりこれから直線束 L とその上の接続 A_L が得られる．条件 (c) より $L \oplus L^*$ と ζ は同型である．これから接続 A_L を使って ζ 上の接続が構成できる．この接続が可約 ASD 接続であることは作り方から明らかである．

この二つが互いの逆の構成であることは容易にチェックできる．

定理 2.2.10 を使って，いつ可約 ASD 接続が存在するか調べよう．まず条件 (a) について考えよう．条件 (a) と ω が閉微分形式であることから $\delta\omega = -*d*\omega = 0$. したがって $\Delta\omega = 0$ すなわち ω は調和形式である．一方 §0.3 で述べたように調和 2 形式の空間 $\mathcal{H}^2(M;\mathbf{R}) = \{u \in \Lambda^2(M) \mid \Delta u = 0\}$ は多様体 M のコホモロジー $H^2(M;\mathbf{R})$ と同型である．さらに次のことが成り立つ

補題 2.2.11　$\mathcal{H}^2_\pm(M;\mathbf{R}) = \left\{ u \in \Lambda^2(M) \,\middle|\, \begin{array}{l} \Delta u = 0 \\ *u = \pm u \end{array} \right\}$ は $b_2^\pm$ 次元のベクトル空間である．ここで $b_2^\pm$ はそれぞれ $H^2(M;\mathbf{R})$ 上の交点形式の正および負の固有空間の次元である．

証明　$\mathcal{H}^2(M;\mathbf{R})$ と $H^2(M;\mathbf{R})$ を同一視するとその上の交点形式は

$$Q(u,v) = \int u \wedge v$$

で与えられる．すると

$$Q(u,v)=\int_M g(u,*v)*1=\langle u,*v\rangle=\langle u_+,v_+\rangle-\langle u_-,v_-\rangle$$

この式から補題は直ちに得られる．

さてここで条件 (c) を考えよう．この式は $Q(u,u)=-k$ と書き直せる．Q は正の固有値 b_2^+ 個，負の固有値 b_2^- 個の 2 次形式であるからこれから集合

$$\mathcal{H}^2_\pm(k)=\left\{u\in\Lambda^2(M)\;\middle|\;\begin{array}{l}\Delta u=0\\ {}^*u=\pm u\\ Q(u,u)=-k\end{array}\right\}$$

の形は容易にわかる．

最後に条件 (b) であるがこれが一番問題である．(a)(c) を満たす集合の形 $\mathcal{H}^2_-$ は多様体のリーマン計量によらなかった．しかしこれを $H^2(M;\mathbf{R})$ の部分集合とみなすと，これは計量による．したがって $\mathcal{H}^2_-$ と $H^2(M;\mathbf{Z})$ の交点はリーマン計量による．この様子を見るために場合を三つに分けて考えよう．

[場合 1]　$b_2^+=0$．この場合は $\mathcal{H}^2_-(M;\mathbf{R})=\mathcal{H}^2(M;\mathbf{R})$ である．したがって (a),(b),(c) を満たす 2 次形式は整係数コホモロジー類 u で $Q(u,u)=k$ なるものと 1 対 2 に対応する．これが 4 次元多様体の交叉形式と ASD 接続のモジュライ空間を結びつける一つのやり方でありドナルドソンによって [D1] で効果的に用いられた．

[場合 2]　$b_2^+\geq 1$．この場合 $\mathcal{H}^2_-(k)$ は余次元 b_2^+（または次元 b_2^-）の線形部分空間と 2 次曲面 $\left(\left\{u\in H^2(M;\mathbf{R})\mid Q(u,u)=-k\right\}\right)$ の交わりである．

たとえば b_2^+ が 1 の場合を考えよう．このとき $(H^2(M;\mathbf{R}),Q)$ はタイプ $(1,b_2-1)$ の内積空間である．$\mathcal{H}^2_-(k)$ と $H^2(M;\mathbf{Z})$ の交わりを調べるには双対空間（直交補空間）に移った方が都合がよい．まず $\left\{u\in\mathcal{H}^2(M;\mathbf{R})\mid *u=-u\right\}$ の直交補空間は 1 次元でこの基底 e は $Q(e,e)>0$ をみたす．$(H^2(M;\mathbf{R}),Q)$ の正の固有空間の向きを選んでおく．言い換えると 2 葉双曲面 $\left\{u\in H^2(M;\mathbf{R})\mid Q(u,u)=1\right\}$ の連結成分の一方を選んでおく．これを $\mathbf{H}^{b_2-1}$ とおく．$\left\{u\in\mathcal{H}^2(M;\mathbf{R})\mid *u=-u\right\}$

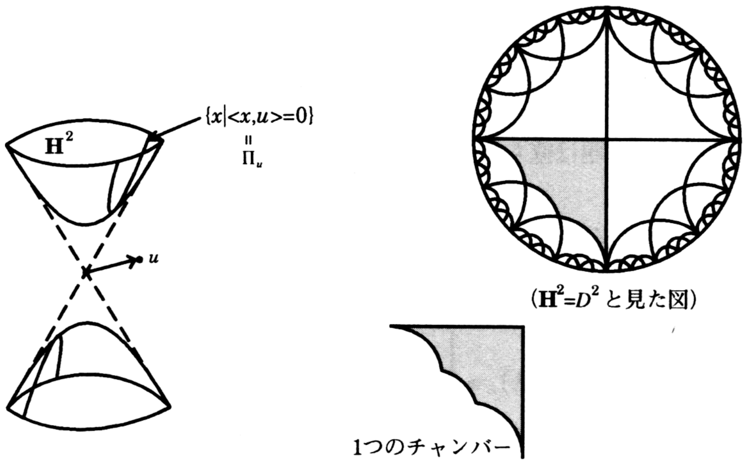


図 2.2.2

の直交補空間の基底 e を $\mathbf{H}^{b_2-1}$ に含まれるように一意にとることができる．このの e をとると，ホッジの作用素は $*u=-u+2\langle u,e\rangle$ と表される．したがって (a), (b), (c) を満たす ω の集合は$\left\{\omega\in H^2(M;\mathbf{Z})\mid\langle\omega,e\rangle=0\right\}$ と一致する．e を $\mathbf{H}^{b_2-1}\subseteq H^2(M;\mathbf{R})$ の元とみなすとこれはリーマン計量の取り方による．

一方 $H^2(M;\mathbf{Z})$ の 0 でない元 u に対して$\Pi_u=\left\{x\in\mathbf{H}^{b_2-1}\mid\langle x,u\rangle=0\right\}$ とおく．$\mathbf{H}^{b_2-1}$ には $(H^2(M;\mathbf{R}),Q)$ の（正定値ではない）計量から，（正定値の）リーマン計量が定まり，これは至るところ曲率が -1 になる．この計量について Π_u は全測地的である．このことは特に使わないから証明しない．$\left\{u\in H^2(M;\mathbf{Z})\mid Q(u,u)\ =-k\right\}$ の元 u を動かしたときのΠ_u 全体は加算無限個の余次元 1 の超曲面の和集合である（図 2.2.2 参照）．この集合は計量によらない．この集合の $\mathbf{H}^{b_2-1}$ での補集合の連結成分のことをチャンバー (chamber) と呼ぶ．

以上の考察により可約な ASD 接続が存在するのは計量に依存して定まる $\mathbf{H}^{b_2-1}$ の元 e がどのチャンバーにも属していないときである．

後に示すようにほとんどすべての計量に対して e はどれかのチャンバーに含まれる．したがって可約な ASD 接続は存在しない．

しかし計量の 1 次元のパラメーターに依存した族を考えると，この族を generic

にとってもそのあるパラメーターに対応する計量には可約な接続が存在する．先走って言えばこのことのために $b_2^+ = 1$ の場合のドナルドソン不変量は e がどのチャンバーに含まれるかによって異なる．このことが不変量の構造を複雑にしている．この場合にも不変量は e の含まれるチャンバーのみによって決まり，またあるチャンバーから別のチャンバーへ移ったときの差が具体的に表されると考えられていて，多くの場合にそれが示されている ([KoM]).

$b_2^+ > 1$ の場合にはこういうことは生じず，事情はこの場合にはより単純である．すなわちほとんどすべての計量に対して可約な ASD 接続は存在せず，またほとんどすべての計量の 1 次元のパラメーターの族に対しても可約な ASD 接続は存在しない．

これらのことの証明については横断正則性 (transversality) を論ずるときに述べることにする．

さてもし可約な ASD 接続が存在するとどういうことがおきているのであろうか．とりあえずこれが generic な計量でも生じる $b_2^+ = 0$ の場合を論じよう．このような可約接続を扱うための一つのトリックとしてゲージ変換群を少し小さい群に制限すると都合がよい場合がある．すなわち M の基点 p_0 を一つ固定し基点付きゲージ変換群 $\mathcal{G}_0(M,\zeta) = \{g \in \mathcal{G}(M,\zeta) \mid g(p_0) = 1\}$ を考える．補題 2.2.6(1) より $\mathcal{G}_0(M,\zeta)$ はどの接続の等方部分群とも交わらない．したがって $\widehat{\mathcal{M}}(M,\zeta) = \{A \mid *F_A = -F_A\}$ の $\mathcal{G}_0(M,\zeta)$ による商空間 $\widetilde{\mathcal{M}}(M,\zeta)$ は d_A^+ が全射ならば（A が可約であっても）A の同値類の近傍で多様体になる.（このことの証明は定理 2.2.2 の証明と同じである.）

さて A が可約で A のホロノミーの中心化群が $U(1)$ である場合を考えよう．$\mathcal{G}(M,\zeta)/\mathcal{G}_0(M,\zeta) = SU(2)$ であるから $\mathcal{M}(M,\zeta) = \widetilde{\mathcal{M}}(M,\zeta)/SU(2)$ である．一方 $[A]$ の $\widetilde{\mathcal{M}}(M,\zeta)$ での同値類に対する $\mathcal{G}(M,\zeta)/\mathcal{G}_0(M,\zeta) = SU(2)$ の等方部分群は $U(1)$ で，また $[A]$ の $SU(2)$ による軌道は $S^2 = SU(2)/U(1)$ である．可約接続のゲージ同値類は有限個しかないから（あるいは離散的だから）$[A]$ の近傍の可約接続はすべてこの軌道にはいる．$\widetilde{\mathcal{M}}(M,\zeta)$ の $[A]$ を通る部分多様体 U でその次元が $\dim\mathcal{M}(M,\zeta) - \dim S^2$ で $[A]$ の $SU(2)$ による軌道に $[A]$ で直交するものをとる．さらに U は $[A]$ の等方部分群，$U(1)$ で保たれる

としてよい．すると $\mathcal{M}(M,\zeta)$ の A のゲージ同値類の近傍は $U/U(1)$ に可微分同相である．U への $U(1)$ の作用は $[A]$ を不動点としほかの不動点を持たない．したがって $\mathcal{M}(M,\zeta)$ での A のゲージ同値類の近傍は，S^{2N+1} へ $U(1)$ の標準的な作用の商空間の錘，すなわち複素射影空間の錘である．以上の議論をまとめると，

定理 2.2.12　M は $b_2^+=0$ なる単連結閉4次元多様体，A を可約 ASD 接続とし d_A^+ は全射とする．すると $\mathcal{M}(M,\eta)$ での A のゲージ同値類の近傍は複素射影空間の錘と可微分同相である．

同様のことが $b_2^+>0$ のときも成立する．ただしこの場合は generic な計量に対しては可約 ASD 接続はないから，意味があるのは計量の族を考えるときである．

以上で ASD 接続のモジュライ空間の局所構造についての概説を終わる．詳細は次章で述べる．次の節では ASD 接続のモジュライ空間の大域的な構造について概説する．

§ 2.3　モジュライ空間の大域構造 I

–向き付けとコホモロジー類（楕円型作用素の族の指数定理）–

§2.1 でドナルドソン不変量についてその粗い考え方を述べた．すなわちそれは ASD 接続のモジュライ空間の作る部分多様体の基本ホモロジー類であった．基本ホモロジー類を定義するには部分多様体に向きを与えなければならない．まずこれについて述べよう．

その前に有限次元の場合にベクトル束の切断の零点集合の向きがどのように決まっていたか思い出そう．有限次元の向きの付いた多様体 X とその上の（向きの付いた）ベクトル束 E ，その切断 $s: M \to E$ に対して $s^{-1}(0)$ の向きは次のように定めていた．$p \in s^{-1}(0)$ に対して接空間 $T_p s^{-1}(0)$ は s の微分 $ds: T_pM \to E_p$ の核である．(p の近傍での E の自明化を決めておく.) したがって二つのベクトル空間 T_pM, E_p の向きから $T_p s^{-1}(0)$ の向きが定まる．この向きは p について連続に変わるから $s^{-1}(0)$ の向きが決まる．

しかしこの議論をそのまま我々が考えている無限次元の場合に一般化するわけにはいかない．なぜならばその場合二つのベクトル空間 T_pM, E_p にあたるのはともに無限次元空間であり，したがってその向きというのは意味がない．むろんモジュライ空間の接空間そのものは有限次元でありその向きには意味がある．これはフレドホルム作用素の指数がいわば無限大 - 無限大 であるにもかかわらず意味のある有限次元の数であるのに似ている．すなわちアティヤ–シンガーの指数定理がベクトル空間の次元という数だけを問題にしていたのに対して，ベクトル空間の構造（向き）まで考えて調べることにあたる．これを行うのが楕円型作用素の族の指数という概念である．これについて少し一般の形で説明しよう．

定義 2.3.1　多様体 M と空間 X に対して，X の点を媒介変数とする（X でパラメトライズ (parametrize) される）楕円型作用素の族とは，$X \times M$ の上のベクトル束 E, F と各々の $x \in X$ に対して E の $\{x\} \times M$ への制限 $E|_{\{x\}\times M}$ から，F の $\{x\} \times M$ への制限 $F|_{\{x\}\times M}$ への楕円型作用素 P_x を与える対応

であって，P_x は x について C^∞ 級であるものである．

P_x の x についての微分可能性は定義していないが局所的に自明化して定義すればよい．

楕円型作用素の族はより一般に M をファイバーとし X を底空間とするファイバー束に対して定義されるのだが，ここでは必要なのは上の場合（ファイバー束が直積の場合）だけなのでこの特別の場合のみ論じることにする．

ここでまず使うのは次の場合である．(これは§2.1 でも考えた.) 4 次元多様体 M とその上の $SU(2)$ ベクトル束 ζ を考える．直積 $\mathcal{A}(M,\zeta)\times M$ とその上の二つの直積ベクトル束 $Ad\,\zeta\otimes\Lambda^1(M)$, $Ad\,\zeta\otimes(\Lambda^0(M)\oplus\Lambda^2_+(M))$ を考える．これらをゲージ群 $\mathcal{G}(M,\zeta)$ で割ると $\mathcal{B}(M,\zeta)\times M$ 上のベクトル束 $\mathcal{A}(M,\zeta)\times_{\mathcal{G}(M,\zeta)}(Ad\,\zeta\otimes\Lambda^1(M))$, $\mathcal{A}(M,\zeta)\times_{\mathcal{G}(M,\zeta)}(Ad\,\zeta\otimes(\Lambda^0(M)\oplus\Lambda^2_+(M)))$ が得られる．これらの間の $\mathcal{B}(M,\zeta)$ の点を媒介変数とする（M 上の）楕円型作用素の族が定義される．すなわち $[A]\in\mathcal{B}(M,\zeta)$ に対して

$$P_{[A]}=d_A^+\oplus d_A^*:Ad\,\zeta\otimes\Lambda^1(M)\to Ad\,\zeta\otimes(\Lambda^2_+(M)\oplus\Lambda^0(M))$$

と置けばよい．(正確にいうとこの構成をゲージ変換群で割る前のベクトル束の間で行い，共変微分のゲージ変換不変性を用いて $P_{[A]}$ を定義する．この辺は後でもう少し述べる.)

さて X の点を媒介変数とする楕円型作用素の族が与えられたとき，我々が構成したいのは X の位相的 K群（$K(X)$ または $KO(X)$）の元 Index(P) である．位相的 K群は少し後で（簡単に）定義するが，その前に Index(P) で何を定義したいのか少し説明しよう．

まず簡単のために任意の $x\in X$ に対して P_x は全射としよう．すると $\dim\mathrm{Ker}\ P_x=\mathrm{Index}P_x$ であるから指数のフレドホルム作用素の連続変形に関する不変性により $\dim\mathrm{Ker}\ P_x$ は $x\in X$ によらず一定である．P_x は x について連続に動くから Ker P_x は「x について連続に動く」と思ってよいであろう．(この言葉は正確に定義しなければならないが.) それで Ker P_x を $x\in X$ 全部について集めると X 上のベクトル束ができると考えられる．これが Index(P) である．同様に任意の x について P_x は単射とすると CoKer P_x を寄せ集める

ことで$-$Index(P) が定義される.（この $-$ の意味も定義されなければならない.）

さて一般には P_x が単射にならない x も，全射にならない x もあるであろう．このときは Ker P_x も CoKer P_x もその次元がジャンプしてしまい，したがって x について不連続でありベクトル束はなさない．しかしそのジャンプする分は打ち消し合う（指数の連続変化に関しての不変性）．このことに基づいて差 [Ker P_x] $-$ [CoKer P_x] は $K(X)$ の元として定義できる，これがあらすじである.

さてこれを数学らしくするためにまず位相的 K群を定義しよう.

定義 2.3.2 X をコンパクト位相空間とする．$Vect_{\mathbf{C}}(X)$ で X 上の複素ベクトル束の同型類全体とする．$Vect_{\mathbf{C}}(X)$ の元を基底とする自由 $\mathbf{Z}$ 加群を考えその$[E_1 \oplus E_2] - [E_1] - [E_2]$なる形の元で生成される部分加群による商を $K(X)$ とする.

また $Vect_{\mathbf{R}}(X)$ で X 上の実ベクトル束の同型類とし，$Vect_{\mathbf{R}}(X)$ の元を基底とする自由 $\mathbf{Z}$ 加群の $[E_1 \oplus E_2] - [E_1] - [E_2]$ なる形の元で生成される部分加群による商を $KO(X)$ とする.

K理論はリーマン (Riemann)–ロッホ (Roch) の定理の相対化のためにグロタンディク (Grothendieck) が導入したものである．元々のリーマン–ロッホの定理とは単独の代数多様体（複素多様体）についてそのドルボー (Dolbeault) 複体

$$\Lambda^{0,0} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,n-1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,n}$$

を考えその指数を計算するものであった.（一般の場合のドルボー複体の定義はしない.）これは多様体上に正則ベクトル束が存在するときそれを係数としたものにも拡張される．その相対化には代数多様体の間の写像$\pi : Y \to X$ を考える．各々の $x \in X$ に対してファイバーのドルボー複体の指数を考えこの族をとると，X 上に「ベクトル束」が定まる．係数付きのドルボー複体を考えると Y 上のベクトル束に対して X 上の「ベクトル束」を対応させる対応が定まる．ここで問題は指数が $x \in X$ を動かすとジャンプすることである．これは K群の元と考えると解決でき結局写像 $\pi! : K(Y) \to K(X)$ が得られる．代数幾何

ではこの構成は導来関手（この場合は higher direct image sheaf）を用いて代数的に行われる．この構成の類似をフレドホルム作用素の族と考えて解析的に行ったのが，アティヤとシンガーによる楕円型作用素族の指数の構成である．

さて P_x を X の点を媒介変数とする M 上の楕円型作用素の族とする．以下定義したいのは $KO(X)$ の元 IndexP_x である．少し前に述べたように，これを定義するための一番の問題点は P_x が一般の $x \in X$ に対しては全射でも単射でもないことである．そのため次のような構成を行う．$P_x : \Gamma(E|_{\{x\}\times M}) \to \Gamma(F|_{\{x\}\times M})$ であった．$E|_{\{x\}\times M} = E_x$, $F|_{\{x\}\times M} = F_x$ とおく．まず $x \in X$ をとる．その近傍 U_x を，E, F の $U_x \times M$ への制限が $U_x \times E_x$, $U_x \times F_x$ に同型なようにとることができる．さて $P_x : \Gamma(E|_{\{x\}\times M}) \to \Gamma(F|_{\{x\}\times M})$ はフレドホルム作用素であるから CoKer P_x は有限次元である．したがって有限次元のベクトル空間 $\mathbf{R}^{k_x}$ と線形写像 $L_x : \mathbf{R}^{k_x} \to \Gamma(F|_{\{x\}\times M})$ で $\mathrm{Im}\, L_x + \mathrm{Im}\, P_x = \Gamma(F|_{\{x\}\times M})$ なるものが存在する．必要なら U_x を小さくとり直して任意の $y \in U_x$ に対して $\mathrm{Im}\, L_x + \mathrm{Im}\, P_y = \Gamma(F|_{\{x\}\times M}) = \Gamma(F|_{\{y\}\times M})$ が成り立つようにすることができる．このような U_x 有限個 $(U_{x_i}, i = 1, \cdots, N)$ で X をおおう．(X はコンパクトであった.) $k = k_1 + \cdots + k_N$ とおく．被覆 $X = \bigcup U_{x_i}$ に従う 1 の分解 $1 = \sum \chi_i$ （χ_i の台が U_{x_i} に含まれる）をとり，$\widehat{L}_x : \mathbf{R}^k \to \Gamma(F_x)$ を $\widehat{L}_x = \sum \chi_i(x) \cdot L_{x_i}$ で定義する．作り方より $P_x + \widehat{L}_x : \Gamma(E_x) \oplus \mathbf{R}^k \to \Gamma(F_x)$ は任意の $x \in X$ に対して全射である．

このことを使って前のページでちょっと述べた次のことが証明できる．

補題 2.3.3　$\bigcup_x \mathrm{Ker}\,(P_x + \widehat{L}_x)$ は X 上の（有限次元）ベクトル束である．

証明をきちっと行うにはソボレフ (Sobolev) 空間などの定義が必要である（楕円型作用素がフレドホルム作用素であることの証明が必要なため）．それで完全に厳密な証明は与えない（証明それ自体は別に難しくない）．あらましは次のとおりである．局所的な問題であるので，ある $x \in X$ の近傍で証明すればよい．$P_x + \widehat{L}_x : \Gamma(E_x) \oplus \mathbf{R}^k \to \Gamma(F_x)$ は全射であるから Ker $(P_x + \widehat{L}_x)$ の直交補空間（適当に内積を入れて考えて）V 上への $P_x + \widehat{L}_x$ の制限は同型写像である．(本当は関数空間を指定しなければいけない.) したがって x に十分近い y に対しても

$P_y+\widehat{L}_y$ の V への制限は同型写像である．(ここで $P_y+\widehat{L}_y$ の定義域$\Gamma(E_y)\oplus\mathbf{R}^k$ は $P_x+\widehat{L}_x$ の定義域 $\Gamma(E_x)\oplus\mathbf{R}^k$ と同一視できるので $V\subseteq\Gamma(E_x)\oplus\mathbf{R}^k$ への $P_y+\widehat{L}_y$ の制限を考えることができる．) したがって直交直和分解 $\Gamma(E_x)\oplus\mathbf{R}^k=V\oplus\mathrm{Ker}\ (P_x\oplus\widehat{L}_x)$ を考えると直交射影 $\mathrm{Ker}\ (P_y\oplus\widehat{L}_y)\to\mathrm{Ker}\ (P_x\oplus\widehat{L}_x)$ は同型写像である．この同型写像は y について連続であるから結局 x の小近傍 U に対して同型$\bigcup_{y\in U}\mathrm{Ker}\ (P_y+\widehat{L}_y)\cong U\times\mathrm{Ker}\ (P_x+\widehat{L}_x)$ が示された．これが示すべきことであった．

さて補題を使って $\mathrm{Index}P_x=\left[\bigcup_x\mathrm{Ker}\ (P_x+\widehat{L}_x)\right]-[\mathbf{R}^k]$ とおく．

補題 2.3.4　$\mathrm{Index}P_x=\left[\bigcup_x\mathrm{Ker}\ (P_x+\widehat{L}_x)\right]-[\mathbf{R}^k]\in KO(X)$ は$\widehat{L}_x$ のとり方によらない．

略証　$\widehat{L}'_x:\mathbf{R}^{k'}\to\Gamma(F_x)$ を別の選び方とする．$P_x+\widehat{L}_x+\widehat{L}'_x$ は全射であるからベクトル束$\bigcup_{x\in X}\mathrm{Ker}\ (P_x+\widehat{L}_x+\widehat{L}'_x)$ を得る．補題 2.3.3 の証明と同様にして直交射影を使ってベクトル束の同型

$$\bigcup_{x\in X}\mathrm{Ker}\ (P_x+\widehat{L}_x+\widehat{L}'_x)\cong\bigcup_{x\in X}\mathrm{Ker}\ (P_x+\widehat{L}_x)\oplus\mathbf{R}^{k'}\cong\bigcup_{x\in X}\mathrm{Ker}\ (P_x+\widehat{L}'_x)\oplus\mathbf{R}^k$$

を示すことができる．したがって

$$\left[\bigcup_x\mathrm{Ker}\ (P_x+\widehat{L}_x)\right]-[\mathbf{R}^k]=\left[\bigcup_x\mathrm{Ker}\ (P_x+\widehat{L}'_x)\right]-[\mathbf{R}^{k'}]\in KO(X)$$

これが証明すべきことであった．

以上で楕円型作用素の族の指数を定義した．アティヤ–シンガーは楕円型作用素の族の指数の特性類を計算する公式（族の指数定理）を示しているが，ここではそこまではとりあえず必要ないので，族の指数が我々の目的にどのように使われるかに話を移そう．

まず最初に使うのは，モジュライ空間の向き付けに対してである．これは上

で述べた複素ベクトル束の場合ではなく，実ベクトル束の場合である．すなわち X の点を媒介変数とする実楕円型作用素の族が与えられたときの X 上の実ベクトル束の構成である．この節の始めの方で述べた $\mathcal{B}(M,\zeta)$ の点を媒介変数とする（M 上の）楕円型作用素の族

$$P_{[A]} = d_A^+ \oplus d_A^* : Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M) \to Ad\,\zeta \otimes (\Lambda_+^2(M) \oplus \Lambda^0(M))$$

を考えよう．ここで定理 2.2.2 と同じ仮定をする．すなわちこの楕円型作用素は $\mathcal{B}(M,\zeta)$ の任意の点 $[A]$ で全射であると仮定する．定理 2.2.2 によればこのとき $\mathcal{B}(M,\zeta)$ は特異点のない多様体になる．

このとき多様体 $\mathcal{B}(M,\zeta)$ の $[A]$ での接空間はこの楕円型作用素の核 (kernel) に一致する．したがってこれらをつなぎ合わせたもの，すなわち $\mathcal{B}(M,\zeta)$ の接ベクトル束は $\mathrm{Index}(d_A^+ \oplus d_A^*) \in KO(\mathcal{B}(M,\zeta))$ である．(この場合は作用素がいたるところ全射なので指数束は K群の元であるだけでなく本当のベクトル束である.)

我々が説明したいのは接ベクトル束が向き付け可能であることである．言い換えるとその第 1 スティーフェル (Stiefel)–ホイットニー (Whitney) 類が 0 であることである．その前に次の事実を注意しておく．

補題 2.3.5　特性類は準同型写像：$w^1 : KO(X) \to H^2(X;\mathbf{Z}_2)$,　$p^1 : KO(X) \to H^4(X;\mathbf{Z})$,　$c^1 : K(X) \to H^2(X;\mathbf{Z})$ を引き起こす．

これは K群の定義と特性類の和公式 $(w^i(E \oplus F) = \sum_{j=0}^{i} w^j(E)w^{i-j}(F)$ など) から直ちに得られる．(K群から $1 + x^1 + \cdots + x^i + \cdots$　(x^i は i 次のコホモロジー類）なる形の元全体にカップ積で積構造を入れたものへの準同型写像として拡張することで，K群の元に特性類を定義することができる．本書では補題 2.3.5 の場合以外は必要ないので述べない.)

先ほど述べたようにモジュライ空間上の接束（AHS 複体の族）を考えるだけならば K群を導入する必要はなかった．しかしこれだとたとえば向き付けを考えるには不向きである．その理由はモジュライ空間 $\mathcal{M}(M,\zeta)$ の位相構造が多

様体の計量に依存しないと考える理由がないことである．(ただし $\mathcal{M}(M,\zeta)$ を実際に決定するのはきわめて難しいことなので，これが多様体の計量によって変わってしまう具体例を構成するのは易しくない.) これに反してすべての接続のゲージ同値類の作る空間 $\mathcal{B}(M,\zeta)$ のホモトピー型の方は多様体 M のホモトピー型にのみよる．またそのコホモロジーなども比較的簡単に計算できる．そこで $\mathcal{M}(M,\zeta)$ の接束を $\mathcal{B}(M,\zeta)$ 上のベクトル束に拡張すればそれが向き付け可能かどうか調べやすい．このためには $\mathcal{M}(M,\zeta)$ の接束を $\mathcal{B}(M,\zeta)$ 上の AHS 複体の族と考えればよい．(そう考えれば拡張できることが今まで説明してきたことであった.) すると拡張は必ずしもベクトル束とは限らないが $KO(\mathcal{B}(M,\zeta))$ の元としては意味を持つ．

ここで少し注意が必要である．それは前に族の指数を定義したとき空間 X をコンパクトとした点である．$\mathcal{B}(M,\zeta)$ はコンパクトではないから AHS 複体の族の指数はそこでしたようには定義できない．(さらにいえばコンパクトでない空間の K群の定義はコンパクトの場合に比べてデリケートである.) しかしこの場合はそんなにこの点を気にする必要はない．すなわち $\mathcal{B}(M,\zeta)$ のコンパクト部分集合で $\mathcal{B}(M,\zeta)$ と基本群が同型なものを考えれば十分である．(このような空間が存在することは容易にわかる.) 以後この点は無視して，$KO(\mathcal{B}(M,\zeta))$ の元として $\mathcal{M}(M,\zeta)$ の接空間が拡張されていると言ってしまおう．

さて，ここで補題 2.3.5 を使おう．前に (§1.3) 述べたように第 1 スティーフェル–ホイットニー類 $w^1(E)$ が 0 であることとベクトル束 E が向き付け可能であることは同値であった．以上によりモジュライ空間が向き付け可能であることを示すには次の補題 2.3.6 を示せば十分である．

補題を述べる前に今までしてきた書き方に少し不正確な点があるので訂正しておこう．というのは $P_A = d_A^+ \oplus d_A^* : Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M) \to Ad\,\zeta \otimes (\Lambda^2_+(M) \oplus \Lambda^0(M))$ の定義なのであるが，この作用素はとりあえず無限次元多様体 (アフィン空間) $\mathcal{A}(M,\zeta)$ 上の (自明な) ベクトル束の間の作用素の族として定まっている．またベクトル束および作用素はゲージ変換群 $\mathcal{G}(M,\zeta)$ の作用で保たれる．もしもゲージ変換群の作用が不動点を持たなければ，これで $\mathcal{B}(M,\zeta)$ の上のベクトル束の間の楕円型作用素の族ができる．しかしゲージ群の作用は不動点を持つ．

§2.1 で述べたように $\mathcal{A}(M,\zeta)$ 上の $\mathcal{G}(M,\zeta)$ の作用で不変なベクトル束を

$\mathcal{B}(M,\zeta)$ の上のベクトル束に落とすには $\mathcal{G}(M,\zeta)$ の作用の各点 $p \in \mathcal{A}(M,\zeta)$ での等方部分群 I_p に対して，I_p のベクトル束の p でのファイバーへの作用が自明でなければならない．

前にも述べたように等方部分群は3通りで $\{\pm 1\}, U(1), SU(2)$ である．等方部分群が $\{\pm 1\}$ である場合その接続を既約と呼ぶのであった．既約な接続のゲージ同値類全体を $\mathcal{B}_*(M,\zeta)$ と書こう．$\{\pm 1\}$ の作用は $P_A = d_A^+ \oplus d_A^* : Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M) \to Ad\,\zeta \otimes (\Lambda_+^2(M) \oplus \Lambda^0(M))$ 上自明であるから，上の $P_A = d_A^+ \oplus d_A^*$ の指数を定義することができる．(後には可約接続に対応する点へも族の指数の作る K群の元を拡張する必要が生じる．このあたりのところはそこまでいったときもう少し詳細に論じる．)

補題 2.3.6　$\mathcal{B}_*(M;\zeta)$ 上の AHS 複体の族の指数 $\mathrm{index}(d_A^* \oplus d_A^+) \in KO(\mathcal{B}_*(M,\zeta))$ の第1スティーフェル–ホイットニー類 $w^1(\mathrm{index}(d_A^* \oplus d_A^+))$ は0である．

補題の証明には $H_1(\mathcal{B}_*(M,\zeta);\mathbf{Z})$ の生成元を調べてその上で $w^1(\mathrm{index}(d_A^* \oplus d_A^+))$ を調べる必要がある．このことの証明はかなりデリケートである．本書ではこれは省略し，[DK]5.4,[FU]§5 を見ていただくことにしたい．

先に進む前に補題 2.3.6 は単に $\mathcal{M}(M,\zeta)$ が向き付け可能であるというより，もう少し多くのことを主張していることに注意しておく．たとえば $\mathcal{M}(M,\zeta)$ が0次元多様体である場合を考えてみよう．この場合 $\mathcal{M}(M,\zeta)$ は有限個の点の集まりであるからこれが向き付け可能なのは明らかである．しかしこの場合に各点に付けるべき向きには**それぞれ** $\pm$ の分の不定性がある．(0次元多様体の向きとは各点に± 1 のどちらかを与えることであると理解する．) したがって $\mathcal{M}(M,\zeta)$ の符号付きの位数（各点の ± 1 を足し合わせたもの）は単に $\mathcal{M}(M,\zeta)$ に向きが付くということからは全く定まらない．

しかし補題 2.3.6 を用いると事情が変わってくる．まず $\mathcal{B}_*(M,\zeta)$ は連結である．したがっていったん向き付け可能であることがわかると $\mathrm{index}(d_A^* \oplus d_A^+) \in KO(\mathcal{B}_*(M,\zeta))$ の向きは二つの可能性しかない．言い換えるとこのやり方で $\mathcal{M}(M,\zeta)$ の各点の向きは**いっせいに**全部の向きを変えることを除いて一意に定まる．すなわち $\mathcal{M}(M,\zeta)$ の符号付きの位数は符号を除いて決まる．$\mathcal{M}(M,\zeta)$

が 0 次元の場合向き付けというのがかえってわかりづらいかもしれないのでこの辺をもうちょっと説明しておこう．

まず族の指数の定義のとき述べたように，有限次元のベクトル空間 $\mathbf{R}^N$ と $\mathcal{B}(M,\zeta)$ （正確にはそのコンパクト部分集合）に媒介変数を持つ線形写像の族 $L_{[A]} : \mathbf{R}^N \to Ad\,\zeta \otimes (\Lambda^0(M) \oplus \Lambda^2_+(M))$ で任意の $[A] \in \mathcal{B}_*(M,\zeta)$ に対して $(d_A^* \oplus d_A^+) + L_{[A]}$ が全射であるものをとる．すると Ker $((d_A^* \oplus d_A^+) + L_{[A]})$ は $\mathcal{B}(M,\zeta)$ （のコンパクト集合）上のベクトル束を与える．$\mathcal{M}(M,\zeta)$ の次元（AHS 複体の指数）は 0 と仮定していたから，ベクトル束 Ker $((d_A^* \oplus d_A^+) + L_{[A]})$ の階数は N である．補題 2.3.6 はこのベクトル束が向き付け可能であることを主張する．そこでこのベクトル束の向きを一つ決めておく．次に付け加えたベクトル空間 $\mathbf{R}^N$ の向きも決めておく．さて $\mathcal{M}(M,\zeta)$ の各々の点 $[A]$ に対して射影：$\mathbf{R}^N \oplus (Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M)) \to \mathbf{R}^N$ の Ker $((d_A^* \oplus d_A^+) + L_{[A]})$ への制限を考えよう．しかるべき横断正則性を仮定すると，この写像は同型写像である．(すなわち AHS 複体がこの点で完全系列になる．これはその指数が 0 であるからである.) Ker $((d_A^* \oplus d_A^+) + L_{[A]})$ と $\mathbf{R}^N$ の上で定めた向き付けをこの写像が保つとき点 $[A]$ には $+1$ の向きを，そうでないとき -1 の向きを与える．これで $\mathcal{M}(M,\zeta)$ の向きが定まった．この向きを決めるにはベクトル束 Ker $((d_A^* \oplus d_A^+) + L_{[A]})$ とベクトル空間 $\mathbf{R}^N$ の向きを決める必要がある．これを取り替えると $\mathcal{M}(M,\zeta)$ の「向き付きの位数」が符号だけ変わる．ベクトル束 Ker $((d_A^* \oplus d_A^+) + L_{[A]})$ とベクトル空間 $\mathbf{R}^N$ の向きの差が元 $\mathrm{index}(d_A^* \oplus d_A^+) \in KO(\mathcal{B}_*(M,\zeta))$ の向きである．補題 2.3.6 は二つあるどちらの向きをとるのかまでは指定しない．これは次のようにして与えられる（[D4]）．

補題 2.3.7　ベクトル空間 $H^0(M;\mathbf{R}) \oplus H^1(M;\mathbf{R})^* \oplus H^2_+(M;\mathbf{R})$ の向きを与えると $\mathrm{index}(d_A^* \oplus d_A^+) \in KO(\mathcal{B}_*(M,\zeta))$ の向きは標準的に定まる．

ちょっと曖昧な書き方であるがたとえば次のような意味である．f を M からそれ自身への可微分同相写像とする．このとき f が M の向きを保てばしかるべく計量を考えて f は $\mathrm{index}(d_A^* \oplus d_A^+) \in KO(\mathcal{B}_*(M,\zeta))$ の自己同型を定める．このとき f が $H^0(M;\mathbf{R}) \oplus H^1(M;\mathbf{R})^* \oplus H^2_+(M;\mathbf{R})$ の向きを保てば f は

$\mathrm{Index}(d_A^* \oplus d_A^+)$ の向きを保つ.

しかも補題の向きは標準的に定まることができる. このときの決め方は多様体 M が (ケーラー (Kähler)) 複素多様体である場合を考えて選ぶ. すなわちその場合にはモジュライ空間 $\mathcal{M}(M,\zeta)$ には複素構造が定まる. (このことは説明しない, [伊藤] をみよ.) これから $\mathcal{M}(M,\zeta)$ には向きが定まるが, この向きが補題がいうものと一致するように選ぶのである. 補題の証明については述べない. ただ A が自明な接続 0 であるとき $H^0(M;\mathbf{R}) \oplus H^1(M;\mathbf{R})^* \oplus H^2_+(M;\mathbf{R})$ は AHS 複体の 0,1,2 次のコホモロジーそのものであったことにだけ注意しておく.

以上で向き付けの話を終わり, 次に§2.2 でも述べた $\mathcal{B}(M,\zeta)$ のコホモロジー類の構成 (写像 $H_i(M;\mathbf{Z}) \to H^{4-i}(\mathcal{B}(M,\zeta);\mathbf{Z})$ の定義) を考えよう. ここにも族の指数の考え方が使われる. ここでは $i=2$ の場合を述べる. そこで $H_2(M;\mathbf{Z})$ の元を考えよう. これは一般に 2 次元の (向きの付いた) 部分多様体$\Sigma \subseteq M$ で表される. そこで Σ 上のベクトル束 ζ の制限を考えその接続のゲージ同値類全体を $\mathcal{B}(\Sigma,\zeta)$ と書く. (ゲージ変換で割る前の空間の方は $\mathcal{A}(\Sigma,\zeta)$ と書く.) (曲面上の $SU(2)$ 束はすべて自明なのでζ を書かないこともある.) 制限によって写像 $\mathcal{B}(M,\zeta) \to \mathcal{B}(\Sigma,\zeta)$ が定まる.

ここで, 曲面上のコーシー (Cauchy)–リーマン作用素を考える. すなわち曲面に複素構造を決め$\Lambda^{0,0}$ を Σ の複素数値関数全体, $\Lambda^{0,1}$ を $ud\bar{z}$ なる微分形式全体とする. (ここで u は複素数値関数で, $\bar{z} = x - \sqrt{-1}y$ は複素座標 $z = x + \sqrt{-1}y$ の複素共役である.) このときコーシー–リーマン (ドルボー) 作用素は : $\Lambda^{0,0} \to \Lambda^{0,1}$, $u \mapsto \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$ で与えられる. $A \in \mathcal{A}(\Sigma,\zeta)$ が与えられたときこれは ζ 係数のコーシー–リーマン作用素$\overline{\partial}_A : \zeta \otimes \Lambda^{0,0} \to \zeta \otimes \Lambda^{0,1}$ に次のように拡張される : $u \mapsto \frac{1}{2}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} + \sqrt{-1}\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}\right) ud\bar{z}$. 係数がない場合と同様に $\overline{\partial}_A$ は楕円型作用素である. このようにして $\mathcal{A}_*(\Sigma,\zeta)$ の点を媒介変数とする楕円型作用素の族ができる. これからその指数が $\mathcal{A}_*(\Sigma,\zeta)$ の複素 K群の元として定まる. この元はゲージ変換で不変である. しかしこれを $\mathcal{B}_*(\Sigma,\zeta)$ に落とすにはちょっとした問題がある. すなわち既約接続に対する等方部分群 $\{\pm 1\}$ の存在である. 向き付けについて使った複体では, $SU(2)$ は共役表現で現れてい

たので，$\{\pm 1\}$ は複体そのものに自明に作用した．しかしここでは $SU(2)$ の表現はスピン表現すなわち 2×2 行列とみなしたときの普通のかけ算である．したがって $\{\pm 1\}$ の作用は自明ではない．これは指数を $\mathcal{A}(\Sigma,\zeta)$ の複素 K群から $\mathcal{B}(\Sigma,\zeta)$ の複素 K群に落とすときに問題を引き起こす．これは次のように解決される．

一般に E をベクトル束とし g_{ij} をその変換系とする．(g_{ij} は $N\times N$ 行列値写像.）このとき $\det g_{ij}$ を変換系とする 1 次元ベクトル束が存在する．これを $\det E$ とおく．(E が実ベクトル束なら $\det E$ も実ベクトル束，E が複素ベクトル束なら $\det E$ も複素ベクトル束である.）定義から $\det(E\oplus F)=\det E\otimes\det F$ がわかる．したがって $\det([E]-[F])=\det E\otimes\det F^*$ とおくことで K群の元に対しても $\det$ が定義できる．(このとき，K群の元の $\det$ は単に K群の元ではなく本当にベクトル束（直線束）である.）定義から次のことがすぐにわかる．

補題 2.3.8 複素ベクトル束 E に対して $c^1(E)=c^1(\det E)$，実ベクトル束 E に対して $w^1(E)=w^1(\det E)$.

我々が定義したいのは $\mathrm{Index}\overline{\partial}_A\in K(\mathcal{B}_*(\Sigma,\zeta))$ そのものではなく，その第 1 チャーン類である．したがって複素直線束 $\det\mathrm{Index}\overline{\partial}_A$ を定義すれば十分である．

$\det$ Index $\overline{\partial}_A$ が $\mathcal{B}_*(\Sigma,\zeta)$ 上の直線束に落ちるかどうか見るためには，$\det\mathrm{Index}\overline{\partial}_A$ への $\{\pm 1\}$ の作用を見ればよい．直ちにわかるように$-1\in\{\pm 1\}$ は $(-1)^{\mathrm{Index}\overline{\partial}_A}$ 倍として作用する．(ここでべきの肩の $\mathrm{Index}\overline{\partial}_A$ は（K群の元ではなくて）数の方である.）

補題 2.3.9 曲面上の（係数付き）コーシー–リーマン作用素の指数は偶数である．

証明はリーマン–ロッホの定理から得られるが，省略する．これで $\{\pm 1\}$ の $\det\mathrm{Index}\overline{\partial}_A$ 作用が自明であることがわかったからこの直線束はゲージ群で割った商の上にも落ちる．ただし前と同じように可約接続に対しては問題が起こ

る．したがって $\mathcal{B}_*(\Sigma,\zeta)$ を既約接続のゲージ同値類とすると $\det \mathrm{Index}\overline{\partial}_A$ なる $\mathcal{B}_*(\Sigma,\zeta)$ 上の直線束が定まる．この元を $\mathcal{B}_*(M,\zeta)$ に引き戻したいのであるがそのための問題は，$\mathcal{B}_*(M,\zeta)$ の元の制限は $\mathcal{B}_*(\Sigma,\zeta)$ の元とは限らないことである．これについてはこの節の少し後で触れるのでここではとりあえず忘れていて欲しい．

さて以上で $\det \mathrm{Index}\overline{\partial}_A$ が定まった．定理 2.1.3 で述べた元 $\mu([\Sigma])$ は次のように与えることができる．

定義 2.3.10　$\mu([\Sigma]) = c^1(\det \mathrm{Index}\overline{\partial}_A) \in H^2(\mathcal{B}_*(M,\zeta);\mathbf{Z})$

この元が定理 2.1.3 のものと符号を除いて一致する．このことの証明は与えない．(これは楕円型作用素の族に対する指数定理による．) 定義 2.3.10 を最初から定義だと思ってしまっても応用上は一応差し支えないからである．但し $c^1(\det \mathrm{Index}\overline{\partial}_A)$ が曲面 Σ のホモロジー類だけにより，それを表す曲面の取り方やその複素構造の取り方によらないことは証明しなければならない．これは族の指数定理の一部である．(このことの証明は省略する．)

さて §1.2 で述べた第1チャーン類の具体的記述を利用して$\mu([\Sigma])$ をもう少し具体的に述べてみよう．複素直線束 $\det(\mathrm{Index}\overline{\partial}_A)$ が定まっていたのであるが，これを $\mathcal{B}_*(M,\zeta)$ に引き戻す前，すなわち $\mathcal{B}_*(\Sigma,\zeta)$ 上の複素直線束と考えよう．するとこれは $[A]$ でのファイバーが $(\det \mathrm{Ker}\ \overline{\partial}_A) \otimes (\det \mathrm{CoKer}\ \overline{\partial}_A)^*$ であるような直線束と考えることができる．それはさておきこの直線束の切断を一つとり s_Σ とおく．(s_Σ は横断正則性の条件を満たすようにとる．具体的にどういう横断正則性が必要かは後で述べる．) 定理 1.2.17 によればこの元のポアンカレ双対は $s_\Sigma^{-1}(0) = \{[A] \in \mathcal{B}(\Sigma,\eta) \mid s_\Sigma([A]) = 0\}$ の表すホモロジー類である．(この空間は無限次元であるが余次元は有限である．) この $\mathcal{B}_*(M,\zeta)$ への引き戻しは $\mathrm{Res}_{M/\Sigma}^{-1} s_\Sigma^{-1}(0) = \{[A] \in \mathcal{B}(M,\zeta) \mid s_\Sigma([A|_\Sigma]) = 0\}$ の表すホモロジー類である．(これも余次元有限の部分多様体である．) 以下簡単のため $\mathrm{Res}_{M/\Sigma} s_\Sigma$ のことも s_Σ と書こう．さて§2.1 で述べたドナルドソン多項式の「定義」は

$$Q_\ell([\Sigma_1],\cdots,[\Sigma_\ell]) = \int_{\mathcal{M}(M,\zeta_k)} \mu([\Sigma_1]) \wedge \cdots \wedge \mu([\Sigma_\ell]) \tag{2.3.1}$$

であった．この式の右辺を積分の代わりにそれぞれのポアンカレ双対の交点数として書くと

$$Q_\ell([\Sigma_1], \cdots, [\Sigma_\ell]) = \#(\mathcal{M}(M, \zeta_k) \cap \bigcap_{i=1}^{\ell} s_{\Sigma_i}^{-1}(0)) \tag{2.3.2}$$

なる式が得られる．($\#$ は符号付きの位数を表す．) (2.3.1) の右辺の積分は $\mathcal{M}(M, \zeta_k)$ がコンパクトでないために少々曖昧である．そこでむしろ (2.3.2) の方を定義として採用する．そうすると次の主張がドナルドソン多項式の定義についての主要な主張である．(仮定をまだ全部述べていないので括弧がついている．)

「定理 2.3.11」　M を向きの付いた 4 次元多様体とし $b_2^+(M) > 1$ とする．さらに $H^0(M;\mathbf{R}) \oplus H^1(M;\mathbf{R})^* \oplus H^2_+(M;\mathbf{R})$ の向きを与えておく．ℓ を $2\ell = 8k + (1 + b_2^+ - b_1)$ であるようにとる．）すると（適当な横断正則性の仮定の下で）$\mathcal{M}(M, \zeta_k) \cap \bigcap_{i=1}^{\ell} s_{\Sigma_i}^{-1}(0)$ は向きの付いたコンパクト 0 次元多様体になる．

その向きを込めて考えた位数は M の計量，摂動，ホモロジー類の中でのΣの代表元，切断 s_Σ 等によらない．

以上の主張の中でまだ述べていなかったのがコンパクト性と横断正則性である．コンパクト性は次節であらましを述べ，次章でより詳しく述べる．横断正則性は次章で述べる．

ドナルドソン多項式の定義のためのモジュライ空間上のコホモロジー類としては，定理 2.1.3 でいう y も用いることができる．これについては実は扱いはより易しいのであるが省略する．

さてここで前に注意した問題，すなわち M 上の既約な接続の Σ への制限が必ずしも既約でないことを考察しよう．まず直線束（というより K群の元）が $\mathcal{B}_*(M, \zeta)$ まで延びることをいおう．それには枠付きのモジュライ空間 (framed moduli space) なる概念を導入するのが便利である．まず $p_0 \in M$ を選ぶ．そして $\mathcal{G}_{p_0}(M, \zeta)$ を $\mathcal{G}_{p_0}(M, \zeta) = \{g \in \mathcal{G}(M, \zeta) \mid g(p_0) = e\}$ とおく．(つまり p_0 で単位元であるゲージ変換全体．§2.2 の終わりで考えたものと同じである．）すると $\frac{\mathcal{G}(M,\zeta)}{\mathcal{G}_{p_0}(M,\zeta)} \cong SU(2)$ である．$\frac{\mathcal{A}(M,\zeta)}{\mathcal{G}_{p_0}(M,\zeta)} \cong \widetilde{\mathcal{B}}(M, \zeta)$ とおく．$\widetilde{\mathcal{B}}(M, \zeta)$ の上に群

$\frac{\mathcal{G}(M,\zeta)}{\mathcal{G}_{p_0}(M,\zeta)} \cong SU(2)$ が作用し，商空間 $\frac{\widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta)}{SU(2)}$ が $\mathcal{B}(M,\zeta)$ に一致する．さらに大事な注意は $\mathcal{A}(M,\zeta)$ 上の $\mathcal{G}_{p_0}(M,\zeta)$ の作用は不動点を持たないことである．

曲面 Σ 上でも同様な構成を行い $\mathcal{G}_{p_0}(\Sigma,\zeta)$ や $\widetilde{\mathcal{B}}(\Sigma,\zeta)$ を定義しよう．制限写像 $\widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta) \to \widetilde{\mathcal{B}}(\Sigma,\zeta)$ が存在しこれは $SU(2)$ の作用を保つ．$\widetilde{\mathcal{B}}(\Sigma,\zeta)$ 上には直線束 $\widetilde{L} \to \widetilde{\mathcal{B}}(\Sigma)$ が存在し，$SU(2)$ の作用はこの直線束への作用に持ち上がり，この商空間 $L \to \mathcal{B}(\Sigma)$ は既約接続 $L \to \mathcal{B}_*(\Sigma)$ に制限すればベクトル束でこれが前節で定義した L であった．

さて $\mathrm{Res}_\Sigma : \widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta) \to \widetilde{\mathcal{B}}(\Sigma)$ は $SU(2)$ の作用を保つから $\widetilde{\mathcal{B}}(\Sigma)$ 上の $SU(2)$ 不変なベクトル束 $\widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta)$ 上の $SU(2)$ 不変なベクトル束に引き戻される．したがって $\widetilde{L} \to \widetilde{\mathcal{B}}(\Sigma)$ の引き戻しが $\widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta)$ 上の $SU(2)$ 不変な直線束として得られる．これを $SU(2) = \frac{\mathcal{G}(M,\zeta)}{\mathcal{G}_{p_0}(M,\zeta)}$ で割り $\mathcal{B}_*(M,\zeta)$ 上のベクトル束が得られる．ただしこの問題はドナルドソ不変量を定義するときもう一度問題になる（§3.5 参照）．

以上で族の指数の応用についての記述を終わることにする．

§ 2.4 モジュライ空間の大域構造 II

—コンパクト化 とバブル—

さて（反）自己双対方程式のもっとも著しい特徴である孤立波の存在を論じよう．これはその解のモジュライ空間のコンパクト化を論ずる上で重要である．

このためまず線形方程式の解の重ね合わせの原理について思い出そう．微分方程式系

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_j a_{ij}(x_1, \cdots, x_n) u_j \tag{2.4.1}$$

を考える．$u = (u_1, \cdots, u_k)$ と $v = (v_1, \cdots, v_k)$ が (2.4.1) の解であれば，その 1 次結合 $au + bv$　(a, b は定数) もまた (2.4.1) の解である．これは方程式の線形性の著しい帰結である．このことを重ね合わせの原理という．グラフで書いてみるとこれは二つの波 (a),(b) が (2.4.1) を満たせばその合成である波 (c) もそれを満たすことをいう．

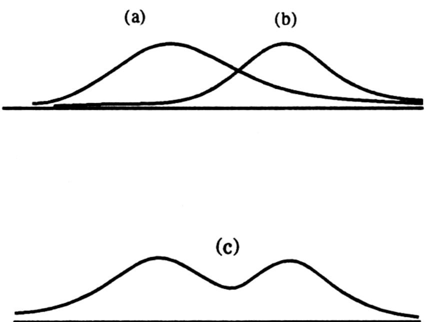


図 2.4.1

むろん非線形方程式，たとえば

$$\frac{du}{dt} = cu + u^m \tag{2.4.2}$$

などではこれは成立しない．図 2.4.2 の (x),(y) のような波が (2.4.2) の解であるとしても，領域 D のあたりで (2.4.2) の右辺の非線形項 u^m のせいでこ

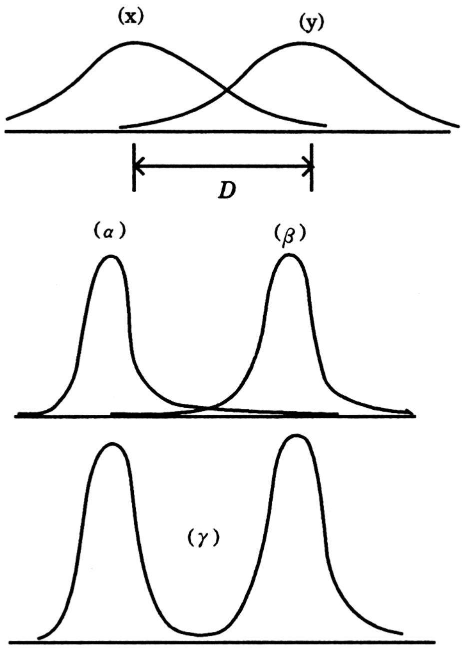


図 2.4.2

の二つの波は相互作用をしてしまい，そのせいで合成 (z) は (2.4.2) の解にはならない．ではたとえば二つの波が (α), (β) のように，ほとんど重ならないときはどうであろうか．(全く重ならないことは方程式の楕円性より解が実解析的であるのであり得ない.) この場合には二つの波を合成して (γ) を作ると $(c(u+v)+(u+v)^m)-(cu+u^m)-(cv+v^m)$ は 0 に近いから方程式 (2.4.2) はほぼ成立する．したがって適当な条件のもとでは，この合成に十分近い解を見つけることができるかもしれない．(これはいつでもできるわけではないし，実行するには関数解析をかなりする必要がある.)

すなわち台 (support) がほぼ交わらない二つの解は重ね合わせることができる．

これは (2.4.2) に限らず 0 が解になっている方程式ならほかの方程式でもいえることである．さて我々が考えていたのは ASD 接続の方程式

$$F_A + *F_A = 0$$

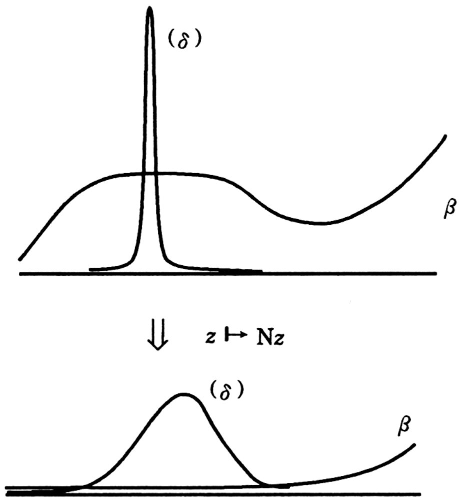


図 2.4.3

であった．前にも述べたようにこの方程式は共形変換不変である．さて，この解の一つが (δ) のように 1 点の近くに集中した解であるとする．するとこの点の近くで共形変換 $z \mapsto Nz$, (N は大きな正の数) をしてみると，(δ) と (β) は図 2.4.3 のようになるであろう．すなわちこの二つの台はほぼ交わらない．したがって二つの解は重ね合わせることができるであろう．

このとき (δ) のような解をインスタントン (instanton) と呼ぶ．

ASD 接続の方程式に対して上に述べたようなことが成立し，また逆にそのモジュライ空間の無限遠点の近くの元はそのようなインスタントンが重ね合わさったような形をしている．これはウーレンベックとタウベス (Taubes) によって発見されたことで，ASD 接続のモジュライ空間のもっとも著しい性質である．本節ではこれについてそのあらましを述べ次章以後でその証明を行う．

さて上に述べたような重ね合わせの原理（あるいはインスタントンの存在）が用いられるのは ASD 接続のモジュライ空間のコンパクト化を調べるためである．そこでまずどうしてこの現象がモジュライ空間のコンパクト化に関わるかを述べよう．

コンパクト向き付け可能な4次元多様体 M とその上の $SU(2)$ 束 ζ を考えよう．$[A_i]$ を $\mathcal{M}(M,\zeta)$ の点列とする．このときウーレンベックが示したのは，以下のような諸定理である．

定理 2.4.1　$[A_i]$ を $\mathcal{M}(M,\zeta)$ の点列とすると，部分列 A_{j_i}，有限個の点 $p_1,\cdots,p_N \in M$, $M-\{p_1,\cdots,p_N\}$ でのゲージ変換の列 $g_i \in \mathcal{G}(M-\{p_1,\cdots,p_N\},\zeta)$ および $M-\{p_1,\cdots,p_N\}$ 上の ASD 接続 A_∞ が存在して，$g_i^*A_{j_i}$ は A_∞ に，$M-\{p_1,\cdots,p_N\}$ の任意のコンパクト集合上で C^∞ 収束する．

この定理で M は閉多様体である必要はない．(完備でなくてもよい．ただし M がコンパクトでないと，$\{p_1,\cdots,p_N\}=\emptyset$ でも $g_i^*A_{j_i}$ は A_∞ に一様収束するとは限らない．定理は広義一様収束だけを保証する.)

定理 2.4.2　A を $D^4-\{0\}=\{x\in\mathbf{R}^4 \mid 1>|x|>0\}$ 上の（自明な）$SU(2)$ 束の ASD 接続とする．A の曲率の L^2 ノルム $\int_{D^2-\{0\}}\|F_A\|^2dx$ は有限であると仮定する．このとき $D^4-\{0\}$ 上のゲージ変換 $g\in\mathcal{G}(D^4-\{0\},(D^4-\{0\})\times su(2))$ が存在して g^*A は D^4 上の ASD 接続に拡張される．(ここでは $D^4-\{0\}$ の計量はユークリッド計量であるとは仮定しない.)

これらの定理の証明については次章で述べる．(これらを §0.2 で述べた調和写像の場合と比較してみよ.)

さてこれらを使って $\mathcal{M}(M,\zeta)$ のコンパクト化を構成しよう．(以下のコンパクト化はドナルドソンがウーレンベックの結果に基づいて [D2] で導入したものでウーレンベックコンパクト化と呼ばれる.)

前に述べたように M 上の $SU(2)$ 束はその第2チャーン類（この場合は $H^4(M;\mathbf{Z})=\mathbf{Z}$ ゆえ整数と思ってよい）で決定される．第2チャーン類が k であるような $SU(2)$ 束を ζ_k と書いた．(ASD 接続を考えるのであるから k は0以上であるとしてよい.) $S^\ell(M)$ で M^ℓ の ℓ 次対称群 $\mathfrak{S}_\ell$ の作用による商空間とする．(すなわち M の点の重複を許し順序を考えない ℓ 個の組の全体とする.)

集合 $\mathcal{CM}(M,\zeta_k)$ を

$$\mathcal{CM}(M,\zeta_k)=\bigcup_{k\geq\ell}\mathcal{M}(M,\zeta_\ell)\times S^{k-\ell}(M)$$

で定義する．以下，上の二つの定理を使ってこの集合上に位相を導入し，その位相について $\mathcal{CM}(M,\zeta_k)$ がコンパクトであることを証明しよう（ここでは M は閉多様体と仮定する）．

まず $[A_i]$ を $\mathcal{M}(M,\zeta_k)$ の点列とする．これが $\mathcal{M}(M,\zeta_\ell)\times S^{k-\ell}(M)$ $(k\geq\ell)$ の元に収束するとはどういうことかを定義しよう．まず定理 2.4.1 によって（必要なら部分列をとりまた A_i をゲージ変換で移すと）A_i が A_∞ に $M-\{p_1,\cdots,p_N\}$ の任意のコンパクト集合上で C^∞ 収束するような，有限集合 $\{p_1,\cdots,p_N\}$ と $M-\{p_1,\cdots,p_N\}$ での ASD 接続 A_∞ をとることができる．

さてここで A_∞ に定理 2.4.2 を適用する．正確には各々の p_i の近傍 U_i で (U_i,p_i) が $(D^4,0)$ と可微分同相なものをとり，A_∞ の U_i-p_i への制限に対して定理 2.4.2 を適用する．すると $\mathcal{G}(M-\{p_1,\cdots,p_N\},\zeta)$ の元 g_∞ が存在して $g_\infty^*A_\infty$ の各々の U_i-p_i への制限は U_i 上の（自明なベクトル束の）C^∞ 級の接続に拡張できる．(定理の仮定は

$$\begin{aligned}\int_{U_i-p_i}\|F_{A_\infty}\|^2*1 &\leq \int_{M-\{p_1,\cdots,p_N\}}\|F_{A_\infty}\|^2*1\\ &\leq \limsup_{i\to\infty}\int_M\|F_{A_i}\|^2*1\\ &\leq 8\pi^2c^2(\zeta_k)\cap[M]\end{aligned}$$

より満たされている.)

そこで $M-\{p_1,\cdots,p_N\}$ 上にζ_k を，U_i 上には自明なベクトル束をとり，これを $M-\{p_1,\cdots,p_N\}\cap U_i$ 上 g_∞（の制限）ではり合わせたベクトル束をζ_ℓ としよう．上で述べたことから A_∞ は ζ_ℓ の（M 上での）接続に拡張される．

これに対して次の補題が示される．証明はここで書くには少しテクニカルであるので§3.3 に回す．

補題 2.4.3　正の整数 n_m $(m=1,\cdots,N)$ が存在して（必要なら再び部分列をとることにより）次のことが成立する．

(1) A_i 曲率のノルムの 2 乗 $\|F_{A_i}\|^2$ は測度として $\|F_{A_\infty}\|^2+\frac{1}{4\pi^2}\sum_{m=1}^N n_m\delta_{p_m}$

に収束する．

(2) $\ell + \sum_{m=1}^{N} n_m = k$.

さてこれで $\mathcal{CM}(M, \zeta_k)$ に位相を定義する準備が整った．

$([A_i]; (p_1(i), \cdots, p_{k-\ell}(i))) \in \mathcal{CM}(M, \zeta_k)$ とする．すなわち A_i は ζ_ℓ 上のASD接続で，$[A_i]$ はそのゲージ同値類，$(p_1(i), \cdots, p_{k-\ell}(i))$ は M の点の（重複を許し順序を考えない）$k - \ell$ 個の組であった．(ℓ は本当は i によってもよいのだが記号の節約のためよらないことにしておこう．)

さてこの列が $([A_\infty]; (p_1, \cdots, p_{k-\ell'})) \in \mathcal{CM}(M, \zeta_k)$ に収束するとは次のことが成立するときをいう．(今度は ℓ' と ℓ が違う場合も考える．)

(2.4.3.1) 有限個の点 $q_1, \cdots, q_m \in M$ と $M - \{q_1, \cdots, q_m\}$ でのゲージ変換 $g_i \in \mathcal{G}(M - \{q_1, \cdots, q_m\}, \xi_\ell)$ が存在して $M - \{q_1, \cdots, q_m\}$ の任意のコンパクト集合上で $g_i^* A_i$ は A_∞ に C^∞ 収束する．

(2.4.3.2) A_iの曲率のノルムの2乗$||F_{A_i}||^2$は測度として$||F_{A_\infty}||^2 + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{s=1}^{m} \delta_{q_s}$ に収束する．($\{q_1, \cdots, q_m\}$ は重複も許す．)

(2.4.3.3) 必要なら順番を入れ換えると $p_j(i)$ は $p_j(\infty)$ に収束し $(p_1(\infty), \cdots, p_\ell(\infty)) + (q_1, \cdots, q_m) = (p_1, \cdots, p_{\ell'})$. $(\ell + m = \ell')$

これが$\mathcal{CM}(M, \zeta_k)$ に位相を定めることは容易にわかる．次の定理は補題2.4.3より直ちに従う．

定理 2.4.4 $\mathcal{CM}(M, \zeta_k)$ に (2.4.3.1),(2.4.3.2),(2.4.3.3) で位相を定めるとコンパクトである．

定理 2.4.4（及びそのパラメータ付き版）を用いると定理 2.3.11 を証明することができる．すなわちドナルドソン不変量を定義することができる．これについてはここまでの内容を数学的に厳密にとり扱ってから次章でもう一度述べることにして，モジュライ空間のコンパクト化の話を続けたい．

まず ASD 接続の発散列が極限にいたる直前の状態についてもう少し論じ

よう．再び A_i を ζ_k 上の ASD 接続の発散列としよう．A_i の曲率のノルム $||F_{A_i}||^2$ が測度として $||F_{A_\infty}||^2 + \frac{1}{8\pi^2}\sum_{s=1}^{m}\delta_{q_s}$ に収束するような部分列がとれる．簡単のため曲率が発散する点の数は 1 個としこの点を q とおく．すなわち $\lim_{i\to\infty}||F_{A_i}||^2 = ||F_{A_\infty}||^2 + \frac{m}{8\pi^2}\delta_q$　(m は自然数) とする．$||F_{A_i}||^2$ が最大になる点を q_i とする ($\lim_{i\to\infty} q_i = q$).

$\psi_i : D(r_i) \to U$ を $x \mapsto q_i + x/||F_{A_i}(q_i)||$ なる写像とする．ここで U は q の近傍で q が原点となるような座標を決めて，$\mathbf{R}^4$ の開集合と同一視する．$D(r_i)$ は $\mathbf{R}^4$ の中の原点を中心とした半径 r_i の球体で，r_i は $||F_{A_i}||$ に比べて十分ゆっくり無限大に発散する正の数の列である．ψ_i で A_i を引き戻そう．ψ_i の取り方より $\psi_i^* A_i$ の曲率のノルム（各点での）は一様に有界である．したがって，その極限にはデルタ関数はでない．よって，$\psi_i^* A_i$ をゲージ変換で動かして，$\mathbf{R}^4$ 上の ASD 接続 B に，任意のコンパクト集合上で C^∞ 収束するようにできる．(本当は部分列をとらなければならない．また補題 2.4.3 がコンパクトでない多様体の場合にどういう形になるのか書かなかったから，上の議論は曖昧であるかもしれない．ただコンパクトでない場合の主張をここで書くと煩雑になるので書かない．§3.3 で定理 2.4.1 の証明をすればすっきりするはずである．この章では解析に深入りしたくないのでこのままにしておく.）不等式

$$\limsup \int_M ||F_{A_i}||^2 * 1 \geq \int_M ||F_{A_i}||^2 * 1 + \int_{\mathbf{R}^4} ||F_B||^2 * 1 \tag{2.4.4}$$

から，B の曲率の L^2 ノルムは有限であることがわかる．ここで $\mathbf{R}^4$ が S^4 から 1 点を除いたものと共形同値であること，ASD 方程式が共形不変であること，そして曲率の L^2 ノルムが共形不変であることを思い出そう．これらの事実と定理 2.4.2 により B は S^4 上のある $SU(2)$ 束上の ASD 接続に拡張される．言い換えると列 A_i からは S^4 上の ASD 接続（これも B と書いてしまおう）が 1 点 q で飛び出していることがわかる（図 2.4.4 参照）．ただし極限 A_∞ と B で A_i の様子が大体見えるわけではない．つまりたとえば (2.4.4) では等号は必ずしも成り立たない．これには二つの理由がある．一つはその頂点が q_i とは離れているがやはり q に近づくもう一つの山がある可能性で（図 2.4.5），もう一つは集中度が一回り少ないもう一つの山が q_i の近くにある可能性である（図 2.4.6）．これらの山をとらえるには別の点または別のスケールで A_i を拡大し

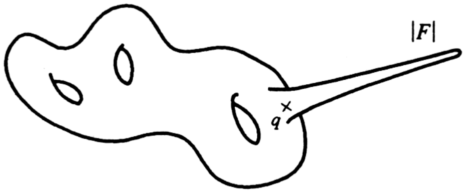


図 2.4.4

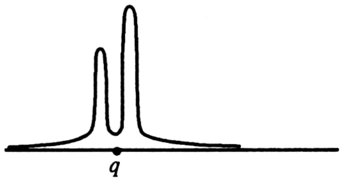


図 2.4.5

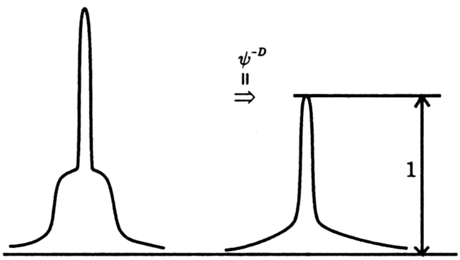


図 2.4.6

てその極限を考える必要がある.

ここで大切な注意として，このような山は有限個（m 個以下）しかないことがわかる．なぜならばそのような山の極限は定理 2.4.2 により S^4 上のある $SU(2)$ 束上の ASD 接続に拡張され，S^4 は閉多様体であるから，この極限の曲率の L^2 ノルム（あるいは第2チャーン形式の積分の $1/8\pi^2$）は $1/8\pi^2$ より大きいから．したがって注意深く以上の議論を遂行することで，すべての山を見いだし A_i の様子を捉えることができる．しかしこの議論を実行するのは煩雑になりまた後で使わないので省略する．

次に以上の構成の逆，すなわち1点に集中する接続を（全体に広がった）ASD 接続と重ね合わせることを調べよう．そのためにはまず4次元球面 S^4 上の ASD

接続について述べなければならない．ここで4次元球面には普通の計量を入れる．

4次元球面 S^4 上のASD接続はアティヤ，ドリンフェルト，ヒッチン，マニンによって完全に決定されている．これを彼らの頭文字をとってADHM構成と呼ぶが，その一番中心的な定理は S^4 上のASD接続を $\mathbf{C}P^3$ 上の代数的ベクトル束と関係させるものである．(これをツイスター (twister) 理論といいペンローズ (Penrose) の創始になるものである．) 本書ではこれらのことについては触れない（これらについてはアティヤの書物 [At2] が優れた教科書である）．本書で必要になるのはチャーン数が1の場合の $SU(2)$ 接続についての以下に述べる結果だけである．そこでここではツイスター理論を避けチャーン数が1の場合にのみ通用する，より初等的な議論をする．これはアティヤ，ヒッチン，シンガー [AHS] に基づく．

まず S^4 の共形変換について述べよう．まず S^4 の（向きを保つ）等長変換全体は群 $SO(5)$ でこれは10次元の群である．共形変換の群

$$\{\gamma : S^4 \to S^4 \mid \gamma^* g_{S^4} = f \cdot g_{S^4}\}$$

はこれより大きく，$SO(5,1)$ という15次元の群である．(上の定義式の $\gamma^* g_{S^4} = f \cdot g_{S^4}$ とは（普通の）計量 g_{S^4} の可微分同相写像 γ による引き戻しが g_{S^4} のスカラー値関数倍であるという意味である．) ここで $SO(5,1)$ は

$$\left\{ g \in GL(6;\mathbf{R}) \;\middle|\; {}^t g \begin{pmatrix} -1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

の単位元を含む連結成分である（連結成分はちょうど二つある）．この作用は次のようにして構成する（以下に述べる構成の具体的な形が後に必要になるわけではない）．

$$N = \{(y, \boldsymbol{x}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^5 \mid |\boldsymbol{x}| = y\}$$

とおき，N への $(y, \boldsymbol{x}) \mapsto (cy, c\boldsymbol{x})$ なる $\mathbf{R}_+$ の作用の商空間を考えるとこれは S^4 である．

一方 $SO(5,1)$ の元を 6×6 行列として $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^5$ に作用させると，これは N

への作用を引き起こす．したがってこれから $SO(5,1)$ の $S^4 = N/\mathbf{R}_+$ への作用が得られる．

この作用が S^4 上の共形構造を保つ作用を引き起こすことの証明は省略する．

S^4 上の第2チャーン数1の $SU(2)$ 束を ζ_1 と書く．

補題 2.4.5　$SO(5,1)$ の S^4 への作用はζ_1 への作用に持ち上げられる．

これは ζ_1 を具体的に書くことで証明できる．S^4 上の反自己双対2型式の作るベクトル束を$\Lambda^2_-(S^4)$ とおこう．

補題 2.4.6　$\Lambda^2_-(S^4)$ にはスピン構造が入り，その第2チャーン数は1である．

証明　$S^4 = \mathbf{H} \cup \mathbf{H}$ とみなしその座標変換を $z \mapsto \frac{z}{|z|^2}$ で与える．これから定まる接束 TS^4 の変換系は S^3 （大きさ1の4元数全体）上 $g(z)(v) = -zvz$ で与えられる．ここで $z \in S^3, v \in \mathbf{H}$ である．この式を確かめよう．$\bar{v}$ が z と平行であるときは，$\bar{v} = cz, c \in \mathbf{R}$ ゆえ，$-zvz = -zc\bar{z}z = -\bar{v}$．$\bar{v}$ と z が垂直であるときは $\bar{v} = \alpha z, \bar{\alpha} = -\alpha$ ゆえ，$-zvz = -z\bar{z}\alpha z = \bar{v}$．これが S^3 上の $z \mapsto \frac{z}{|z|^2}$ の微分と一致することは容易にわかる．

$g(z)(v) = -zvz$ を用いると S^4 のスピン構造がわかる．すなわち $\pi : Spin(4) \to SO(4)$ は，$(g_1, g_2) \in Sp(1) \times Sp(1) = Spin(4), v \in \mathbf{H}$ に対して$\pi(g_1, g_2)(v) = g_1 v g_2^{-1}$ で与えられたから，$\widetilde{g} : S^4 \to Sp(1) \times Sp(1), \widetilde{g}(z) = (-z, z^{-1})$ は S^4 のスピン構造の変換系を与える．

ところで§1.3で述べたように，4次元スピン多様体 M に対してその上のベクトル束 $\Lambda^2_-(S^4)$ は，$Sp(1) \times Sp(1) = Spin(4)$ の $\mathrm{Im}\,\mathbf{H}$ 上の表現 $(g_1, g_2)(v) = g_2 v g_2^{-1}$ の双対によって与えられる．

したがって3次元実ベクトル束 $\Lambda^2_-(S^4)$ はスピン構造を持ち，そのスピン構造の変換系は4次元スピン多様体 M のスピン構造の変換系 g_{ij} と第2成分への射影 $Sp(1) \times Sp(1) = Spin(4) \to Sp(1) = Spin(3) = SU(2)$ の合成で得られる．

よって $\Lambda^2_-(S^4)$ はスピン構造を持ちその変換系は $S^3 \to Sp(1) = Spin(3) = SU(2), z \mapsto z$ である．したがって第 2 チャーン数は 1 である．　証明終わり

補題 2.4.6 により $\Lambda^2_-(S^4)$ はζ_1 に同型である．反自己双対 2 型式は共形変換によって再び反自己双対 2 型式に移る．したがって補題 2.4.5 は補題 2.4.6 から直ちに得られる．

さて補題 2.4.5 と ASD 方程式の共形不変性より $SO(5,1)$ は反自己双対接続の空間 $\mathcal{M}(S^4, \zeta_1)$ に作用する．

補題 2.4.7　$SO(5,1)$ の $\mathcal{M}(S^4, \zeta_1)$ への作用は推移的である．

補題 2.4.7 の証明はこの節の最後で行う．さて $\mathcal{M}(S^4, \zeta_1)$ の元を一つ与え，それと補題 2.4.7 を用いて $\mathcal{M}(S^4, \zeta_1)$ を決定しよう．

$\mathcal{M}(S^4, \zeta_1)$ の元を作るには補題 2.4.6 により $\Lambda^2_-(S^4)$ の反自己双対接続を作ればよい．これは実は一番普通に考えられるもの，つまり S^4 の標準的な計量から決まる接続（レヴィ(Levi)–チヴィタ (Civita) 接続）でよい．これを証明するにはもちろん曲率を計算してもよい（標準計量の曲率だからそんなに難しくない）．計算を徹底的にサボルには次のようにする．

ベクトル束 $\Lambda^2_-(S^4)$ の構造群は $SO(4)$ でこれはファイバーに共役表現の双対の半分として作用していた．つまり $so(4) = su(2) \oplus su(2)$ なる $SO(4)$ 不変な分解の第 2 成分の双対である（$so(4)$ が $\Lambda^2(M)$ の 1 点のファイバーとみなせた）．紛らわしいのでこの分解 $so(4) = su(2) \oplus su(2)$ は $so(4) = so^+ \oplus so^-$ と書こう．したがってレヴィ–チヴィタ接続の自己双対部分は $so^{+^*} \otimes \Lambda^2_-(S^4) = Hom(so^+, \Lambda^2_-(S^4))$ の元を与える．これは S^4 の等長変換群 $SO(5)$ で不変である．したがって 1 点 p の等方部分群 $SO(4)$ で p での曲率の自己双対部分は不変である．ところが $so(4) = su(2) \times su(2)$ なる $SO(4)$ 不変な分解で so^+ は第 1 成分に対応する．したがって $so^{+^*} \otimes \Lambda^2_-(S^4) = Hom(so^+, \Lambda^2_-(S^4))$ の $SO(4)$ 不変な元は 0 しかない．(具体的に考えてもわかるし，お互いに同型でない二つの既約表現の間の群の作用を保つ写像が 0 しかないという定理を用いてもよい.) つまりこのレヴィ–チヴィタ接続は $\Lambda^2_-(S^4)$ 上反自己双対である．

さてとにかく一つ自明でない反自己双対接続 A_0 ができた．A_0 は明らかに等長変換 $SO(5)$ で不変である．一方 A_0 のノルムは定数である．したがって等長的でない共形変換は A_0 を A_0 とゲージ同値でない元に移す．このことと補題 2.4.7 により：

定理 2.4.8　$\mathcal{M}(S^4, \zeta_1) \cong SO(5,1)/SO(5)$

この商空間 $SO(5,1)/SO(5)$ は 4 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^4$ に一致する．これで $\mathcal{M}(S^4, \zeta_1)$ がもとまった．

さてこれを使ってはり合わせを行おう．まず次の補題が必要である．

補題 2.4.9　S^4 （標準計量）の上の任意の反自己双対接続に対してその AHS 複体の第 2 コホモロジーは消える．

この補題を我々は補題 2.4.7 の証明にも使うのだが，本書ではこれは証明しない．この補題の証明は generic な場合にアティヤ–ヒッチン–シンガー複体の第 2 コホモロジーが消えることを示す横断正則性の議論 (§3.4) とは異なっている．すなわち特定の計量に対して摂動をしないで議論しなければならない (共形変換の大きな対称性を崩してはならない)．証明には作用素 $(d_A^+)(d_A^+)^* : \Gamma(S^4; Ad\ \zeta \otimes \Lambda_+^2) \to \Gamma(S^4; Ad\ \zeta \otimes \Lambda_+^2)$ を具体的に書き下す．そのたぐいの式をワイツェンベック (Weitzenböck) 公式という．一応今の場合書いておくと

$$(d_A^+)(d_A^+)^* = \nabla^*\nabla + \frac{S}{3}$$

である（たとえば [FU] 付録 3 参照）．ここで S はスカラー曲率で今の場合正である．(この公式が成立するのは多様体のワイルテンソル (Weyl tensor) の自己双対部分が 0 の場合である.）すると $(d_A^+)^*(u) = 0$ ならば

$$0 = \langle (d_A^+)(d_A^+)^*(u), u \rangle = \langle \nabla(u), \nabla(u) \rangle + \frac{1}{3}\langle Su, u \rangle.$$

よってスカラー曲率が正であるから，$u = 0$．すなわち $(d_A^+)^*$ の核は 0，よって d_A^+ は全射である．この議論をボホナー (Bochner) トリックという．(説明しな

い言葉をいろいろ使ってしまった．知らなかったらこの証明のことは忘れて欲しい.)

さて定理 2.4.8 を使って 4 次元多様体 M の上に反自己双対接続を作ろう．M 上の ASD 方程式の解と S^4 上の ASD 方程式の解をはり合わせて，M 上の別の ASD 方程式の解を作るというのがアイディアなのだが，ここでは M 上の自明な接続と S^4 上の ASD 方程式の解をはり合わせて，M 上の自明ではない ASD 接続を作ろう．

その原理はまず単純な 1 の分解のはり合わせで近似解を作り，線形化方程式 (今の場合はアティヤ–ヒッチン–シンガー複体) の全射性から，近似解の近くに真の解を探すというものである．この議論の詳細は第 4 章に述べる．ここではアイディアだけ説明する．一言でいって次の原理を用いる．

「与えられた非線形方程式に対してその線形化方程式が全射であれば，ほとんど解になっている関数の近くには真の解がある.」

これは次の有限次元の命題の無限次元版と思えばよい．

命題 2.4.10　$F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ とする．$|F(0)|<\varepsilon$, $|JF_0(u)|>\delta|u|$, $|F|_{C^2}<B$, JF_0 は全射とする．$\varepsilon\le\varepsilon(\delta,B)$ ならば $x\in\mathbf{R}^n$ で，$F(x)=0$, $|x|\le C(\delta,B)\varepsilon$ なるものが存在する．

主張の証明のアイディアをちょっとだけ書こう．2 通り考える (本質的には同じだが)．一つはニュートン (Newton) 法，もう一つは連続法 (continuity method) である．

ニュートン法では次のように逐次近似をする．$x_1=-(JF_0)^{-1}(F(0))$, $x_2=x_1-(JF_{x_1})^{-1}(F(x_1)),\cdots, x_{k+1}=x_k-(JF_{x_k})^{-1}(F(x_k))$．すると

$$
\begin{aligned}
F(x_{k+1}) &= F(x_k-(JF_{x_k})^{-1}(F(x_k)))\\
&= F(x_k)-(JF_{x_k})(JF_{x_k})^{-1}(F(x_k))+higher\\
&= higher
\end{aligned}
$$

であるから，物事が思いどおりいっていれば，$|F(x_{k+1})| \le C|F(x_k)|^2$．したがって $\lim_{k\to\infty} x_k$ が求めるものになる．無論これをきちんとするには面倒な評価が必要である．

連続法の方は次のように要約できる．$y_t = tF(0)$ とする．$F(x_t) = y_t$ なる x_t が存在する t の範囲が閉かつ開集合であることを示せばよい．(1 が入っているから空ではない．0 が入っていることが示すべきことである．) F の微分が全射ならば，開集合であることは陰関数の定理からでる．閉であることの証明はアプリオリ評価すなわち $|x_t| \le A|y_t|$ といった評価である．

命題 2.4.10 の（有限次元の）場合はどっちもうまくいく．練習問題にしたい．

この議論を我々の（微分方程式の）場合に当てはめると次のようになる．

$\mathcal{M}(S^4, \zeta_1)$ の元は $S^4 - \{$ 一点 $\}$ が $\mathbf{R}^4$ と共形変換で可微分同相であるから $\mathbf{R}^4$ 上の接続とみなせる．以下そうみなしておく．まず単純なはり合わせをしよう．$p \in M$ をとりこの点の近くで座標関数 $\varphi : D^4 \to M$ をとる．十分大きい T をとり $\varphi_T(x) = \varphi(x/T)$ とする．これは半径 T の球体と $p \in M$ の近傍の間の可微分同相写像である．半径 T の球体上に $\mathcal{M}(S^4, \zeta_1)$ の元 $[A_0]$ をとり，これを φ_T で p の近傍に移す．T が十分に大きければ半径 T の球体の境界の近くで $[A_0]$ は自明な接続に近い．したがってここで 1 の分解で自明接続とはり合わせることで M 上の接続ができる．これを $Pat^0_{p,T}(0, [A_0])$ と書こう．

式で書くと次のとおり，$\chi : [0, \infty) \to [0, 1]$ を

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, 1/2] \\ 1 & t \ge 1 \end{cases}$$

なる C^∞ 級関数とし，

$$Pat^0_{p,T}(0, [A_0])(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathrm{Im}\, \varphi_T \\ (1 - \chi(|y|)\varphi_T^* A_0(x) & x = \varphi_T(y) \end{cases}$$

この接続の曲率ははり合わせているところ以外では反自己双対である．さらにはり合わせるところでの曲率（の自己双対成分）もいくらでも小さくできる．結局 $Pat_{0,p}(0, [A_0])$ は接続でその自己双対成分はほとんど 0 であることがわかった．これのチャーン数が 1 であることもほぼ明らか．(ほとんど 0 の意味を

きちんと与えることはしない.)

さてこれが近似解であったが，この近くに真の解を探さなければならない．それには線形化方程式が全射でつまり AHS 複体の第 2 コホモロジーが消えていなければならない．後に (§4.8) 示すように，これにははる前の二つの接続に対する AHS 複体の第 2 コホモロジーが消えていればよい．S^4 上の ASD 接続については AHS 複体の第 2 コホモロジーが消えていることが補題 2.4.9 の主張である．M 上の自明接続についてはどうだろうか．この場合については AHS 複体の第 2 コホモロジーは直接わかり $H^2_+(M;\mathbf{R})\otimes su(2)$ である．これが消えている場合，すなわち $b^2_+=0$ の場合を考えよう．このときには，$Pat^0_{p,T}(0,[A_0])$ の AHS 複体の第 2 コホモロジーは消える．したがってこの近くに真の解を見つけることができる．これを $Pat^1_{p,T}(0,[A_0])$ と書く．以上で写像 $Pat^1 : M\times[T_0,\infty)\to\mathcal{M}(M,\zeta_1)$, $(p,R)\mapsto Pat^1_{p,T}(0,[A_0])$ が定まったことになる．定義域と値域の次元を勘定するとともに 5 で合っている．

定理 2.4.11　$b^2_+=0$ かつ M は単連結とすると，写像 $Pat^1 : M\times[T_0,\infty)\to\mathcal{M}(M,\zeta_1)$ は $\mathcal{M}(M,\zeta_1)$ の，あるコンパクト部分集合の補集合への可微分同相を与える．

定理の証明はしない．第 4 章で少しだけ違う状況で同様な結果を示す (§4.6). $b^2_+=0$ でない場合にはよりデリケートな議論が必要である．

以上でウーレンベックの定理の逆，すなわちバブルする点を指定してバブルしかかっている ASD 接続を構成することの解説は終わる．これらはタウベスとドナルドソンによるものである．

定理 2.4.11 は 4 次元多様体の交叉形式を調べるドナルドソンの仕事で基本的である．これについて述べよう．

定理 2.4.12　$b^2_+=0$ かつ M は単連結とすると $H^2(M;\mathbf{Z})$ 上の交叉形式は b^2_- 個の I_- の直和に同型である．

この定理はドナルドソン [D4] および古田 [古田 1] によって一般化されており，

M が単連結という仮定は必要ない．

またはた $b_2^+(M)=1,2$ の場合は次のことが証明されている（[D3]）．

定理 2.4.13　M を4次元のスピン多様体とし $H_1(X;\mathbf{Z})$ が 2-torsion を持たないとする．このとき

$$b_2^+(M)=1 \text{ ならば } H^2(M)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$b_2^+(M)=2 \text{ ならば } H^2(M)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

本書では定理 2.4.13 の証明には触れない．定理 2.4.11 から定理 2.4.12 を導く議論だけ解説しよう．

まずモジュライ空間 $\mathcal{M}(M,\zeta_1)$ を考えよう．この空間の次元は $8-3(1+b_2^+(M))=5$ である．§2.2 で述べたが，$b_2^+(M)=0$ の場合には $\mathcal{M}(M,\zeta_1)$ には可約接続が含まれる．このような可約接続は $u^2=-[M]$ なるコホモロジー類に対応していた．より正確にいうと $\zeta_1=L\oplus L^*$ なる分解と可約接続が1対1対応する．$c^1(L^*)=-c^1(L)$ であるから u と $-u$ は同じ可約接続を与える（定理 2.2.10）．

$$2k=\#\{u\in H^2(M;\mathbf{Z})\mid u^2=-[M]\}$$

とおくと ζ_1 には k 個の可約接続が存在する．$\mathcal{M}(M,\zeta_1)$ の特異点に対応し，特異点の近傍で $\mathcal{M}(M,\zeta_1)$ は複素射影空間の錘であった．$\mathcal{M}(M,\zeta_1)$ から特異点を除いて多様体は X を作る．すると定理 2.4.11 からコンパクト集合 K があって，$X-K$ は $k(\mathbf{C}P^2\times(-\infty,0))\cup M\times(0,\infty)$ に可微分同相である．さらに $\mathcal{M}(M,\zeta_1)$ は向きを持つ．ここで次の定理を使う．

定理 2.4.14　X を向きの付いたコンパクト境界付き $4n+1$ 次元多様体とし $\partial X=N$ とする．このとき N の交叉形式 $H^{2n}(N;\mathbf{R})\otimes H^{2n}(N;\mathbf{R})\to\mathbf{R}$ の正の固有値の数と負の固有値の数は等しい．

この証明は省略する．たとえば [Hi] §2 を見よ．我々の場合に当てはめると $k = b_2^-(M)$ がわかる．すなわち整係数ユニモジュラー 2 次形式 Q（交叉形式）に対して $Q(u,u) = -1$ なる u が階数の 2 倍存在する．これから簡単な代数により $H^2(M;\mathbf{Z}) \cong b_-^2 I_-$ となり求める結果が得られる．証明はかなりサボってしまったが，詳しくは [D1],[DK],[FU] を見ていただきたい．

さて本節の最後に補題 2.4.7 を証明しよう．$\mathcal{M}(S^4,\zeta_1)$ の任意の元 $[A_1]$ をとる．これが $[A_0]$ に $SO(5,1)$ の作用で移ることを示せばよい．まず補題 2.4.9 を使うと $\mathcal{M}(S^4,\zeta_1)$ は可微分多様体で次元は 5 であることが分かる．($H^2(S^4;\mathbf{Z}) = 0$ だから可約接続は存在しない.）この上に 15 次元の群 $SO(5,1)$ が作用していた．したがって，$[A_1]$ での $SO(5,1)$ の作用に対する等方部分群 $I_{[A_1]}$ は 10 次元以上である．一方等方部分群はコンパクトである．したがって簡単な群論より $I_{[A_1]}$ は $SO(5,1)$ の極大コンパクト部分群 $SO(5)$ と共役である．必要なら $[A_1]$ を $SO(5,1)$ の作用で変えて $I_{[A_1]}$ を等長変換全体 $SO(5)$ にできる．

さて $SO(5)$ で A_1 のゲージ同値類は不変だが A_1 そのものが不変かどうかはわからない．証明の主要部分は A_1 を $SO(5)$ 不変な接続にとれることを示す部分である．

まず ζ_1 への $SO(5)$ の作用の持ち上げを変えれば A_1 そのものが不変であることを示そう．

$\gamma \in SO(5)$ とすると，ゲージ変換 $g(\gamma) : \zeta_1 \to \zeta_1$ が $g(\gamma)^*\gamma^*(A_1) = A_1$ となるようにとれる．A_1 は既約であるからこのような $g(\gamma)$ は± 1 を除いて一意である．そこで $g(\gamma)^*\gamma^*(A_1) = A_1$ を満たす組 $(\gamma, g(\gamma))$ 全体を G とおくと，G は $SO(5)$ の 2 重被覆すなわち $Spin(5)$ かまたは $SO(5)\times\pm 1$ である．$SO(5)\times\pm 1$ の場合には連結成分の作用に制限してから $Spin(5)$ の作用に持ちあげると，どちらの場合でも $G = Spin(5)$ としてよい．G の束 ζ_1 への作用を $SO(5)$ の作用から導かれる作用と，$g(\gamma) : \zeta_1 \to \zeta_1$ の合成で定義する．(これが $Spin(5)$ の作用を与えることは容易にチェックできる.）するとこの作用に対して A_1 は不変である．

さて $Spin(5)$ の作用が変わったかもしれないので，今のところ ζ_1 と $\Lambda_-^2(S^4)$ を区別して考える必要がある．しかし実はこの二つは $Spin(5)$ の作用も込めて同

型である．これは以下のようにしてわかる．ζ_1 の構造群は $SO(4)$ であった．これから共役表現により $Ad\,\zeta_1$ ができる．これは $so(4) = so^+ \oplus so^-$ なる分解に伴い $Ad\,\zeta_1 = Ad\,{\zeta_1}^+ \oplus Ad\,{\zeta_1}^-$ と分解する．1点 p の等方部分群 $SO(4) \subseteq SO(4,1)$ を考える．(紛らわしいがこれはとりあえず構造群の $SO(4)$ とは別物である.) これの元々の $\Lambda^2_-(S^4)$ への作用は共役表現を $so(4) = so^+ \oplus so^-$ と分解した第2成分であった．等方部分群の $Ad\,\zeta_1$ への作用はこれと共役である（ゲージ変換を合成したものだから）．すなわち同型を除いてやはり $so(4) = so^+ \oplus so^-$ と分解した第2成分である．

さて曲率 $F_A \in \Lambda^2 \otimes Ad\,\zeta_1 \subseteq Hom(so^+ \oplus so^-, \Lambda^2_-(S^4))$ を考えよう．これは等方部分群 $SO(4) \subseteq SO(5,1)$ あるいはその2重被覆 $Spin(4)$ で不変である．したがって，F_A は $Hom(so^-, \Lambda^2_-(S^4))$ 成分だけが残り，しかもこの成分は0か同型写像かのどちらかである（これは $Spin(4)$ の Δ^- への表現が既約であることからわかる（シューア (Schur) の補題）表現論の本を見よ）．

しかも $Spin(5)$ は S^4 上推移的だから，曲率は1点で0なら至るところ0である．チャーン数が生き残っているから，曲率は至るところ0ではありえない．したがって，曲率そのものが $Spin(5)$ 同型$\zeta_1 \cong \Lambda^2_-$ を与える．(特に ζ_1 への $Spin(5)$ の作用が $SO(5)$ の作用に落ちることもわかる.)

以上で我々は接続 A は同型で移してΛ^2_- 上の $SO(5)$ の作用で不変な接続とみなせることがわかった．そこで Λ^2_- 上のレヴィ–チヴィタ接続 ∇ をとり $A - \nabla \in \Gamma(S^4; Ad\,\zeta_1 \otimes \Lambda^1)$ を考えよう．これは $SO(5)$ の作用で不変である．したがってその各点での値は $so(4) \otimes \Lambda^1$ の $SO(4)$ 不変な元で，これは0しかない．よって $A = \nabla$．すなわち，接続 A はレヴィ–チヴィタ接続とゲージ同値である．これで補題 2.4.7 は証明された．

第3章　モジュライ空間の解析学

§3.1　ソボレフ空間

第3章では第2章で述べた幾何学的アイディアを実現するための ASD 方程式の解析学についての諸結果を述べる．これには関数空間を設定し，その上で偏微分方程式の解の滑らかさなどについて考察することが必要である．この節ではまずソボレフ (Sobolev) 空間を定義しその基本的な性質について述べる．

まずユークリッド空間の開集合上のスカラー値関数の場合を述べよう．U を $\mathbf{R}^n$ の開集合とする．$f \in C_0^\infty(U)$（コンパクト集合の外で0であるような U 上の C^∞ 級関数）と1以上の実数 p と0以上の整数 k に対して f の L_k^p ノルム $||f||_{L_k^p}$ を

$$||f||_{L_k^p} = \left(\sum_{\substack{(i_1,\cdots,i_n) \\ 0 \le i_1+\cdots+i_n \le k}} \int_U \left| \frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}} f \right|^p dx_1 \cdots dx_n \right)^{1/p}$$

で定義する．これは $C_0^\infty(U)$ 上のノルムを定める．このノルムに関する $C_0^\infty(U)$ の完備化を $L_k^p(U)$ と書く．これはバナッハ (Banach) 空間（完備なノルム線形空間）である．$p=2$ の場合は $L_k^2(U)$ 上の内積を

$$(f,g)_{L_k^2} = \sum_{\substack{(i_1,\cdots,i_n) \\ 0 \le i_1+\cdots+i_n \le k}} \int_U \left(\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}} f \right) \cdot \left(\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}} g \right) dx_1 \cdots dx_n$$

で定義できる.(この右辺が有限であることはヘルダー(Hölder)の不等式 $(f,g)_{L^2_k} \le \|f\|_{L^2_k}\|g\|_{L^2_k}$ が $C^\infty_0(U)$ の元に対して成立することから極限に移るとわかる.) この内積に関して $L^2_k(U)$ はヒルベルト(Hilbert)空間になりそのノルムは $\|\cdot\|_{L^2_k}$ になる.

U 上にベクトル束 E とその上の内積 h が定まっているとしよう. ここでは局所的な話をしているので E は自明であるとしてよいであろう. つまり切断 $\Gamma(U;E)$ の元は U 上の C^∞ 級関数の E の階数個 (m としよう) の組である. また h は $m\times m$ 正値対称行列の集合 (E が複素ベクトル束のときは $m\times m$ 正値エルミート(Hermite)行列の集合) に値をもつ C^∞ 級写像である. この場合 $\Gamma_0(U;E)$ (コンパクト集合の外で0になる $\Gamma(U;E)$ の元の全体) 上のノルムを

$$\begin{aligned}
&\|(u_1,\cdots,u_m)\|_{L^p_k} \\
&= \left(\sum_{\substack{(i_1,\cdots,i_n)\\ 0\le i_1+\cdots+i_n\le k}} \int_U \left(\sum_{\ell,\ell'=1}^m h_{\ell\ell'}(x)\cdot\left(\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}u_\ell\right)\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left.\cdot\left(\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}u_{\ell'}\right)\right)^{p/2} dx_1\cdots dx_n \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

で定め, $L^p_k(U;E)$ をその完備化とする. $L^2_k(U;E)$ には内積

$$\begin{aligned}
&((u_1,\cdots,u_m),(v_1,\cdots,v_m))_{L^2_k} \\
&= \sum_{\substack{(i_1,\cdots,i_n)\\ 0\le i_1+\cdots+i_n\le k}} \int_U \sum_{\ell,\ell'=1}^m h_{\ell\ell'}(x)\cdot\left(\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}u_\ell\right) \\
&\qquad\qquad \cdot\left(\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}u_{\ell'}\right) dx_1\cdots dx_n
\end{aligned}$$

が入りヒルベルト空間になる.

以上の定義を多様体の上のベクトル束の切断の場合に拡張するには, 1の分解を使って座標系ごとに考え, ユークリッド空間の場合を当てはめてもよいが, 接続を使うこともできる. (1の分解を使った場合にはその取り方によらない

ことをチェックしなければならない.）すなわち E を多様体 M 上のベクトル束とし，その上に接続 ∇ を一つ決める．∇ は写像$\Gamma(M; Hom(\otimes^k TM, E)) \to \Gamma(M; Hom(\otimes^{k+1} TM, E))$ を与える．　$((\nabla u)(X_0, \cdots, X_k) \mapsto \nabla_{X_0}(u(X_1, \cdots, X_k))$ とおけばよい．ここで $\otimes^k TM = TM \otimes \cdots \otimes TM$（$k$個）.）これを ℓ 回繰り返すと，$\nabla^\ell = \nabla \circ \cdots \circ \nabla : \Gamma(M; E) \to \Gamma(M; Hom(\otimes^\ell TM, E))$ が定まる．

一方 M にリーマン計量を与えるとベクトル束 $Hom(\otimes^k TM, E)$ に内積が定まる．これらを用いて $\Gamma_0(M; E)$ 上にノルムを

$$||u||_{L^p_k} = \left(\sum_{\ell=0}^{k} \int_M ||\nabla^\ell u||^p * 1 \right)^{1/p}$$

で定め，その完備化を $L^p_k(M; E)$ とする．また $L^2_k(M; E)$ 上に内積を

$$(u, v)_{L^2_k} = \sum_{\ell=0}^{k} \int_M (\nabla^\ell u, \nabla^\ell v) * 1$$

で定める．これで $L^2_k(M; E)$ はヒルベルト空間になる．M がコンパクトの場合，これらのノルムは同値の意味で接続や計量の取り方によらない．すなわち別の接続や計量を取って定義したものを $||\ ||'_{L^p_k}$ とおくと，$L^2_k(M; E)$ の元によらない正の定数 C, C' が存在して $C||u||_{L^p_k} \le ||u||'_{L^p_k} \le C'||u||_{L^p_k}$ が成り立つ．(M がコンパクトでない場合も計量や接続の無限遠方での振舞いが定数倍を除いて定まっていれば同じことが成立する．§4.4 参照.）それで以後接続などの取り方を意識せずにこれらの関数空間を用いる．(以上のことについてより詳しくはたとえば [藤原][熊之郷][Wa][Ro] など参照.）

以下の議論でほんの少しだけ（補題 3.1.7 の証明中だけ）負の k に対する L^2_k が必要になる．本来はこれらは超関数を利用して導入すべきであるが，ここでは簡単のため L^2_k は L^2_{-k} の双対空間であるというのを定義として採用する．

さて E, F をコンパクト多様体 M 上のベクトル束とし，$P : \Gamma(M; E) \to \Gamma(M; F)$ を ℓ 階の微分作用素とする．このとき

$$||Pu||_{L^p_k} \le C||u||_{L^p_{k+\ell}} \tag{3.1.1}$$

が成立することが容易にわかる．(ユークリッド空間上では始めに述べた定義から明らか．一般の場合には 1 の分解を取り，座標ごとに考えればよい.）(3.1.1)

より P は有界な写像：$L^p_{k+\ell}(M;E) \to L^p_k(M;F)$ に（一意に）拡張される．これも同じ記号で表す．さて次に述べる三つの結果はソボレフ空間および線形楕円型方程式論の基礎を成すものである．

定理 3.1.1（ゴルディング (Gårding) の不等式）　$P:\Gamma(M;E)\to\Gamma(M;F)$ を ℓ 階の楕円型微分作用素とすると

$$||u||_{L^p_{k+\ell}} \le C_{k,\ell,p}\left(||Pu||_{L^p_k} + ||u||_{L^p_k}\right)$$

が任意の $u \in L^p_k(M;E)$ に対して成立する．(より正確にいうと $u \in L^p_k(M;E)$, $Pu \in L^p_k(M;E)$ ならば $u \in L^p_{k+\ell}(M;E)$ で，上の不等式が成立する．)

定理 3.1.2（レリッヒ (Rellich) の定理）　$k > k'$ なら $L^p_k(M;E) \subseteq L^p_{k'}(M;E)$ でしかも自然な埋め込みはコンパクト作用素 (compact operator) である．(コンパクト作用素とは有界集合の像がコンパクトであることをいう．)

定理 3.1.3（ソボレフの埋め込み定理（弱形））　$\bigcap_k L^p_k(M;E) = \Gamma(M;E)$. ($\Gamma(M;E)$ は C^∞ 級の切断全体を指した．)

これらの定理の証明は省略する．(関数解析的偏微分方程式論の教科書，たとえば [藤原] §3, §4，[溝畑] p.70, 143，[島倉] 4 章，[Wa] 6 章，[Ro] 3 章などを見ていただきたい．)

本書ではこれらの結果を非線形偏微分方程式である ASD 方程式を調べるために用いるわけであるが，その前に雛型として線形偏微分方程式の場合にこれらがどのように用いられたかを復習しよう．そのため次の定理を証明する（定理自身については§0.3 で説明した）．

定理 3.1.4　M をコンパクトと仮定する．$P:\Gamma(M;E)\to\Gamma(M;F)$ を ℓ 階の楕円型微分作用素とすると，その拡張 $P: L^p_{k+\ell}(M;E)\to L^p_k(M;F)$ はフレドホルム (Fredholm) 作用素である．

また，$u \in L^p_{k+\ell}(M;E)$, $Pu=0$ とすると $u \in \Gamma(M;E)$ である．(すなわち u

は C^∞ 級である.)

証明　簡単のため $p=2$ の場合だけ証明する.

まず Ker P が有限次元であることを示そう．これには背理法を用いる．もしこれが無限次元としよう．すると Ker P の有界列 u_i で $L^2_{k+\ell}(M;E)$ の位相で収束部分列を持たないものが存在する.

一方ゴルディングの不等式（定理 3.1.1）より

$$\|u_i\|_{L^2_{k+2\ell}} \le C\left(\|u_i\|_{L^2_{k+\ell}} + \|Pu_i\|_{L^2_{k+\ell}}\right) = C\|u_i\|_{L^2_{k+\ell}}$$

であるから左辺は有界である．したがってレリッヒの定理（定理 3.1.2）よりこれは収束部分列を持つ．これは矛盾である.

CoKer P が有限次元であることを証明する前に，定理の主張の後半つまり Ker P の元が C^∞ 級であることを示そう．$u \in$ Ker P とする．$Pu = 0 \in L^2_{k+\ell}(F)$．定理 3.1.1 より $u \in L^2_{k+\ell}(E) \Rightarrow u \in L^2_{k+2\ell}(E)$．したがって $Pu = 0 \in L^2_{k+2\ell}(F)$ より再び定理 3.1.1 より $u \in L^2_{k+2\ell}(E) \Rightarrow u \in L^2_{k+3\ell}(E)$．これを繰り返すと Ker $P \subseteq \bigcap_k L^2_k(E)$ がわかる．したがって定理 3.1.3 により Ker P の元が C^∞ 級であることがわかる.

最後に CoKer P が有限次元であることを示そう.

P の（普通の L^2 ノルムについての）共役作用素を P^* とおく．P^* はやはり ℓ 階の楕円型微分作用素である．したがって合成 P^*P は 2ℓ 階の楕円型微分作用素である.

補題 0.3.3 の証明と同様にして Ker (P^*P) = Ker (P) が示せる.（ここではとりあえずこれらの作用素の定義域は $L^2_{k+\ell}(M;E)$ としておく．$k \ge \ell$ だから P^*P は $L^2_{k+\ell}(M;E)$ 上定義されている.）

さて CoKer P が有限次元であることを示すにはそれが Ker P^* と一致することを示せばよい．§0.3 で定理 0.3.4 の証明の説明中に述べたように，このことの証明のキーポイントは P の像が閉部分空間であることを示すところである.

$L^2(M;E)$ での Ker (P^*P) の直交補空間を L とおく．Ker (P^*P) = Ker (P) は L^2 ノルムについての閉部分空間でまた有限次元である．さらに L の元は C^∞ 級であった．したがって $(L \cap L^2_m(M;E)) \oplus$ Ker $(P) = L^2_m(M;E)$ が任意

の m に対して成立する．ここで次の補題を用いる．

補題 3.1.5　正の定数 c が存在し

$$||u||_{L^2_k} \le c||P(u)||_{L^2_k}$$

が任意の $u \in L \cap L^2_{k+\ell}(M;E)$ に対して成立する．

証明　補題が成立しないとすると列 $u_i \in L^2_{k+\ell}(M;E)$ で

$$\lim_{i\to\infty} \frac{||P(u_i)||_{L^2_k}}{||u_i||_{L^2_k}} = 0$$

なるものがある．必要なら u_i を定数倍変えて $||u_i||_{L^2_k} = 1$ としてよい．すると

$$||u_i||_{L^2_{k+\ell}} \le C\left(||u_i||_{L^2_k} + ||Pu_i||_{L^2_k}\right) \le 2C$$

よってレリッヒの定理 3.1.2 より u_i は，必要なら部分列でおき換えて，$L^2_k(M;E)$ で収束するとしてよい．すると

$$||u_i - u_j||_{L^2_{k+\ell}} \le C\left(||u_i - u_j||_{L^2_k} + ||Pu_i||_{L^2_k} + ||Pu_j||_{L^2_k}\right) \to 0$$

より u_i は $L^2_{k+\ell}(M;E)$ で収束する．その極限を u とおくと $Pu = 0$ である．ところが u_i は Ker P と直交し，また u は 0 でないからこれは矛盾である．

証明終わり

さてこれを用いて次の補題を示そう．

補題 3.1.6　$\{Pu \mid u \in L^2_{k+\ell}(M;E)\}$ は $L^2_k(M;F)$ の閉部分空間である．

証明　$Pu_i \in \{Pu \mid u \in L^2_{k+\ell}(M;E)\}$ とし $\lim_{i\to\infty} ||Pu_i - v||_{L^2_k} = 0$ とする．$u_i = u'_i + x_i$, $u'_i \in L$, $Px_i = 0$ となるように一意に表せる．Ker P は有限次元でしかも C^∞ 級関数からなるから $u'_i \in L^2_{k+\ell}(M;E)$ である．すると補題 3.1.5 より

$$||u'_i||_{L^2_k} \le C||Pu'_i||_{L^2_k} = C||Pu_i||_{L^2_k}$$

は有界である．すると定理 3.1.1 より

$$\|u_i'\|_{L^2_{k+\ell}} \le C\left(\|u_i'\|_{L^2_k} + \|Pu_i'\|_{L^2_k}\right) = C\left(\|u_i'\|_{L^2_k} + \|Pu_i\|_{L^2_k}\right)$$

も有界である．したがって定理 3.1.2 を用いると，部分列でおき換えて u_i' は $L^2_k(M;E)$ で収束するとしてよい．すると再び定理 3.1.2 より

$$\begin{aligned}\|u_i' - u_j'\|_{L^2_{k+\ell}} &\le C\left(\|u_i' - u_j'\|_{L^2_k} + \|Pu_i' - Pu_j'\|_{L^2_k}\right)\\ &\le C\left(\|u_i' - u_j'\|_{L^2_k} + \|Pu_i - Pu_j\|_{L^2_k}\right) \to 0\end{aligned}$$

であるから u_i' は $L^2_{k+\ell}(M;E)$ で収束する．この極限を u とすると $Pu = v$．よって $v \in \{Pu \mid u \in L^2_{k+\ell}(M;E)\}$．　　証明終わり

補題 3.1.7　$v \in L^2_0(M;F)$ かつ任意の $u \in L^2_\ell(M;E)$ に対して $(v, Pu)_{L^2_0} = 0$ とすると $v \in L^2_\ell(M;F)$．

証明　（この証明でだけ負の k に対する L^2_k を用いる．）P^* は ℓ 階の微分作用素であるから $P^*v \in L^2_{-\ell}(M;E)$．負の k に対する L^2_k は双対空間として定義したから，$(u, P^*v) = (Pu, v)_{L^2_0}$ が任意の $u \in L^2_\ell(M;E)$ に対して成立する．（ここで (u, P^*v) は双対性：$L^2_\ell(M;E) \times L^2_{-\ell}(M;E) \to \mathbf{R}$ によって定義する．）したがって $P^*v = 0 \in L^2_0(M;E)$．よって定理 3.1.1 を作用素が P^* で $k + \ell = 0$ の場合に用いると $v \in L^2_\ell(M;F)$．　　証明終わり

さて補題 3.1.7 により，任意の $u \in L^2_\ell(M;E)$ に対して $(v, Pu)_{L^2_0} = 0$ ならば，v に本節前半の議論が適用できる．すなわち $\{Pu \mid u \in L^2_k(M;E)\}$ の直交補空間は有限次元でしかも C^∞ 級関数からなる．またこの空間は $\mathrm{Ker}\ (P^* : L^2_\ell(M;F) \to L^2_0(M;E))$ に等しい．

$\{Pu \mid u \in L^2_k(M;E)\}$ は閉部分空間であったから

$$\mathrm{CoKer}\ (P : L^2_\ell(M;E) \to L^2_0(M;F)) = \mathrm{Ker}\ (P^* : L^2_\ell(M;F) \to L^2_0(M;E))$$

これで定理は $k = 0$ の場合に証明された．一般の k（0 以上）に対しても $\mathrm{Ker}\ (P^* : L^2_{k+\ell}(M;F) \to L^2_\ell(M;E))$ が有限次元で，しかも C^∞ 級関数からなることに注意すれば同様に証明される．　　証明終わり

さて以上で線形の場合の話を一応終わり，これを非線形にするための方法を考えよう．

まず比較的単純な方程式

$$\Delta u = u^\alpha \tag{3.1.2}$$

を n 次元ユークリッド空間上で考えよう（α は正の実数）．たとえばこの方程式の解の空間は有限次元であろうか．定理 3.1.4 の証明（線形楕円型方程式の解の有限次元性の証明）を思い出していただければ，これは解の微分可能性と関わることが了解されよう．それで (3.1.2) の解の微分可能性を論じよう．

定理 3.1.4 の証明のまねができるであろうか．それには次のようにする必要がある．まず (3.1.2) の解でたとえば L^2_2 に含まれるものをとろう．すると

$$||u||_{L^2_{2+\epsilon}} \le C(||u||_{L^2_2} + ||\Delta u||_{L^2_\epsilon}) = C(||u||_{L^2_2} + ||u^\alpha||_{L^2_\epsilon}) \tag{3.1.3}$$

である．(ここで ε は正の数．我々は整数 k に対してしか L^2_k を定義していないのであるがここは「お話」なので勘弁していただきたい．）したがって u^α のソボレフノルムを u のソボレフノルムで評価する必要がある．線形の場合（$\alpha = 1$ の場合）はこれは自明で，したがって添字 k（L^p_k の k）を「損せずに」できた．$\alpha \ne 1$ の場合には添字 k が変わる形でこれはできる．この k を「損する」程度は多様体の次元によって微妙に変わる．これを線形部分（今の場合は Δ（ラプラシアン），とりあえず楕円型としよう）の階数と比較して定理 3.1.4 の証明のまねがうまくいくかどうかが決まる．((3.1.3) 式を見ればその場合は $||u^\alpha||_{L^2_\epsilon} \le ||u||_{L^2_2}$ の形の不等式の成立に関わる．）

これらを調べるのに用いられるのがソボレフの不等式である．

定理 3.1.8（ソボレフの埋め込み定理（強形））　M を閉多様体とする．

(1) $\frac{n}{q} - k \le \frac{n}{p} - \ell$ で $k \ge \ell$ ならば $L^q_k(M;E) \subseteq L^p_\ell(M;E)$ でしかもこの埋め込みは連続である．

(2) $\ell < k - \frac{n}{p}$ ならば $L^p_k(M;E) \subseteq C^\ell(M;E)$ でしかもこの埋め込みは連続である．(ここで $C^\ell(M;E)$ は ℓ 回微分可能な切断全体を指し，そこには C^ℓ ノルム（ℓ 回以下の微分の最大値）を入れる．

定理の証明はしない．定理 3.1.3 のところで引用した文献を見ていただきたい．ここでは証明の代わりに上の仮定$\frac{n}{q} - k \le \frac{n}{p} - \ell$ がぎりぎりであることを示す例を一つ挙げよう．$\chi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ なる関数を

$$\chi(t) = \begin{cases} 1-t & t<1 \\ 0 & t \ge 1 \end{cases}$$

で定義し，$\mathbf{R}^n$ 上の関数 u_ε を $u_\varepsilon(x) = \chi\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)$ とおこう．簡単な計算で

$$\begin{aligned} ||u_\varepsilon||_{L^p_0} &= C_{n,p}\varepsilon^{\frac{n}{p}} \\ ||u_\varepsilon||_{L^q_1} &= C_{n,q}\varepsilon^{\frac{n}{q}-1} \end{aligned}$$

がわかる．したがって $||u_\varepsilon||_{L^p_0} \le C_{p,q,n}||u_\varepsilon||_{L^q_1}$ なる不等式が $\varepsilon \le 1$ によらずに成立するのは$\frac{n}{q} - 1 \le \frac{n}{p}$ の場合である．これは，だいたい定理 3.1.8 の仮定と一致する．後で述べるように ASD 方程式ではぎりぎりの等号成立の場合が問題になる．

(2) についても同様のことがいえる．注意すべきなのは (2) に対しては仮定の等号成立の場合（たとえば $k = \frac{p}{n}$, $\ell = 0$ の場合）定理は成立しないことである．このことを示す例は省略するが，この点が ASD 方程式を調べる際に問題になる．

前に線形方程式を論じたときはソボレフの補題は単純な形（定理 3.1.3）で十分であったが，非線形の場合にはずっとデリケートなものが必要になる．たとえば方程式 (3.1.2) の場合を考えよう．容易に示せる式 $||u^\alpha||_{L^p_k} \approx ||u||_{L^{p\alpha}_k}$ とソボレフの補題より

$$||u||_{L^2_{2+\varepsilon}} \le C(||u||_{L^2_2} + ||\Delta u||_{L^2_\varepsilon}) = C(||u||_{L^2_2} + ||u^\alpha||_{L^2_\varepsilon}) \le C(||u||_{L^2_2} + ||u||_{L^q_2})$$

が $\frac{1}{q} \le \frac{1}{2\alpha} - \left(\frac{2-\varepsilon}{n}\right)$ に対して成立する．したがって $\alpha < \frac{4}{4-n}$であれば十分小さい ε に対して

$$||u||_{L^2_{2+\varepsilon}} \le C||u||_{L^2_2}$$

が (3.1.2) に対して成立し，これを用いて (3.1.2) の解で L^2_2に属するものは C^∞ 級であることを示すことができる．この議論は線形の場合と同じである．この

やり方が幾何学で現れるのは，たとえば調和写像の方程式である．ただしこの場合には $n=2$, $\alpha=2$ で**不等式** $\alpha<\frac{4}{4-n}$ は満たされていない．(実はこれがバブルという現象が起こる理由である.) 同じ事情は ASD 方程式でも起こる．これについては後に触れる．

さてソボレフ空間を応用して ASD 方程式を研究することは次節以後の課題であるが，ここではその前にソボレフの補題を利用して接続やゲージ変換の作るソボレフ空間を定義しておこう．

まず接続の空間の方を定義しよう．M をリーマン多様体，ζ をその上のベクトル束とする．ζ 上の接続（C^∞級の）を一つとり ∇_0 とする．前に述べたように ζ 上の C^∞級の接続全体は

$$\mathcal{A}(M,\zeta)=\{\nabla_0+A \mid A\in\Gamma(M;Ad\,\zeta\otimes\Lambda^1(M)\}$$

と表せる．そこでソボレフ接続の空間 $\mathcal{A}^p_k(M,\zeta)$ を

$$\mathcal{A}^p_k(M,\zeta)=\{\nabla_0+A \mid A\in L^p_k(M;Ad\,\zeta\otimes\Lambda^1(M)\}$$

で定義する．もっともこれでは $\mathcal{A}^p_k(M,\zeta)$ の元はただの形式的な記号であるが，たとえば（とりあえず）この上の $\mathcal{G}(M,\zeta)$ （C^∞級のゲージ変換の作る群）の作用が

$$g^*(\nabla_0+A)=g^{-1}\nabla_0 g+g^{-1}Ag \tag{0.0.1}$$

で定まる．ここで g は局所的には $m\times m$ 行列値の関数すなわち $Hom(\zeta,\zeta)$ とみなし，それに ∇_0 を作用させている．(3.1.4) の右辺の第2項が意味を持つのは C^∞級関数とソボレフ空間 L^p_k の元の積が意味を持ち再び L^p_k の元になるせいである．

ゲージ変換の作るソボレフ空間を定義するには (3.1.4) 式でゲージ変換がいつ定義できるかを知る必要がある．$A\in\mathcal{A}^p_k(M,\zeta)$ とし $g\in\mathcal{G}^p_{k'}(M,\zeta)$ （この2番目の記号はすぐに定義する）とすると，(3.1.4) の右辺が再び $\mathcal{A}^p_k(M,\zeta)$ に含まれるには $dg\in L^p_k(M;\zeta)$ （これは $k'\geq k+1$ ならばよい），および

$$u\in L^p_k, v\in L^q_{k'}\Rightarrow uv\in L^p_k$$

が成立する必要がある．

$$uv\text{の } k\text{階微分} = \sum_{\ell=0}^{k}(u\text{ の } \ell\text{階微分})(v\text{の } k-\ell \text{ 階微分})$$

を思い出すと，これが成り立つための条件がわかる．たとえば $k' = k+1$, $p = q = 2$ の場合を考えると，v の $1-1=0$ 階微分が有界でかつ u の $1-1=0$ 階微分と v の 1 階微分の積の L^2 ノルムが有界であればよい．ソボレフの補題より 4 次元の場合，$L^2_3 \subseteq C^0$，また $L^3_2 \subseteq L^4_1$ でかつ明らかに L^4 関数二つの積は L^2 関数である．結局この場合 $k=2$ ならよい．この場合が後でも使う一番本質的な場合である．一般の場合の証明には次の補題（やはりソボレフの補題である）が使われる．

命題 3.1.9 $\left(k_1 - \frac{n}{p_1}\right) + \left(k_2 - \frac{n}{p_2}\right) \geq k - \frac{n}{p}$ ならば，$L^{p_1}_{k_1} \otimes L^{p_2}_{k_2} \to L^p_k$, $u \otimes v \mapsto uv$ は連続である．

この命題そのものを証明してある適当な文献が見あたらないので証明をしておこう．$u \in L^{p_1}_{k_1}$, $v \in L^{p_2}_{k_2}$ とする．uv の $k' \leq k$ 回微分は u の k_1 回微分と v の $k' - k_1$ 回微分の 1 次結合である．よって $k=0$ の場合に証明すれば十分である．さらに $k_1 - \frac{n}{p_1} = -\frac{n}{p'_1}$, $k_2 - \frac{n}{p_2} = -\frac{n}{p'_2}$ なる p'_1, p'_2 をとると定理 3.1.8 より $u \in L^{p'_1}$, $v \in L^{p'_2}$．よって $k_1 = k_2 = k = 0$ としてよい．すなわち

$$\frac{1}{p} \geq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \Rightarrow ||uv||_{L^p} \leq C||u||_{L^{p_1}}||v||_{L^{p_2}}$$

を示せばよいがこれはヘルダーの不等式より明らか． 証明終わり

命題 3.1.9 を使うとゲージ変換の作るソボレフ空間とその接続の作るソボレフ空間への作用が定まる．

まずとりあえず $k - \frac{n}{p} > 0$ としよう．すると n 次元多様体上で $L^p_k(M; Hom(\zeta, \zeta)) \subseteq C^0(M; Hom(\zeta, \zeta))$ である．したがって $L^p_k(M; Hom(\zeta, \zeta))$ の元は各点の値が定まるから，それが $L^p_k(M; Ad\ \zeta)$ の元であることは意味を持つ．これら全体を $\mathcal{G}^p_k(M, \zeta)$ と書こう．むろん $\mathcal{G}^p_k(M, \zeta)$ には積の構造が入り群になる．

さて命題 3.1.9 の帰結は次のとおりである．

系 3.1.10　$k > \frac{n}{p}$ ならば $\mathcal{G}^p_{k+1}(M,\zeta)$ は $\mathcal{M}^p_k(M,\zeta)$ へ (3.1.4) 式で作用する．

最後にゲージ群 $\mathcal{G}^p_k(M,\zeta)$ の多様体構造についてちょっと述べておこう．$\mathcal{G}^p_k(M,\zeta)$ に座標を入れるには行列の指数関数を用いる．すなわち構造群 G のリー環 $\mathfrak{g}$ を考え，行列の指数関数から定まる写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ を考える．ベクトル束 $Ad\,\zeta$ は $\mathfrak{g}$ をファイバーに持ちまたその座標変換は $X \mapsto g_{ij}^{-1} X g_{ij}$ で与えられる．指数写像が $\exp(g^{-1}Xg) = g^{-1}\exp(X)g$ を満たすことおよびゲージ変換の定義 1.1.14 より行列の指数関数は $\exp : \Gamma(M; Ad\,\zeta) \to \mathcal{G}(M,\zeta)$ を定めることがわかる．このとき

補題 3.1.11　$k > \frac{n}{p}$ ならば $\exp : \Gamma(M; Ad\,\zeta) \to \mathcal{G}(M,\zeta)$ は $\exp : L^p_k(M; Ad\,\zeta) \to \mathcal{G}^p_k(M,\zeta)$ なる連続写像に拡張される．

証明は省略する．ライプニッツ (Leibniz) 則（合成関数の微分），ソボレフの埋め込み定理，命題 3.1.9 からわかる．($k > \frac{n}{p}$ ゆえ $\mathcal{G}^p_k(M,\zeta)$ の元が連続であることを用いる.)

$\exp : L^p_k(M; Ad\,\zeta) \to \mathcal{G}^p_k(M,\zeta)$ の像が原点の近傍であることも示せる．これが原点の近くでの $\mathcal{G}^p_k(M,\zeta)$ の座標を与える．他の点の近傍での座標はこれを左移動または右移動すれば得られる．これでゲージ変換群は無限次元バナッハ多様体になる．

§ 3.2 局所理論再説

この節では定理 2.2.2 の証明をしたい．これに使われるのは前節で述べたソボレフ空間と楕円型方程式についての諸結果である．これらを ASD 接続の方程式に適用しようとするとき問題になるのは，ASD 接続の方程式 $*F_A + F_A = 0$ が楕円型ではないことである．その理由はこの方程式が，ゲージ変換の群という無限次元の群で不変であることである．(適当な条件のもとでは) 楕円型方程式の解の作るモジュライ空間は有限次元でなければならないから，ASD 方程式は楕円型ではない．(もちろん直接方程式を計算してみてもこのことはわかる.)

この事情は§0.2 で触れた極小曲面の方程式と同じである．極小曲面の方程式の場合は，リーマン面の可微分同相全体の作る群という無限次元の群で不変であるために方程式の楕円性が崩れていた．そのときの解決法は面積のかわりにエネルギーを用いることで，変分法を行うための汎関数の対称性を崩すこと，言い換えると極小曲面の方程式のかわりに調和写像の方程式を考えることであった．あるいは極小曲面の方程式の解のモジュライ空間の可微分同相全体の作る群の作用による同値類から，共形的であるという条件を課して特別な代表元を選ぶことであった．(こうしたとき対称性は共形変換全体の群という有限次元の群にまで小さくなる.) この手続きをゲージの固定と呼んだ．これが可能であった一つの理由として 2 次元球面 S^2 の可微分同相の作る群が有限次元の群 $PSL(2, \mathbf{C})$ (すなわち S^2 の共形変換全体の群) にホモトピー同値であることがあげられる．

このやり方を，我々が考えている ASD 方程式の場合にまねようとすると，商空間 $\mathcal{M}(M,\zeta) = \widehat{\mathcal{M}}(M,\zeta)/\mathcal{G}(M,\zeta)$ の各元に対してその $\mathcal{A}(M,\zeta)$ における代表元を決める (高々有限次元分の曖昧さしかない) 標準的なやり方を見いださなければならない．($\widehat{\mathcal{M}}(M,\zeta)$ はベクトル束 ζ の ASD 接続全体で $\mathcal{M}(M,\zeta)$ はそのゲージ同値類全体である.) これは不可能であろう．(群 $\mathcal{G}(M,\zeta)$ は有限次元の群とホモトピー同値にならない.) したがってゲージの固定という操作は大域的に行うことはできない．すなわち $\mathcal{M}(M,\zeta)$ 全体でこのような代表元を見つけるのではなく $\mathcal{M}(M,\zeta)$ の各点の近傍でこれを行う必要がある．これは

すなわちモジュライ空間 $\mathcal{M}(M,\zeta)$ に座標を入れることにほかならない．むろん $\mathcal{M}(M,\zeta)$ が多様体であることを示す（すなわち定理 2.2.2 を証明する）ためにはこれで十分である．このために $\widehat{\mathcal{M}}(M,\zeta)$ の各点の近傍でクーロンゲージ (Coulomb gauge) なるものを導入する．

もう少しきちっとやるためにまず関数空間を設定しよう．$\widehat{\mathcal{M}}^p_k(M,\zeta)$ で，ソボレフ空間 $\mathcal{A}^p_k(M,\zeta)$ の元で ASD 方程式 $*F_A + F_A = 0$ を満たすもの全体とする．ただし本節では $p=2$ しか扱わない．多様体が 4 次元であったことを思い出すと系 3.1.10 より $k>2$ に対して $\mathcal{G}^2_{k+1}(M,\zeta)$ は $\mathcal{A}^2_k(M,\zeta)$ に作用する．(以下 $\mathcal{A}^2_k(M,\zeta)$ などの添字の 2 は省略する.)

さて C^∞ 級の $\widehat{\mathcal{M}}(M,\zeta)$ の元を一つとり A_0 とおく．A_0 の同値類近傍での $\widehat{\mathcal{M}}^2_k(M,\zeta)/\mathcal{G}_{k+1}(M,\zeta)$ の振舞いを調べよう．これは次の三つの定理によって記述される．まずクーロンゲージを定義しよう．

定義 3.2.1　$A \in \mathcal{A}_k(M,\zeta)$ が A_0 を中心としたクーロンゲージを取っているとは

$$d^*_{A_0}(A - A_0) = 0 \tag{3.2.1}$$

を満たすことをいう．

定理 3.2.2　A_0 の $\mathcal{A}_k(M,\zeta)$ での近傍 U, $\mathcal{G}_{k+1}(M,\zeta)$ での単位元の近傍 V が存在して，W を (3.2.1) を満たす $\widehat{\mathcal{M}}^2_k(M,\zeta)\cap U$ の元全体とするとき，写像

$$I : W \times V \to \widehat{\mathcal{M}}^2_k(M,\zeta)\cap U,\ \ (A,g) \to g^*(A)$$

は同相写像である．

すなわち A_0 に十分近い ASD 接続は，十分単位元に近いゲージ変換によってクーロンゲージに移される．またこのゲージ変換は一意である．

定理 3.2.3　定理 2.2.2 の仮定の下で W は $\dfrac{\mathrm{Ker}\ d^+_A}{\mathrm{Im}\ d_A}$ の原点の近傍と可微分同相である．(ここでは定理 2.2.2 の記号を用いた.)

定理 3.2.4　$\widehat{\mathcal{M}}^2_k(M,\zeta)/\mathcal{G}_{k+1}(M,\zeta)$ はハウスドルフ (Hausdorff) である．

この三つの定理から定理 2.2.2 が得られることは容易にわかるので，その証明は読者に任せる．以下この三つの定理を証明しよう．

まず定理 3.2.2 であるがこの証明には逆関数定理を用いる．ASD 方程式のゲージ不変性から，定理を示すには写像

$$I : \{A \in \mathcal{A}^2_k(M,\zeta) \mid d^*_{A_0}(A - A_0) = 0\} \times \mathcal{G}_{k+1}(M,\zeta) \to \mathcal{A}^2_k(M,\zeta),$$
$$(A, g) \mapsto g^*(A)$$

が $(A_0, 1)$ の近傍と A_0 の近傍の間の同相写像を与えることを示せばよい．これは逆関数定理により，その $(A_0, 1)$ での微分が可逆であることを示せばよい．(前節の最後に説明したように我々の仮定の下では $\mathcal{G}_{k+1}(M,\zeta)$ は多様体であった.) $g^*(A_0 + u) = A_0 + g^{-1}d_{A_0}u + g^{-1}ug$ であるから I の $(A_0, 1)$ での微分は

$$(u, v) \mapsto d_{A_0}v + u$$

で与えられる．この写像の定義域は $(\mathrm{Ker}\, d^*_{A_0} \cap L^2_k(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M))) \oplus L^2_{k+1}(M; Ad\,\zeta)$ で値域は $L^2_k(M; \Lambda^1(M) \otimes \Lambda^1(M))$ である．

まず前節で説明した調和積分についての定理 3.4.1 （および定理 0.3.4）の証明と同じようにして，直交直和分解

$$(\mathrm{Ker}\, d^*_{A_0} \cap L^2_k(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M))) \oplus d_{A_0}(L^2_{k+1}(M; Ad\,\zeta)) = L^2_k(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M)$$

が示される．(この二つが直交することおよびその和の閉包が全体を尽くすことは§0.3 で見たように比較的容易に示せる．d_{A_0} の像が閉であることが一番本質的な点であった.) したがって I の $(A_0, 1)$ での微分は全射である．

さらに我々は A_0 が既約であるとしたから $d_{A_0} : L^2_{k+1}(M; Ad\,\zeta) \to L^2_k(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M))$ は単射である．したがって I の $(A_0, 1)$ での微分は単射でもある．

これが連続であることは明らかであるから，全単射なら逆も連続である．(関数解析の閉グラフ定理（[伊藤黒] §5.3）を使うかあるいは直接評価してもできる.)

I の $(A_0, 1)$ での微分が同型であることが確かめられたからバナッハ空間に対する逆関数定理を適用して定理 3.2.2 は直ちに得られる．

次に定理3.2.3の証明に移ろう．ここで定理2.2.1の仮定すなわち $d^+_{A_0} : Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M) \to Ad\,\zeta \otimes \Lambda^2_+(M)$ が全射であることが用いられる．

§2.2ではまだ関数空間を設定していなかったから，全射というときの定義域，値域をはっきり書いていなかった．それをここで述べよう．$d^+_{A_0}$ は $d^+_{A_0} : L^2_{k+1}(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M)) \to L^2_k(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^2_+(M))$ なる写像として連続である．そこで全射というときはこの関数空間で考える．ただし全射性は k によらない．このことは次のようにしてわかる．$d_{A_0} : \Gamma(M; Ad\,\zeta) \to \Gamma(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M))$ の L^2 ノルムに関しての共役は $d^*_{A_0} : L^2_{k+2}(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M)) \to L^2_{k+1}(M; Ad\,\zeta)$ なる作用素とみなせる．AHS 複体から命題0.3.15で得られる楕円型作用素 $d^+_{A_0} \oplus d^*_{A_0} : L^2_{k+1}(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M)) \to L^2_k(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^2_+(M)) \oplus L^2_k(M; Ad\,\zeta)$ を考えると，§3.1で述べた議論より（定理3.1.4の証明）この像は閉部分空間で，しかも像の直交補空間は有限次元であり，また C^∞ 級関数からなる．したがって $d^+_{A_0} : L^2_{k+1}(Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M)) \to L^2_k(Ad\,\zeta \otimes \Lambda^2_+(M))$ の像も閉部分空間で，しかもその直交補空間は有限次元で C^∞ 級関数からなる．すなわちある k に対してこれが全射なら，任意の k に対してこれは全射である．(さらにこの議論により C^∞ 級の切断の間の写像 $d^+_{A_0} : \Gamma(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M)) \to \Gamma(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^2_+(M))$ の全射性とも同値であることがわかる.)

もう一つの仮定は A_0 の既約性であった．よって $d^*_{A_0} : L^2_{k+1}(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M)) \to L^2_k(M; Ad\,\zeta)$ も全射である．

したがって（AHS 複体は0,2次のコホモロジーを持たないから）$d^+_{A_0} \oplus d^*_{A_0} : L^2_{k+1}(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M)) \to L^2_k(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^2_+(M)) \oplus L^2_k(M; Ad\,\zeta)$ は全射である．これが定理3.2.3の仮定の言い換えである．

さて示すべきことは写像

$$
\begin{aligned}
&\Phi : \mathcal{A}^2_{k+1}(M, Ad\,\zeta) \to L^2_k(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^+_2(M)) \oplus L^2_k(M; Ad\,\zeta),\\
&A_0 + u \mapsto (F^+_{A_0+u}, d^*_{A_0}u)
\end{aligned}
$$

に対して $\Phi^{-1}(0)$ の原点の近傍が $(d^+_{A_0} \oplus d^*_{A_0})^{-1}(0)$ の原点の近傍に同相なことであった．Φ の微分が $d^+_{A_0} \oplus d^*_{A_0}$ であるから，有限次元の場合の同様の結論は陰関数定理から直ちに従う．我々の考えている無限次元の場合でも陰関数定理は適用できる．それにはしかし非線形項を評価してヒルベルト多様体（といってもい

まの場合は線形空間）の間の写像として Φ は微分可能でその微分が $d^+_{A_0} \oplus d^*_{A_0}$ であることを示さなければならない．これは非線形項をソボレフの不等式で評価することでできる．やってみよう．Φ の第 2 成分は線形だから忘れてよい．第 1 成分を書くと

$$F^+_{A_0+u} = P^+(F_{A_0} + d^+_{A_0}u + u \wedge u) = P^+(F_{A_0}) + d^+_{A_0}(u) + P^+(u \wedge u)$$

よって F^+_A が微分可能でその A_0 での微分係数が $d^+_{A_0}$ であることを示すには，第 3 項が

$$||P^+(u \wedge u)||_{L^2_k} \le C(||u||_{L^2_{k+1}})^2$$

と評価できればよい．これは $k = 0$ では $||P^+(u \wedge u)||_{L^2_k} \le C(||u||_{L^4_k})^2$ と 4 次元であることから従うソボレフの不等式 $||u||_{L^4_k} \le ||u||_{L^2_{k+1}}$ から示される．我々が扱っているのは本当は $k > 0$ の場合である．(この場合に $\mathcal{G}_{k+1}(M,\zeta)$ の元が連続になるのだった.) $k > 0$ のときは不等式の証明はむしろより易しい．(ソボレフの補題 3.1.9 からすぐでる．4 次元では $k = 0$ のとき仮定の等号が成立しデリケート.)

これでヒルベルト空間（或いはバナッハ空間）の陰関数の定理が適用できる．定理 3.2.3 は証明された．

さて最後に定理 3.2.4 を証明しよう．この主張の意味を説明するために一つ例を書いておく．

図 3.2.1 はトーラス上の力学系すなわち $\mathbf{R}$ の作用を表している．この作用の軌道にはコンパクトなものが二つあってその他の軌道はすべて $-\infty$ でコンパクトな軌道の一方に，$+\infty$ で他方に巻き付いている．この軌道は局所的には直積である．すなわち定理 3.2.2 の結論が成立する．しかしこの商空間は二つの S^1 と 2 点の和で，しかもこの 2 点の一つを取ると，その任意の近傍は二つの S^1 の両方を含んでいる．したがって商空間はハウスドルフではない．特に商空間は多様体ではない．これは $\mathbf{R}$ がコンパクトでないせいである．ここで示さなければいけないのは，このようなことがゲージ変換群の作用の場合に起こっていないことである．

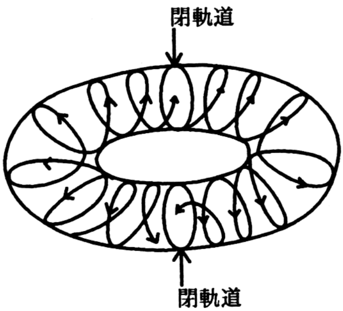


図 3.2.1

さて証明に入ろう．定理 3.2.2 を使うと，定理 3.2.4 を示すには次のことが示されればよい．

主張 3.2.5　$A_i \in \mathcal{A}_k(M,\zeta)$, $g_i, g'_i \in \mathcal{G}_{k+1}(M,\zeta)$ $A, A' \in \mathcal{A}_k(M,\zeta)$ とし，$||A - g_i^* A_i||_{L^2_k} \to 0$, $||A' - g_i'^* A_i||_{L^2_k} \to 0$ とすると $h \in \mathcal{G}_{k+1}(M,\zeta)$ が存在して $h^* A = A'$ である．

主張 3.2.5 から定理 3.2.4 がでることの証明はすぐできるので読者に任せる．図 3.2.1 の例の場合に主張 3.2.5 と同様なことは成立しないことに注意して欲しい．

主張 3.2.5 の証明　$h_i = g_i^{-1} g'_i$ とおく．

$$
(3.2.2)\qquad
\begin{aligned}
||h_i^* A - A'||_{L^2_\ell} &\le ||h_i^* A - g_i'^* A_i||_{L^2_\ell} + ||g_i'^* A_i - A'||_{L^2_\ell} \\
&\le ||(h_i^*)(A - g_i^* A_i)||_{L^2_\ell} + ||g_i'^* A_i - A'||_{L^2_\ell}
\end{aligned}
$$

($(gg')^* A = g'^* g^* A$ に注意．) 式 (3.2.2) を使って h_i が L^2_{k+1} 位相で収束することを証明する（$k > 0$ であった）．まず $\ell = 0$ として (3.2.2) を適用しよう．すると

$$
\begin{aligned}
||h_i^* A - A'||_{L^2} &\le ||(h_i^*)(A - g_i^* A_i)||_{L^2} + ||g_i'^* A_i - A'||_{L^2} \\
&\le |h_i|_{C^0} ||A - g_i^* A_i||_{L^2} + ||g_i'^* A_i - A'||_{L^2}
\end{aligned}
$$

$$\leq \quad C\left(||A - g_i^* A_i||_{L^2} + ||g_i'^* A_i - A'||_{L^2}\right)$$

ここでは二つのことを用いている．第一は 1 行目から 2 行目に移ることで，これは $(h_i^*)(A - g_i^* A_i) = h_i^{-1}(A - g_i^* A_i)h_i$, 及び $h_i^{-1}(A - g_i^* A_i)h_i$ が h_i の微分を含んでいないことからわかる．ゲージ変換としては L^2_{k+1}, $k > 0$ の元を考えていたのであるから，h_i は連続である．次に 2 行目から 3 行目に移るには h_i の C^0 ノルムが有界であることが必要である．これは構造群がコンパクト群 $(SU(2))$ であることからわかる．

さて上の式より $||h_i^* A - A'||_{L^2} = ||h_i^{-1} d_A h_i + h_i^{-1} A h_i - A'||_{L^2}$ は有界である．一方 $||h_i^{-1} A h_i - A'||_{L^2}$ もやはり有界であるから，$||d_A h_i||_{L^2} \leq |h_i|_{C^0} ||h_i^{-1} d_A h_i||_{L^2}$ も有界である．よって $||h_i||_{L^2_1} \leq C(||h_i||_{L^2} + ||d_A h_i||_{L^2})$ ゆえ h_i は L^2_1 で有界である．したがってレリッヒの定理よりこれは L^2 で収束する部分列を持つ．

次のステップに進もう．(3.2.2) を少し変形した式

$$\begin{aligned} ||h_i^* A - A'||_{L^2_\ell} &\leq ||(h_i^*)(A - g_i^* A_i)||_{L^2_\ell} + ||g_i'^* A_i - A'||_{L^2_\ell} \\ &\leq ||h_i||_{L^2_\ell} ||A - g_i^* A_i||_{L^2_\ell} + ||g_i'^* A_i - A'||_{L^2_\ell} \end{aligned}$$

を使おう．(右辺 1 行≤右辺 2 行は，命題 3.1.9 より $\ell \geq 1$ のとき正しい．) まずこの式を $\ell = 1$ に対して使うと，$||h_i||_{L^2_\ell}$ は有界だったから右辺は 0 に収束する．したがって前と同様にして $||dh_i||_{L^2_1}$ が有界であることが示せる．これと $||h_i||_{L^2_1}$ の有界性を使うと $||h_i||_{L^2_2}$ の有界性がでる．

これと同じ議論を $\ell = 2$ に適用する．すると $||h_i||_{L^2_3}$ の有界性がでる．これは $\ell = k$ まで続けられるから $||h_i||_{L^2_{k+1}}$ は有界である．よって h_i は L^2_k 収束するとしてよい．

さて最後に h_i が L^2_{k+1} 収束することを示そう．まず

$$\begin{aligned} ||h_i^* A - h_j^* A||_{L^2_k} \leq \quad & ||h_i||_{L^2_k} ||A - g_i^* A_i||_{L^2_k} + ||g_i'^* A_i - A'||_{L^2_k} \\ & + ||h_j||_{L^2_k} ||A - g_j^* A_j||_{L^2_k} + ||g_j'^* A_j - A'||_{L^2_k} \end{aligned}$$

であるから，左辺は $i, j \to \infty$ で 0 に収束する．したがって $\lim_{i,j\to\infty} ||dh_i - dh_j||_{L^2_k} = 0$. よって h_i は L^2_{k+1} ノルムについてコーシー (Cauchy) 列である．

以上の議論をブートストラッピング (bootstraping) という．(ゲージ変換されるもの同士が収束することを使ってゲージ変換の収束の度合いをだんだん良く

していく.)

同じ議論で $h_i^{-1} = g_i'^{-1} g_i$ も L^2_{k+1} ノルムについて収束する．これらの極限を h, h^{-1} とおけばよい． 証明終わり

以上で本節最初の三つの定理は証明された．これを使って§2.2で述べた局所理論は，横断正則性の部分及び特異点に関わる部分を除いて，示されたことになる．横断正則性についての考察は§3.4で述べる．特異点についての部分のうち定理2.2.12に関わる部分の証明は基本的には本節と同じであるがもう少しだけ煩雑である．省略することにしたい．([FU] §4などを見よ.)

さてこの節の最後に定理2.2.2の仮定のうちで $d_A^+ : Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M) \to Ad\,\zeta \otimes \Lambda^2_+(M)$ の全射性が成り立たないとき，$[A]$ の近傍でモジュライ空間に何が起こっているのかを調べたい．この考察は倉西が複素構造のモジュライを調べるのに用いたもののアナロジーである（[倉西]）．簡単のため A が既約接続とする．(以下の部分は本書の残りでは用いない.)

まず $d_A^+ : Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M) \to Ad\,\zeta \otimes \Lambda^2_+(M)$ の余核を $\mathcal{H}_A^{2,+}$ とおこう．B を A に近い接続とする．このとき $d_B^+ : Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M) \to Ad\,\zeta \otimes \Lambda^2_+(M)$ の余核が0であるかどうかはわからない．$d_B^+ d_B^{+*}$ なる楕円型作用素を考える．$d_B^+ d_B^{+*}$ は自己共役であるからコンパクト多様体上では離散的な固有値を持つ（定理4.4.9を見よ）．$A = B$ であるとき，この楕円型作用素は $\mathcal{H}_A^{2,+}$ と同一視されるような核を持つ．したがって固有値が接続に滑らかに依存していることから，次の補題が成立する．

補題 3.2.6　正の数 ε を，$d_A^+ d_A^{+*}$ の固有値が半開区間 $(0,\varepsilon]$ に存在しないように選ぶ．すると A の近傍 U が存在して，$B \in U$ であれば $d_B^+ d_B^{+*}$ の固有値で閉区間 $[0,\varepsilon]$ にあるものの数は（重複度も込めて数えると）$\dim \mathcal{H}_A^{2,+}$ である．

$d_B^+ d_B^{+*}$ の固有関数で閉区間 $[0,\varepsilon]$ にある固有値に対応するもの全体ではられる空間を $\mathcal{E}_B(\varepsilon)$ と書こう．§2.3での族の指数の定義と同じようにして，これらは U 上の有限次元ベクトル束をなすことが示される．(この証明には次元が一

定であることを主張する補題 3.2.6 が必要である.）このベクトル束にはゲージ変換群の作用が定まるから，$[A] \in \mathcal{B}(M, \zeta_k)$ の近傍 $\overline{U}$ 上のベクトル束が定まる．これを $\mathcal{E}(\varepsilon)$ とおこう．$\mathcal{E}(\varepsilon)$ は ε が補題の条件を満たす限り，ε の取り方によらない．

一方で $\mathcal{B}(M, \zeta_k)$ 上の（無限次元）ベクトル束$\Gamma(M; Ad\, \zeta_k \otimes \Lambda^2_+(M)) \times_{\mathcal{G}(M,\zeta_k)} \mathcal{A}(M, \zeta_k) \to \mathcal{B}(M, \zeta_k)$ を考えよう．$\mathcal{E}(\varepsilon)$ はこの束の部分束である．$\Pi_1 : \Gamma(M; Ad\, \zeta_k \otimes \Lambda^2_+(M)) \times_{\mathcal{G}(M,\zeta_k)} \mathcal{A}(M, \zeta_k) \to \mathcal{E}(\varepsilon)$ で直交射影を表す．このとき ASD 方程式を弱めた次の微分方程式を考える．

$$\Pi_{1,B}(F_B + *F_B) = F_B + *F_B \tag{3.2.3}$$

補題 3.2.7 近傍 U を十分小さくとると $\{[B] \in \overline{U} \mid \Pi_{1,B}(F_B + *F_B) = F_B + *F_B\}$ は $\dim \operatorname{Ker} d_A^+$ 次元の多様体になる．

証明は定理 2.2.2 の証明とほぼ同じである．要点は $\Pi_{1,B}(F_B + *F_B) = F_B + *F_B$ の線形化方程式 $(\Pi_{1,B} - 1)d_B^+ u = 0$ に現れる作用素 $(\Pi_{1,B} - 1)d_B^+ : L_1^2(M; Ad\, \zeta_k \otimes \Lambda^1(M)) \to \mathcal{E}_B(\varepsilon)^\perp$ が全射であることである.（ここで $\mathcal{E}_B(\varepsilon)^\perp$ は $\mathcal{E}_B(\varepsilon)$ の $L^2(M; Ad\, \zeta_k \otimes \Lambda^2_+(M))$ での直交補空間である.）これは A では明らかである．したがって（線形写像の全射性は多少摂動しても不変であるから）十分小さい U の任意の元 B に対しても成立する．

$(\Pi_{1,B} - 1)d_B^+$ の全射性を d_B^+ の全射性の代わりに使えばよい．

さて補題の空間を

$$\mathcal{Z}(M, \zeta_k) = \{[B] \in \overline{U} \mid \Pi_{1,B}(F_B + *F_B) = F_B + *F_B\}$$

とおこう．ここにベクトル束 $\mathcal{E}(\varepsilon)$ を制限する．これには自然な切断 $[B] \mapsto F_B + *F_B$ が存在する．この切断を $\Pi_1 F^+$ と書こう．次の補題は明らかである．

補題 3.2.8 $\overline{U} \cap \mathcal{M}(M, \zeta_k) = \{[B] \in \mathcal{Z}(M, \zeta_k) \mid \Pi_1 F^+([B]) = 0\}$

以上で証明したことをまとめよう．

定理 3.2.9　$[A] \in \mathcal{M}(M,\zeta_k)$ を既約 ASD 接続とする．このとき $[A]$ を含む $\dim \mathrm{Ker}\ d_A^+$ 次元の多様体 $\mathcal{Z}$ と $\mathcal{Z}$ 上の $\dim \mathrm{CoKer}\ (d_A^+ : Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M) \to Ad\,\zeta \otimes \Lambda^2_+(M))$ 次元のベクトル束 $\mathcal{E}(\varepsilon)$，およびその切断 $\Pi_1 F^+$ があって，$[A]$ の $\mathcal{M}(M,\zeta_k)$ での近傍は $\{[B] \in \mathcal{Z} \mid \Pi_1 F^+([B]) = 0\}$ に一致する．

この定理はたとえば次のように使う．$\mathcal{M}(M,\zeta_k)$ が 0 次元の場合を考えよう．すると $\mathcal{Z}(M,\zeta_k)$ の次元と $\mathcal{E}(\varepsilon)$ の次元は等しい，したがって $\mathcal{M}(M,\zeta_k)$ の（符号付き）位数は $\mathcal{E}(\varepsilon)$ のオイラー数 (Euler) である（§1.3 でのオイラー数の記述を参照せよ）．

§ 3.3 ウーレンベックの原理

本節ではモジュライ空間のコンパクト化についての基礎であった§2.4 で述べた諸定理，定理 2.4.1 および補題 2.4.3 の証明を行う．もう一つの定理つまり定理 2.4.2 の証明は§4.4 で行う．これらはウーレンベック (Uhlenbeck) によるものである（[U1],[U2]）．

コンパクト性の議論も方程式の楕円性に基づいたアプリオリ評価が基本である．まずこれらについて述べよう．D^4 を半径 1 の 4 次元の円板としその上に普通のユークリッド計量を入れておこう．$p \in \partial D^4$ に対して $\vec{n}(p)$ で外向きの単位法線ベクトルを表す．次の定理 3.3.1 は ASD 接続でなくても成立する．

定理 3.3.1　正定数 ε, C が存在して次のことが成り立つ．A を D^4 上の自明な $SU(2)$ 束の接続で $||F_A||_{L^2} \le \varepsilon$ を仮定する．このとき D^4 上のゲージ変換 g が存在して次の (1),(2),(3) が成立する．また (1),(2),(3) を満たすゲージ変換 g は等方部分群の元（A を動かさないゲージ変換）を除いてただ一つである．

(1)
$$||g^*A||_{L^2_1} \le C||F_A||_{L^2}$$
(2)
$$d^*(g^*A) = 0$$
(3)
$$(g^*A)(\vec{n}(p)) = 0$$

定理の証明は後回しにする．定理の主張の中心は (1) である．これは接続が曲率で評価されること，すなわち曲率が 0 に近ければ接続も 0 に近いことを主張する．もちろんそうなるようにするにはゲージ変換を行わなければならない．(2) はそのためにゲージを固定する条件である．つまりクーロンゲージが選ばれている．(3) があるのは D^4 がコンパクトでないためである．つまり境界付き多様体上では境界条件を設定しなければクーロンゲージの一意性が成り立たず，したがってアプリオリ評価が成立しない．

ここではこの定理を応用したい．それにはもう一つ定理が必要である．これも証明は後回しにする．

定理 3.3.2　A を D^4 上の自明な $SU(2)$ 束の ASD 接続で，$||F_A||_{L^2} \le \varepsilon$ を仮定する.（ここで ε は定理 3.3.1 のもの.）このとき定数 C_k が存在して定理 3.3.1 のゲージ変換 g に対して次の評価が成り立つ.

$$||g^*A||_{L^2_k} \le C_k ||F_A||_{L^2}$$

さてこの二つの定理を使って定理 2.4.1 を示そう．その証明にはいる前にちょっと定理 3.3.1 について注意する．そこでは円板 D^4 の計量はユークリッド計量としたが，実はそうでなくてもよい．正確には D^4 上の計量の作る C^∞ 位相についてのコンパクト集合を任意にとると，その上で一様に（すなわち ε, C が，この集合に属する計量によらないで）定理は成立する．これは後で述べる定理の証明から明らかである．定理 3.3.2 についても同様である．

さて定理 2.4.1 の証明は次のようにする．δ_j なる 0 に収束する正の数の列をとる．各々の j に対して p_j^h なる（有限個の）M の点たちを

$$\bigcup\nolimits_h D\left(p_j^h, \delta_j/2\right) = M$$
$$h \ne h' \Rightarrow d(p_j^h, p_j^{h'}) \ge \delta_j/4$$

となるようにとる.（ここで d は 2 点間の距離，$D(p,R)$ は p を中心とした半径 R の円板を表す.）このような有限集合 $\{p_j^h \mid h = 1, 2, \cdots\}$ の存在は次のようにして示すことができる．$\mathfrak{Z}$ を D^4 の部分集合 Z で条件 $p, p' \in Z$, $p \ne p' \Rightarrow d(p,p') \ge \delta_j/4$ を満たすもの全体とする．$\mathfrak{Z}$ の元の間で包含関係で（部分）順序を入れる．この順序に関して極大な元が存在する.（ツォルン (Zorn) の補題)．この元を $\{p_j^h \mid h = 1, 2, \cdots\}$ とする．極大性を使うと $\bigcup_h B\left(p_j^h, \delta_j/2\right) = M$ が容易に示せる．

A_i たちは ASD 接続であるからその曲率の L^2 ノルムはチャーン (Chern) 数の定数倍で，したがって i によらない．一方 $h \ne h' \Rightarrow d(p_j^h, p_j^{h'}) \ge \delta_j/4$ を用いると，任意の $x \in M$ に対して $x \in D(p_j^h, \delta_j)$ となる h の数は jによらない数 C でおさえられることがわかる．実際 $x \in D(p_j^h, \delta_j)$ となる h の数を N とすると，N 個の半径 $\delta_j/8$ の球体 $D\left(p_j^h, \delta_j/8\right)$ が $D\left(x, 9\delta_j/8\right)$ に含まれ，$h \ne h' \Rightarrow d(p_j^h, p_j^{h'}) \ge \delta_j/4$ ゆえ，これらは交わらない．よって体積を考えて，

$N(\delta_j/8)^4 \le (9\delta_j/8)^4$.（これは計量がユークリッドのときは明らかだが，そうでなくても係数が変化するだけである．たとえば，酒井隆『リーマン幾何学』裳華房 p.206 参照.）

よって

$$\sum \int_{D(p_j^h,\delta_j)} ||F_{A_i}||^2 * 1 \le C \int_X ||F_{A_i}||^2 * 1$$

ゆえ定理 3.3.1 の ε をとると，i にも j にもよらない数 K が存在し $\int_{D(p_j^h,\delta_j)} ||F_{A_i}||^2$ $*1 \le \varepsilon$ が満たされない h は高々 K 個である．

よって A_i を部分列で置き換えて p_j^h の順番をつけ換えると，

$$h > K \Rightarrow \int_{D(p_j^h,\delta_j)} ||F_{A_i}||^2 * 1 \le \varepsilon \tag{3.3.1}$$

が満たされるようにできることが，次のようにして示される．まず p_1^h の順番を入れ換え，また部分列をとると

$$h > K \Rightarrow \int_{D(p_1^h,\delta_1)} ||F_{A_{i(1,m)}}||^2 * 1 \le \varepsilon$$

がすべての m に対して成り立つような部分列 $A_{i(1,m)}$ が存在する．($\{p_1^h\}$ が有限集合であるから明らか.）次に $A_{i(1,m)}$ の部分列 $A_{i(2,m)}$ をとり p_2^h の順番を入れ換えると

$$h > K \Rightarrow \int_{D(p_2^h,\delta_2)} ||F_{A_{i(2,m)}}||^2 * 1 \le \varepsilon$$

が成り立つ．以下帰納的に部分列 $i(j,m)$ をとり p_j^h を入れ換える．

すると明らかに $A_m = A_{i(m,m)}$ なる部分列が求めるものである．これで (3.3.1) が示された．

必要なら部分列で置き換えることにより，各々の $h \le K$ に対して $\lim_{j\to\infty} p_j^h$ は収束するとしてよい．この極限を $p_1,\cdots,p_K$ とする．

さて X を $M - \{p_1,\cdots,p_K\}$ の任意のコンパクト部分集合とする．X と $\{p_1,\cdots,p_K\}$ の距離より十分 δ_j が小さいように j を（大きく）選び固定する．すると $\bigcup_{h>K} D(p_j^h,\delta_j) \supseteq X$ が成立する．

さてここで円板 $D(p_j^h,\delta_j)$ の計量を $1/\delta_j$ 倍しよう．するとできたものは D^4

上のリーマン計量で，しかもこれは j が大きければ大きいほどユークリッド計量に近いから，この計量は j によらない D^4 上の計量のあるコンパクト集合に入る．(正確にいうと，先にこのコンパクト集合を決めておき，それから決まる ε に対して (3.3.1) が満たされるようにする．)

さてここで ASD 方程式と曲率の L^2 ノルムの共形不変性を用いると，D^4 上の接続と思い直したときの $A_i|_{D(p_j^h,\delta_j)}$ は定理 3.3.2 の仮定を満たす．

したがって $D\left(p_j^h,\delta_j/2\right)$ 上のゲージ変換 g_i^h があって ${g_i^h}^* A_i$ の（$D\left(p_j^h,\delta_j/2\right)$ 上の）任意のソボレフノルムは i によらず有界である．(j にはよるかもしれないがこれは固定していたのでここではかまわない．) 以下添字 j は書かないことがある．

したがって ${g_i^h}^* A_i$ の C^k ノルムはどの k に対しても有界であり，よってこれらは $D\left(p_j^h,\delta_j/2\right)$ 上で C^∞ 収束する部分列を持つ．(C^k ノルムとは k 階までの微分の値の最大値であった．) 円板 $D\left(p_j^h,\delta_j/2\right)$ は有限個しかないから，A_i を部分列で置き換えて ${g_i^h}^* A_i$ は初めから収束するとしてよい．この極限を A_j^h としよう．

以上で構成したのは X を被覆する円板たち $D\left(p_j^h,\delta_j/2\right)$ とその上の（自明なベクトル束の）接続 A_j^h である．さて次にこれらがはり合わさって X 上のベクトル束を作ることを見よう．

$D_{h,h'} = D\left(p_j^h,\delta_j/2\right) \cap D\left(p_j^{h'},\delta_j/2\right)$ とする．この上のゲージ変換 $(g_j^h)^{-1} g_j^{h'}$ を考えるとこれは C^∞ 収束する部分列をもつ．

このことを証明するには $\lim_{i\to\infty} |{g_j^h}^* A_i - A_j^h|_{C^k} = 0$, $\lim_{i\to\infty} |{g_j^{h'}}^* A_i - A_j^{h'}|_{C^k} = 0$ に注意する．これから $\lim_{i\to\infty} |((g_j^h)^{-1} g_j^{h'})^* A_j^h - A_j^{h'}|_{C^k} = 0$ が任意の k で成り立つ．ブートストラッピング（主張 3.2.5 の証明）より $(g_j^h)^{-1} g_j^{h'}$ には C^∞ 収束する部分列がある．以下この部分列をとっておく（同じ記号で部分列を表す）．

$(g_j^h)^{-1} g_j^{h'}$ の極限を $g_{hh'}$ とおこう．すると ${g_{hh'}}^* A_j^h = A_j^{h'}$ が $D_{h,h'}$ 上で成り立つ．これがベクトル束のはり合わせを与えること，すなわち $g_{hh'} g_{h'h''} = g_{hh''}$ は，定理 3.3.1 でのゲージ変換の一意性からでる．また A_j^h たちは変換系 $g_{hh'}$ ではり合わさって接続を与える．

こうして X ベクトル束 ξ とその上の接続 A が構成された．次に $\varphi_i : \zeta|_X \to \xi$

で任意の k に対して $|\varphi_i{}^*A - A_i|_{C_k} \to 0$ が成立するものを作ろう（$|\ |_{C^k}$ は C^k ノルムを表す）．

まず $\varphi_i^h : \zeta|_{D(p_j^h,\delta_j/2)} \to \xi|_{D(p_j^h,\delta_j/2)}$ を g_i^h の制限とする．これらがはり合わさって $\varphi_i : \zeta|_X \to \xi$ を構成するわけではない．(束 ξ のはり合わせ写像と整合的でない.) しかしこのずれは $i \to \infty$ で 0 に近づく．すなわち $\lim_{i\to\infty} |g_i^h g_{hh'} - g_i^{h'}|_{C^k} = 0$. したがって g_i^h を少しずらして $\tilde{g}_i^h g_{hh'} = \tilde{g}_i^{h'}$, $\lim_{i\to\infty} |\tilde{g}_i^h - g_i^h|_{C^k} = 0$ なる $\tilde{g}_i^h$ が存在することがわかる．(1 の分解と指数写像を使う.) $\tilde{g}_i^h$ をはり合わせて $\varphi_i : \zeta|_X \to \xi$ なる同型が構成できる．$\lim_{i\to\infty} |\tilde{g}_i^h - g_i^h|_{C^k} = 0$, $|g_i^{h*}A - A_i|_{C_k} \to 0$ ゆえ，$|\varphi_i{}^*A - A_i|_{C_k} \to 0$ が成り立つ．

そこである i_0 をとっておいて，$g_i = \varphi_i^{-1}\varphi_{i_0}$ とおき，また $\varphi_{i_0}^*A = A_0$ とおくと，$\lim_{i\to\infty} |g_i{}^*A_i - A_0|_{C^k} = 0$.

すなわち $M - \{p_1, \cdots, p_K\}$ の任意のコンパクト部分集合 X に対して，その上のゲージ変換 g_i で $g_i{}^*A_i$ が収束するものを作ることができた．

定理の主張は $M - \{p_1, \cdots, p_K\}$ の上のゲージ変換 g_i で $g_i{}^*A_i$ が任意のコンパクト部分集合 X で収束するものを作ることができることであった．この形にするための議論は基本的には上の証明の最後の部分（円板上の収束からベクトル束，接続，その間の同型を構成した議論）と同じであるので省略する．

以上で定理 2.4.1 は証明された．上の証明は始めのところでだけ多様体のコンパクト性を使った．すなわち曲率の L^2 ノルムが有界であることを示すところである．したがってこれを仮定に入れておけば，定理 2.4.1 はコンパクトでない場合も成立する．(もちろん結論の収束はコンパクト集合上の C^∞ 収束である.)

次に定理 3.3.1 と定理 3.3.2 の証明を述べる．(証明はほぼ完全につけるが境界条件の関わる部分だけ省略する．[DK] 2.3 では S^4 上の問題に移し換えて境界に関わる問題を巧妙にさけている.)

定理 3.3.1 の方から始めよう．証明は接続 A が滑らかな場合だけ行う．証明は連続法で行う．(連続法については 2.4 節でちょっとだけ述べた.) すなわち次の命題を考える．

命題 3.3.3　正の定数 C, ε が存在して次のことが成立する．$t \in [0,1]$ に滑らかに依存する D^4 上の接続の族 A_t が $A_0 = 0, ||F_{A_t}||_{L^2} < \varepsilon$ を満たせば，ゲージ変換の族 g_t が存在して次の (1),(2),(3) を満たす．またこれらの条件を満たすゲージ変換は A_t の等方部分群の元を除いてただ一つである．

(1) $$||{g_t}^* A_t||_{L_1^2} < C||F_{A_t}||_{L^2}$$

(2) $$d^*({g_t}^* A_t) = 0$$

(3) $$({g_t}^* A_t)(\vec{n}(p)) = 0$$

命題 3.3.3 から定理 3.3.1 が従うことをみよう．

接続 A が定理 3.3.1 の仮定を満たすとする．このとき A_t を

$$A_t(x) = \begin{cases} A\left(\frac{x}{t}\right) & t > 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

で定める．すると $x \mapsto \frac{x}{t}$ は共形変換であるから $||F_{A_t}||_{L^2(D^4)} = ||F_A||_{L^2(D^4(t))} \leq ||F_A||_{L^2(D^4)}$．よって A_t は命題 3.3.3 の仮定を満たす．そこで $g = g_1$ とおけば定理 3.3.1 は示される．

命題 3.3.3 の証明　命題の結論が成り立つような t の集合を T とおく．$0 \in T$ であるから T は空集合ではない．T が開かつ閉集合であることを示せばよい．

開集合であることは逆関数の定理を用いて以下のようにして証明される．

$t \in T$ として $(g, B) \mapsto g^*(A_t + B)$ なる写像：$\mathcal{G}(D^4, su(2)) \times \mathrm{Ker}\, d^* \to \mathcal{A}(D^4)$ が全射であることを示す．この言い方は相当乱暴である．というのは境界条件もソボレフ空間もすべて無視しているから．正確には $\mathrm{Ker}\, d^*$ は境界条件 (3) を課して L_1^2 ノルムについて完備化し，$\mathcal{A}(D^4)$ は（境界条件を課さずに）L_1^2 ノルムについて完備化し，$\mathcal{G}(D^4, su(2))$ は L_2^2 ノルムについて完備化する．このとき写像 $(g, B) \mapsto g^*(A_t + B)$ を $(g_t, 0)$ で微分すると，$(u, V) \mapsto d_{{g_t}^* A_t} u + V = du + [{g_t}^* A_t, u] + V$ である．ソボレフの補題 3.1.9 により評価すると

(3.3.2) $$||[{g_t}^* A_t, u]||_{L_1^2} \leq C||{g_t}^* A_t||_{L_1^2} ||u||_{L_2^2} \leq C\varepsilon ||u||_{L_2^2}$$

一方調和積分論より，境界のことを忘れると，直交直和分解

$$(3.3.3)\quad \begin{aligned} &L^2_1(D^4; su(2)\otimes\Lambda^1)\\ &\quad = \mathrm{Ker}\ (d^* : L^2_1(D^4; su(2)\otimes\Lambda^1) \to L^2(D^4; su(2)))\\ &\quad\quad \oplus \mathrm{Im}\ (d : L^2_2(D^4; su(2)) \to L^2_1(D^4; su(2)\otimes\Lambda^1)) \end{aligned}$$

が成立する．より正確に境界条件も込めて述べると次のとおりである．

$$\{u \in C^\infty_0(D^4; su(2)\otimes\Lambda^1) \mid d^*u = 0, u(\vec{n}(p)) = 0\}$$

の L^2_1 ノルムでの閉包を H とする．すると

$$\begin{aligned} &L^2_1(D^4; su(2)\otimes\Lambda^1)\\ &\quad = H \oplus \mathrm{Im}\ (d : L^2_2(D^4; su(2)) \to L^2_1(D^4; su(2)\otimes\Lambda^1)) \end{aligned}$$

この直和分解を用いると，写像： $L^2_2(D^4; su(2)) \oplus H \to L^2_1(D^4; su(2)\otimes\Lambda^1)$ ： $(u, V) \mapsto d_{g_t{}^*A_t}u + V = du + [g_t{}^*A_t, u] + V$ の微分が全射であることがわかる．よって逆関数定理より $|t' - t|$ が十分小さい t' に対して

$$g^*(g_t{}^*A_t + V) = g_t{}^*A_{t'}$$

なるゲージ変換 g と $V \in H$ が存在する．

$g_{t'} = g_t g^{-1}$ とおくと

$$d^*(g_{t'}{}^*A_{t'} + V) = d^*((g^{-1})^*g_t{}^*A_{t'}) = d^*(g_t{}^*A_t + V) = 0$$

また (3) も $V \in H$ ゆえ満たされる．$||g - id||_{L^2_2} < C|t - t'|$ ゆえ（id は単位元）$|t' - t|$ が十分小さければ (1) も成り立つ．((1) の不等号は $\leq$ ではなく $<$ であることに注意.）これで $t' \in T$ が示され，したがって T が開集合であることがわかる．一意性の証明は易しいので省略する．

さて次に T が閉集合であることを示そう．これはアプリオリ評価である．すなわち $d(g_t{}^*A_t) + g_t{}^*A_t \wedge g_t{}^*A_t = F_{g_t{}^*A_t}$ と $d^*(g_t{}^*A_t) = 0$ を $g_t{}^*A_t$ が未知関数である楕円型偏微分方程式とみなして $g_t{}^*A_t$ を $F_{g_t{}^*A_t}$ を用いて評価する．もし非線形項 $g_t{}^*A_t \wedge g_t{}^*A_t$ がなければ $B \mapsto (dB, d^*B)$ は楕円型線形である

から（境界についてのことを忘れれば）$||B||_{L^2_1} \leq C(||dB||_{L^2} + ||d^*B||_{L^2})$ はゴルディングの不等式（定理 3.1.1）の帰結である．(ここには $||B||_{L^2}$ に対応する項がないが $B \mapsto (dB, d^*B)$ が（しかるべき境界条件のもとで）単射であることによりこの項はいらない．補題 3.1.5 の証明を見よ.）我々の場合には境界があるから少し注意を要するが，この場合，境界条件 (3) を課せばよいことがわかる（証明略）．

むろん本当は非線形項 ${g_t}^*A_t \wedge {g_t}^*A_t$ があり，これが問題である．非線型項の評価は以下のようにして行う．ソボレフの不等式（補題 3.1.9）をもう一度使うと

$$||{g_t}^*A_t \wedge {g_t}^*A_t||_{L^2} \leq C_1 \left(||{g_t}^*A_t||_{L^2_1}\right)^2$$

(以下いろいろ出てきて紛らわしいから定数 C には順番をふろう．命題 3.3.3 でいう C はあとで決まる.）ここで R を任意にとり $||{g_t}^*A_t||_{L^2} \leq \varepsilon R$ を仮定する．すると，

$$||{g_t}^*A_t \wedge {g_t}^*A_t||_{L^2} \leq C_1 \left(||{g_t}^*A_t||_{L^2_1}\right)^2 \leq RC_2\varepsilon||{g_t}^*A_t||_{L^2_1} \tag{3.3.4}$$

(この辺はソボレフの補題のぎりぎりを使ったデリケートな議論である．§3.1 で少し触れたようにヤン (Yang)–ミルズ (Mills) 方程式は 4 次元の場合に解析的に一番デリケートになる.）ここで C たちは t によらず，また ε は定理の仮定 $||F_A||_{L^2} \leq \varepsilon$ に出てきた小さい正の数で，これから選ぶ．

(3.3.4) と $d({g_t}^*A_t) + {g_t}^*A_t \wedge {g_t}^*A_t = F_{{g_t}^*A_t}$ より

$$\begin{aligned} ||d({g_t}^*A_t)||_{L^2} &\leq ||{g_t}^*A_t \wedge {g_t}^*A_t||_{L^2} + ||F_{{g_t}^*A_t}||_{L^2} \\ &\leq RC_2\varepsilon||{g_t}^*A||_{L^2_1} + ||F_{{g_t}^*A_t}||_{L^2} \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

一方（非線形項のない場合として述べたように）

$$\begin{aligned} ||{g_t}^*A||_{L^2_1} &\leq C_3(||d({g_t}^*A_t)||_{L^2} + ||d^*({g_t}^*A_t)||_{L^2}) \\ &\leq C_4||d({g_t}^*A_t)||_{L^2} \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

(3.3.5) と (3.3.6) より

$$||{g_t}^*A||_{L^2_1} \leq C_5R\varepsilon||{g_t}^*A||_{L^2_1} + C_6||F_{{g_t}^*A_t}||_{L^2}$$

つまり

$$\|g_t{}^*A\|_{L_1^2} \le \frac{C_7}{1 - C_8 R\varepsilon} \|F_{g_t{}^*A_t}\|_{L^2} \tag{3.3.7}$$

さてここで R にあわせて ε を小さく選ぶと (3.3.7) から

$$\|g_t{}^*A\|_{L_1^2} \le C_9 \|F_{g_t{}^*A_t}\|_{L^2} \tag{3.3.8}$$

がわかる．ここで C_9 は R によらない（ε は R による）．以上をまとめると

補題 3.3.4 R を任意の正の数とする．このとき ε が存在し g_t, A_t が命題 3.3.3 の (2),(3) を満たし，$\|F_A\|_{L^2} \le \varepsilon$, $\|g_t{}^*A_t\|_{L^2} \le \varepsilon R$ とすると

$$\|g_t{}^*A\|_{L_1^2} \le C_9 \|F_{g_t{}^*A_t}\|_{L^2}$$

さてこれで命題 3.3.3 の証明を完成する準備が整った．補題 3.3.4 の C_9 は R と無関係だった．そこで $R = 2C_9$ ととってよい．また R が命題 3.3.3 の C であるとしよう．ε は補題 3.3.4 で定める．このとき命題 3.3.3 を満たす t の集合 T が空でないこと，および開集合であることはすでに示した．これが閉集合であることを言えばよい．

$t_i \in T$, $\lim_{i\to\infty} t_i = t$ としよう．$t_i \in T$ より A_{t_i},g_{t_i} があって (1),(2),(3) が満たされる．まず g_{t_i} が $i \to \infty$ でとにかくどこかに C^∞ 収束する部分列をもつことを示そう．

これを示すにはまず $\|A_{t_i}\|_{L_1^2}$, $\|g_{t_i}{}^*A_{t_i}\|_{L_1^2} \le C_{10}$ であるから g_{t_i} の L_2^2 ノルムは有界であることに注意する．したがって g_{t_i} は L_1^2 収束する部分列をもつ．一方 (3.3.1) の (2),(3) より

$$\begin{cases} d^*(g_{t_i}^{-1} dg_{t_i} - g_{t_i}^{-1} A_{t_i} g_{t_i}) = 0 \\ g_{t_i}^{-1} dg_{t_i}(\vec{n}(p)) = (g_{t_i}^{-1} A_{t_i} g_{t_i})(\vec{n}(p)) \end{cases}$$

となることを用いて主張 3.2.5 の証明と同様な議論をすれば g_{t_i} は C^∞ 収束することがわかる．(境界条件がついている分めんどうである．境界条件についての議論はサボル約束であった.) この極限を g_t とおく．g_t が (2),(3) を満たすことから，一意性よりこの極限 g_t は部分列 g_{t_i} によらない．したがって

$\lim_{s\to t}|g_s - g_t|_{C^k} = 0$ が成り立つ．

さて問題は極限 A_t, g_t が条件 (1) を満たすことである（(2),(3) は明らか）．(1) の不等号は $<$ だったからこれは自明ではない．この証明のために今まで準備をしてきている．$t_i \in T$ と $R = C$ より $||g_{t_i}{}^*A_{t_i}||_{L^2} \le \varepsilon R$ が従う．よって補題 3.3.4 より

$$||g_{t_i}{}^*A_{t_i}||_{L_1^2} \le C_9||F_{g_{t_i}{}^*A_{t_i}}||_{L^2} = \frac{C}{2}||F_{g_{t_i}{}^*A_{t_i}}||_{L^2}$$

よって $i \to \infty$ として

$$||g_t{}^*A||_{L_1^2} \le \frac{C}{2}||F_{g_t{}^*A_t}||_{L^2} < C||F_{g_t{}^*A_t}||_{L^2}$$

これで命題 3.3.3 の証明が終わり，したがって定理 3.3.1 の証明も終わった．

以上では A は C^∞ 級とした．一般の場合は定理の g が A を L_1^2 位相で連続に動かしたとき，それに伴い L_2^2 位相で連続に動くことをみればよい．これは T が開集合であることの証明からわかる．もう一つの注意は上の定数 C, ε が A によらないことである．　証明終わり

定理 3.3.2 の証明に移ろう．まず定理 3.3.1 を使い，そこでいう (2),(3) が成り立つようにする．簡単のため g^*A のことを A と書こう．さてまず定理 3.3.1 より

$$||A||_{L_1^2} \le C||F_A||_{L^2} \tag{3.3.9}$$

が分かっている．(3.3.9) と楕円型方程式

$$\begin{cases} d^*A = 0 \\ F_A^+ = 0 \end{cases} \tag{3.3.10}$$

を用いて A の（高階）微分のソボレフノルムを評価したい．この議論は§3.1 の線形の議論のまねであるが非線形項があるので注意を要する．(3.3.10) から導かれる式

$$\begin{cases} d^*A = 0 \\ d^+A = -P^+(A \wedge A) \end{cases}$$

から出発すると，ゴルディングの不等式（正確にはこれの境界がある場合）より

$$\|A\|_{L^2_{\ell+1}} \le C(\|P^+(A\wedge A)\|_{L^2_\ell} + \|A\|_{L^2_\ell}) \tag{3.3.11}$$

が得られる．

$P^+(A\wedge A)$ は2次式であるからソボレフの補題3.1.9より $\left(\ell-\frac{4}{2}\right)+\left(\ell+1-\frac{4}{2}\right) \ge \left(\ell-\frac{4}{2}\right)$ であるなら

$$\|P^+(A\wedge A)\|_{L^2_\ell} \le C\|A\|_{L^2_{\ell+1}}\|A\|_{L^2_\ell}$$

である．この仮定 $\left(\ell-\frac{4}{2}\right)+\left(\ell+1-\frac{4}{2}\right) \ge \left(\ell-\frac{4}{2}\right)$ は $\ell \ge 1$ なら満たされる．したがって (3.3.11) より

$$\|A\|_{L^2_{\ell+1}} \le C(\|A\|_{L^2_{\ell+1}}\|A\|_{L^2_\ell} + \|A\|_{L^2_\ell}) \tag{3.3.12}$$

が成り立つ．まず $\ell=1$ としよう．すると (3.3.10) より $\|A\|_{L^2_\ell} \le C\varepsilon$ ゆえ ε を小さく選んでおけば (3.3.12) より

$$(1-C\varepsilon)\|A\|_{L^2_2} \le C\|A\|_{L^2_1} \le C\|F_A\|_{L^2}$$

よって

$$\|A\|_{L^2_2} \le C\|F_A\|_{L^2}, \tag{3.3.13}$$

次にソボレフの不等式をもう一回使う．今度は $\left(\ell-\frac{4}{2}\right)+\left(\ell-\frac{4}{2}\right) \ge \left(\ell-\frac{4}{2}\right)$ を仮定すると

$$\|P^+(A\wedge A)\|_{L^2_\ell} \le C(\|A\|_{L^2_\ell})^2$$

が成り立つ．この仮定は $\ell \ge 2$ で満たされる．このとき (3.3.11) も使って

$$\begin{aligned} \|A\|_{L^2_{\ell+1}} &\le C(\|P^+(A\wedge A)\|_{L^2_\ell} + \|A\|_{L^2_\ell}) \\ &\le C((\|A\|_{L^2_\ell})^2 + \|A\|_{L^2_\ell}) \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

よって $\ell=2$ とおいて (3.3.13) より

$$\|A\|_{L^2_3} \le C\|A\|_{L^2_2} \le C\|F_A\|_{L^2}$$

これ以後は (3.3.14) を繰り返し用いれば

$$||A||_{L^2_{\ell+1}} \le C||A||_{L^2_\ell} \le C||F_A||_{L^2}$$

が得られる．定理 3.3.2 の証明は完成した．

これまで注意してこなかったが，定理 3.3.2 は L^1_2 級の ASD 接続に対して成立する．(ASD 方程式は L^1_2 級の接続に対して意味を持つ．) 特にクーロンゲージに移ると L^1_2 級の ASD 接続は C^∞ 級になる．

さて次に補題 2.4.3 の証明をしよう．我々はコンパクト多様体 M 上のある $SU(2)$ 束 ζ 上の ASD 接続の列 A_i を考えていた．示すべきなのは，部分列をとると， F_{A_i} のノルムの 2 乗である M 上の関数が，束 ζ' 上 ASD 接続 A_∞ の曲率のノルムの 2 乗に有限個の点でのデルタ測度の $\frac{1}{8\pi^2}$ かける整数倍を足したものになることであった．(より正確には補題 2.4.3 の (1),(2)) .

定理 2.4.1 より，必要なら A_i をゲージ変換で取り換えることにより，A_i は $M - \{p_1, \cdots, p_N\}$ で A_∞ に C^∞ 収束しているとしてよい．p_a の近傍 U_a をお互いに交わらないようにとる．

記号の節約のため U_a は多様体のある座標近傍であるとし，そしてそれをユークリッド空間の開集合 $D^4 = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid |x| < 1\}$ と同一視する．($p_a = 0$ となるように座標をとっておく．) $X_\ell = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid 2^{-\ell} < |x| < 2^{-\ell+1}\}$ とおく．A_∞ は D^4 上の接続に（ゲージ変換後）拡張されるから（定理 2.4.2）D^4 上 $||F_{A_\infty}||$ は有界である．この上界を C とする．各々の ℓ に対して $j(\ell)$ を $i > j(\ell), \ell' \le \ell$ ならば $\sup_{x \in X_{\ell'}} ||F_{A_i}|| < 2C$ となるように選ぶ．$j(\ell)$ は広義単調増大であるようにとることができる．これを使って，ℓ_i を $j(\ell_{i+1}) \ge i > j(\ell_i)$ となるように選べる．すると $\lim \ell_i = \infty$ で

$$\ell \le \ell_i \qquad \Rightarrow \qquad \sup_{x \in X_\ell} ||F_{A_i}|| < 2C \tag{3.3.15}$$

となる．さて $\varphi_i : D^4 \to D^4(= U_a), x \mapsto 2^{-\ell_i+1}x$ とおき φ_i による A_i の引き戻しを A'_i とおこう．(3.3.15) より A'_i の曲率は $X_1 = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid 2^{-1} < |x| < 1\}$ 上 0 に一様収束する．したがって定理 2.4.1 より X_1 上のゲージ変換の列 g'_i が

あって $(g_i')^*A_i'$ は C^∞ 収束する．この極限はもちろん曲率 0 であるが X_1 は単連結であるので（必要なら g_j' を取り換えて）この極限は 0 としてよい．

さて 4 次元球面 $S^4 \supset D^4$ を考え $S^4 - D^4(1/2)$ 上の自明なベクトル束と D^4 上の自明なベクトル束を g_j' ではり合わせたベクトル束 η_i を考えよう．(ここで $D^4(1/2) = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid |x| < 1/2\}$ である.）このベクトル束上に接続 ∇_i を

$$\nabla_i = \begin{cases} 0 & S^4 - D^4 \\ \chi(x)(g_i')^*A_i' & X_1 \\ A_i' & D^4(1/2) \end{cases}$$

で定義する．ここで $\chi(x)$ は $S^4 - D^4$ で 0, $D^4(1/2)$ で 1 である C^∞ 級関数である．また上の式で第 1 式と第 2 式では $S^4 - D^4(1/2)$ の座標系を使い，第 3 式では D^4 の座標系を使った．さて η_i は閉多様体のベクトル束であるから，第 2 チャーン数 $\int_{S^4} c^2(\nabla_i)$ は整数である．これを $n_{i,a}$ とおく.（a は今その近傍を考えている点 p_a の添字である.）

$(g_i')^*A_i'$ は X_1 上 0 に C^∞ 収束するから定義より

$$\left|\int_{S^4} c^2(\nabla_i) - \int_{D^4} c^2(A_i')\right| \to 0$$

一方§2.2 でも用いたように ASD 接続 A_i' に対しては

$$c^2(A_i') = \frac{1}{8\pi^2}||F_{A_i'}||^2 * 1$$

である．したがってこの二つの式より

$$\left|n_{i,a} - \frac{1}{8\pi^2}\int_{D^4} ||F_{A_i'}||^2 * 1\right| \to 0$$

これから $n_{i,a} \geq 0$ がわかる．(3.3.15) と上の式より，$\int_{D^4} ||F_{A_i'}||^2 * 1 = \int_{D^4(2^{-\ell_i})} ||F_{A_i}||^2 * 1$ に注意すると，U_a 上 $||F_{A_i}||^2$ が測度として $||F_{A_\infty}||^2 + \frac{n_{i,a}}{8\pi^2}\delta_{p_a}$ に収束することがわかる．補題の (2) もいままでの構成をよく考えると明らかである．$n_{i,a} \neq 0$ は (2.4.4) からでる．　証明終わり

§ 3.4　横断正則性

本節では今まで曖昧にしてきた横断正則性について述べる．横断正則性が用いられるのは，まず ASD 接続のモジュライ空間が多様体になることを示すところである．§3.2 で述べたのは AHS 複体の 2 次のコホモロジーが消える，すなわち $d_A^+ : \Gamma(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M)) \to \Gamma(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^2_+(M))$ が全射で，また A が既約ならば，その点の近くで ASD 接続のモジュライ空間は多様体である，ということであった．今までのところ d_A^+ がいつ全射になるかわからない．前に述べたのは generic にはそうなるという曖昧な主張であった．このことをもう少し正確に述べるのが本節の目標である．横断正則性の議論はかなり詳しく述べる．これはどちらかというと技術的な問題なのだが，いろいろなところで現れるデリケートな問題で，粗く考えていてどこか変になるのは横断正則性が絡む場合が多い．

しかし全体の概観が知りたい読者でこの節が煩雑に感じられたら，とりあえず飛ばして次の節に進んでもよい．

generic には d_A^+ が全射になることの証明には適当な摂動を用いる．この摂動には今までのところ 3 種類のやり方が知られている．

第 1 のものは抽象的に無限次元多様体の上のフレドホルム摂動を作るというものであって，これはドナルドソン (Donaldson) の論文 [D1] で使われた．この方法の長所は一番簡単であるという点である（この方法は後で少し述べる）．一方その欠点は抽象的であるので，たとえば多様体にさまざまな操作を施したとき，摂動の方をそれと整合的に変えることが困難であることである．すなわち，後に行うように我々は多様体を二つはり合わせたりする必要があるが，このときそれぞれの摂動からはり合わさった多様体の摂動を標準的に構成することは，摂動を抽象的に導入した場合困難である．

第 2 の方法は多様体のリーマン計量を動かすことである．これはフリード (Freed)，ウーレンベックの本 [FU] で導入された方法である．この方法の長所は，なんといっても摂動した後でも方程式が ASD 方程式である点である．(他の二つの方法をとると摂動後の方程式は ASD 方程式ではなく，何かよくわか

らない人工的な方程式になる.）したがってヤン–ミルズ場のトポロジーへの応用ではなく，ヤン–ミルズ場自身に興味を持っていればこの方法でなければならない．また方程式が自然であることからの利点もあり得る.（筆者はその具体例を知らないが単に筆者が不勉強なだけかもしれない.）この方法の欠点は第1にこれで十分な摂動であることを示すのが一番難しいことである．このことの証明は [FU] にある．第2に幾つかの場合（特に平坦接続が関わる場合），この摂動では十分でないことである．

第3の方法はドナルドソンが [D4] で導入したもので，閉曲線のホロノミーを用いて摂動を構成する．この方法の利点と欠点はちょうど第2の方法の逆である.（もっともこの方法とリーマン計量の方法のどちらが易しいかは趣味の問題であろう.）

以下，主に第3の方法に基づいて摂動を論ずる．§2.1 で述べたように ASD 接続のモジュライ空間は，接続全体の空間の上のあるベクトル束のある切断の零点集合と考えられた．関数空間を指定しながらこれを復習しよう．$\mathcal{B}_k(M,\zeta) = \mathcal{A}_k(M,\zeta)/\mathcal{G}_{k+1}(M,\zeta)$ であった.（ここでは何も書かなければ L^2_k とするので添字の2は省略する.）この上のベクトル束として $L^2_k(M; Ad\,\zeta\otimes\Lambda^2_+(M))\times_{\mathcal{G}_{k+1}(M,\zeta)} \mathcal{A}_k(M,\zeta)$（以後 $\mathcal{L}_k(Ad\,\zeta\otimes\Lambda^2_+(M))$ と書く）を考えよう．ASD 接続は $A\to F^+_A$ なる切断 F^+ の零点であった．ここではとりあえず何でもいいからこの切断の摂動の族を考える．そのためにバナッハ空間 B とベクトル束 $\mathcal{L}_k(Ad\,\zeta\otimes\Lambda^2_+(M))\times B\to\mathcal{B}_k(M,\zeta)\times B$ の切断 s で $\mathcal{B}_k(M,\zeta)\times\{0\}$ 上0になるものを考えよう．これに対して $b\in B$ をとり $(F^+ + s)^{-1}(0)\cap(\mathcal{B}_k(M,\zeta)\times\{b\})$ を $(F^+)^{-1}(0)$ の代わりに用いる．

ただし前にも注意した通り，勝手な切断 s を用いるわけにはいかない.（そうするとたとえば，$(F^+ + s)^{-1}(0)\cap(\mathcal{B}_k(M,\zeta)\times\{b\})$ の次元が b によって変わったりしてしまう．これを避けるには摂動がいつもコンパクトであるとすればよい．それはフレドホルム写像の指数がコンパクト作用素を足しても不変であるからである．一般のコンパクト摂動を考えてもよいが，ここではレリッヒの定理を念頭に置いて次のような条件を考えよう．$\mathcal{L}_k(Ad\,\zeta\otimes\Lambda^2_+(M))$ の部分ベクトル束 $L^2_{k+1}(M; Ad\,\zeta\otimes\Lambda^2_+(M))\times_{\mathcal{G}_{k+1}(M,\zeta)}\mathcal{A}_k(M,\zeta) = \mathcal{L}_{k+1}(M, Ad\,\zeta\otimes\Lambda^2_+(M))$ を考えよう．$\mathcal{L}_{k+1}(M, Ad\,\zeta\otimes\Lambda^2_+(M))\times B$ の切断 s をとって $F^+ + s$ の形の

$\mathcal{L}_k(Ad\,\zeta\otimes\Lambda^2_+(M))$ の切断を考えることにする．これに対して 3.2 節と同様にして次のことが成り立つ．

定理 2.2.2 改　$b\in B$, $A\in\mathcal{A}_k(M,\zeta)$ を既約接続とする．$[A]\in\mathcal{B}_k(M,\zeta)$ で $[A]\mapsto(F^++s)([A],b)$ の微分が全射ならば，$(F^++s)^{-1}(0)\cap(\mathcal{B}_k(M,\zeta)\times\{b\})$ は $[A]$ の近傍で多様体である．

それでは generic な $b\in B$ に対して $(F^++s)^{-1}(0)\cap(\mathcal{B}_k(M,\zeta)\times\{b\})$ で $[A]\mapsto(F^++s)([A],b)$ の微分が全射になる条件は何であろうか．この条件は次のようにして与えられる．稠密な開集合の可算個の交わりのことをベール (Baire) 集合といった．これはベールのカテゴリー定理（たとえば [伊藤黒] §2.1 参照）により稠密である．

補題 3.4.1　任意の $([A],b)\in\mathcal{B}_k(M,\zeta)\times B$ に対して写像 $d^+_A+(ds):L^2_{k+1}(M;Ad\,\zeta\otimes\Lambda^1(M))\oplus T_bB\to L^2_k(M;Ad\,\zeta\otimes\Lambda^2_+(M))$ が全射とする．このとき b が B のあるベール集合に含まれていれば $[A]\mapsto(F^++s)([A],b)$ の微分は任意の $A\in\mathcal{A}_k(M,\zeta)$, $(F^++s)([A],b)=0$ に対して全射である．

証明　まず $[A]\mapsto(F^++s)([A],b)$ の微分が全射という条件を書き換えよう．仮定より（陰関数の定理を使うと）$\{([A],b)\in\mathcal{B}_k(M,\zeta)\times B\mid(F^++s)([A],b)=0\}$ は無限次元バナッハ多様体である．これを $\mathcal{M}B$ とおこう．写像 $\pi:\mathcal{M}B\to B$ が存在する．

補助補題 3.4.2　$([A_0],b)\in\mathcal{M}B$ で$\pi:\mathcal{M}B\to B$ の微分の余核と，$[A]\mapsto(F^++s)([A],b)$ の微分の $[A_0]$ での余核は同型である．

証明　$[A]\mapsto(F^++s)([A],b)$ の微分すなわち $T_{([A_0],b)}(\mathcal{B}_k(M,\zeta)\times B)=T_{[A_0]}\mathcal{B}_k(M,\zeta)\oplus T_bB$ からの準同型 $J(F^++s)$ を考える．これは全射で，この核が $T_{([A_0],b)}\mathcal{M}B$ である．$\pi:\mathcal{M}B\to B$ の微分は，第 2 成分への射影 $T_{([A_0],b)}(\mathcal{B}_k(M,\zeta)\times B)=T_{[A_0]}\mathcal{B}_k(M,\zeta)\oplus T_bB\to T_bB$ の $T_{([A_0],b)}\mathcal{M}B$ への制限である．したがっ

て線形代数の次の主張から補助補題 3.4.2 は直ちに得られる．

主張 3.4.3 $E = E_1 \oplus E_2$ を線形空間，$P : E \to F$ を線形写像とし，P は全射とする．このとき P の E_1 への制限の余核と，Ker P から E_2 への射影の余核は同型である．

主張の証明は練習問題とする．

補助補題より，B のあるベール集合に含まれている元 b の逆像 $\pi^{-1}(b) \subseteq \mathcal{M}B$ 上 $\pi : \mathcal{M}B \to B$ の微分が全射であることを示せばよい．これは有限次元では次のサード (Sard) の定理である．$\pi : X \to Y$ を多様体の間の C^∞ 級写像とする．$\pi^{-1}(y)$ 上の任意の点での π の 微分が全射であるような Y の点 y を正則値 (regular value) という．

サードの定理 正則値全体はベール集合である．

証明はしない．文献に上げた多様体および微分位相幾何学の教科書を見て欲しい．ただ何を言っているのか図 3.4.1 で解説しよう．$\pi^{-1}(y)$ 上の任意の点での π の微分が全射であるという条件は，陰関数の定理により $\pi^{-1}(y)$ が部分多様体であると言い換えられる．図 3.4.1 で考えると，この場合は 1 次元の集合 C の補集合は正則値である．この場合 X は 2 次元であるから $X - C$ はベール集合である．一般の場合には写像 $\pi : X \to Y$ の 1 点の逆像はコンパクトではないから，このような C の可算無限個の和の補集合が正則値でない可能性がある．これがベール集合という概念を使った理由である．

ここで考えている多様体は無限次元であるので，サードの定理を直接使うことはできない．今の場合は $\pi : \mathcal{M}B \to B$ がフレドホルム写像（微分がフレドホルム作用素である写像）であることより，スメイル (Smale) による無限次元のサードの定理（[Sm]）が使えるのであるが，無限次元サードの定理はあまり一般的でないので直接証明してみよう．

$b_0 \in B$ をとる．この十分小さい近傍 V 上に，$\pi^{-1}(b) \subseteq \mathcal{M}B$ 上 $\pi : \mathcal{M}B \to B$ の微分が全射であるような b を探そう．まず ASD 方程式のゲージ変換を除いた

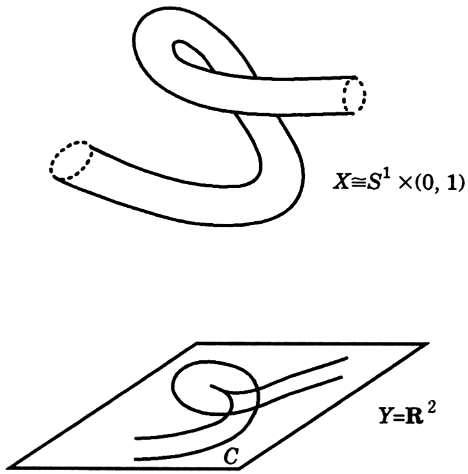


図 3.4.1

楕円性より，$\pi^{-1}(b_0)$ はパラコンパクトである．つまり可算個のコンパクト集合でおおわれる．(これを前節の定理 3.3.2 から示すことは練習問題とする.) したがって $x \in \pi^{-1}(b_0)$ に対してその近傍 U_x で$\pi^{-1}(b) \cap U_x \subseteq \mathcal{M}B$ 上$\pi : \mathcal{M}B \to B$ の微分が全射であるような b が V の中でベール集合であることを示せばよい．

ところで $\pi : \mathcal{M}B \to B$ の x での微分の余核は有限次元である．これは補助補題 3.4.2 から次のようにして示される．すなわち $d_A^+ : L_{k+1}^2(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M)) \to L_k^2(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda_+^2(M))$ を考える．これはいつも全射とは限らないが，その表象は全射である．あるいは $d_A^+ \oplus d_A^* : L_{k+1}^2(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M)) \to L_k^2(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda_+^2(M)) \oplus L_{k+1}^2(M; Ad\,\zeta)$ についてはこれの表象は同型である．(つまり $d_A^+ \oplus d_A^*$ は楕円型である.) したがって d_A^+ の余核は有限次元である．$(F^+ + s)$ の微分は $d_A^+ \oplus d_A^*$ とコンパクト作用素の分しか変わらないからやはり余核は有限次元である．$\pi : \mathcal{M}B \to B$ の x での微分の余核はこれと同型であったから有限次元である．

したがって $B = B_1 \oplus B_2$ なる分解で次の性質をもつものが存在する．$y \mapsto \pi(y) - \pi(x)$ なる写像: $\mathcal{M}B \to B$ を (g_1, g_2) と分解すれば，g_1 の x での微分は

全射で，B_2 は有限次元である．したがって任意の 0 に近い $b_1 \in B_1$ に対して ${g_1}^{-1}(b_1)$ は x の近傍で $\mathcal{M}B$ の部分多様体であるが，これは有限次元である．よって写像 g_2 の ${g_1}^{-1}(b_1)$ への制限にサードの定理が適用できる．すなわち 0 の近傍のほとんどすべての $(b_1, b_2) \in B_1 \oplus B_2$ に対して，$(b_1, b_2) + \pi(x) = b$ とおくと$\pi^{-1}(b) \subseteq \mathcal{M}B$ 上$\pi : \mathcal{M}B \to B$ の微分が全射である．(以上の議論は少々粗い．たとえば「各々の $b_1 \in B_1$ に対してほとんどすべての $b_2 \in B_2$ 」と「ほとんどすべての $(b_1, b_2) \in B_1 \oplus B_2$」の違いや，$V_b$ をどのくらい小さくとるかなど，もう少し詳しく議論すべきであろう．それは省略する.)　　証明終わり

さて補題 3.4.1 の条件を満たす摂動の族を作ってみよう．まず摂動をとる前の $d_A^+ : L^2_{k+1}(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M)) \to L^2_k(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^2_+(M))$ を考えよう．補題 3.4.1 の中でも使ったようにこれの余核は有限次元でまた C^∞ 級の元からなる．このことを使えば第 1 の方法（抽象的な摂動）で，補題 3.4.1 の条件を満たす摂動の族を作ることができる．すなわち単に B を $L^2_{k+1}(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^2_+(M))$ の C^ℓ 級の切断全体とすればよい．(ℓ は十分大きい数で一つとって固定する．C^∞ 級としないのはバナッハ空間にしたいせいである.) これで十分なことの証明は易しいので読者に任せる．

さて次にもう少し具体的な第 3 の方法による摂動について述べよう．この方法の基本的なアイディアは無限次元多様体 $\mathcal{B}(M, \zeta)$ をホロノミーを用いて有限次元の空間で近似することである．

まず $\ell_i : S^1 \to M$ なる閉曲線たちで $\ell_i(1) = p_0$ なるものを考える．($p_0 \in M$ は基点．一つとって固定する.) $A \in \mathcal{A}(M, \zeta)$ に対してホロノミーにより $Hol_{\ell_i}(A) \in Hom(\zeta_{p_0}, \zeta_{p_0})$ が決まる．ファイバー ζ_{p_0} の正規直交基を適当に決めておけばこれは $SU(2)$ の元とみなすことができる．$Hol_{\ell_i}(A) \in Hom(\zeta_{p_0}, \zeta_{p_0})$ を$\vec{\ell} = (\ell_1, \cdots, \ell_K)$ に対して並べることで $\mathcal{A}(M, \zeta) \to SU(2)^K$ なる写像ができる．$SU(2)^K$ を $g \cdot (g_1, \cdots, g_K) = (g^{-1} g_1 g, \cdots, g^{-1} g_K g)$ なる $SU(2)$ の作用で割った商空間 $SU(2)^K / SU(2)$ で置き換えれば，写像 $Hol_{\vec{\ell}} : \mathcal{B}(M, \zeta) \to SU(2)^K / SU(2)$ が得られる．(この写像は ζ_{p_0} の基底の取り方によらない.) 次のことが容易に確かめられる（証明は省略する）．

補題 3.4.4　任意の $\mathcal{B}(M,\zeta)$ の有限次元コンパクト部分多様体 Z に対して K を十分大きく選ぶと，$Hol_{\vec{\ell}}:\mathcal{B}(M,\zeta)\to SU(2)^K/SU(2)$ が Z 上埋め込みになるような $\vec{\ell}=(\ell_1,\cdots,\ell_K)$ が存在する．

前に述べたように，ASD 方程式は (ゲージ変換群で割って考えれば) 楕円型であるから，横断正則性の破れるのは有限次元分である．したがって $SU(2)^K/SU(2)$ で $\mathcal{B}(M,\zeta)$ を近似することで横断正則性を実現できることが期待できる．

このことを正確に述べる前に，少し写像 $Hol_{\vec{\ell}}:\mathcal{B}(M,\zeta)\to SU(2)^K/SU(2)$ を取り換える．これが必要なのは有限本の閉曲線の上のホロノミーから作られた写像だと，$Hol_{\vec{\ell}}:\mathcal{B}_k(M,\zeta)\to SU(2)^K/SU(2)$ をバナッハ多様体の間の写像と見たとき，微分可能でないからである．

そこで次のようにしてこれを滑らかに均す．まず $p_0\in M$ が与えられていたわけだが，$I_0:D^3\to M$ なる埋め込みで $I_0(0,0,0)=p_0$ なるものを決めておく．次に $\ell_i:S^1\to M$ を $\ell_i:S^1\times D^3\to M$ で $\ell_i|_{\{1\}\times D^3}=I_0$ なるものに拡張する（記号は同じものを使う）．次に $A\in\mathcal{A}(M,\zeta)$ に対して $I_0:D^3\to M$ の像でのベクトル束 ζ の座標（自明化）を決める．これは p_0 での自明化（基底）を決めておいて，$I_0:D^3\to M$ の像上の切断を $\frac{\partial}{\partial r}$ 方向の共変微分が 0 になり p_0 で決めておいた基底と一致するようにとればよい．($\frac{\partial}{\partial r}$ は D^3 の半径方向の単位ベクトル.）最後に χ なる D^3 上のコンパクト台の C^∞ 級の非負関数を D^3 上での積分が 1 になるようにとっておく．

これを使って $Hol'_i:\mathcal{A}(M,\zeta)\to SU(2)$ を次のように定める．まず

$$Hol'_i(A)=\int_{D^3}\chi(x)Hol_{\ell_i(\cdot,x)}(A)dx$$

とおく．ここで $Hol_{\ell_i(\cdot,x)}(A)$ は道 $t\to\ell_i(t,x)$ に沿ってのホロノミーで $End(\zeta_{I_0(x)},\zeta_{I_0(x)})$ の元であるが，ζ の座標を用いて $End(\zeta_{p_0},\zeta_{p_0})$ の元とみなす．$Hol'_i(A)$ の像は（χ で足し合わせてしまったから）$SU(2)$ には入らない．しかし $\mathcal{B}_k(M,\zeta)$ の任意のコンパクト集合をとると，$\ell_i:S^1\times D^3\to M$ （および $I_0:D^3\to M$）を D^3 方向でほとんど定値写像にすることで $Hol'_i(A)$ の像が $SU(2)$ に十分近いと考えることができる．そこで $Hol'_i(A)$ とレトラクション（$End(\zeta_{p_0},\zeta_{p_0})$ での $SU(2)$ の近傍から $SU(2)$ への写像であって $SU(2)$ 上

恒等写像であるもの）の合成として Hol_i を定める．

$Hol_{\ell_i(\cdot,x)}$ のかわりに Hol_iを使って $Hol_{\vec{\ell}}: \mathcal{B}_k(M,\zeta) \to SU(2)^K/SU(2)$ を決めるとこれが C^∞ 級であることが確かめられる．また補題 3.4.4 も同様に成立する．

さてこれを用いて摂動を構成しよう．このとき大切なのは $[A] \in \mathcal{B}_k(M,\zeta)$ での摂動が $Hol_{\vec{\ell}}([A])$ にのみよること，また摂動の値がある小さな開集合（ここでは p_0 の小近傍をとる）に台 (support) を持つことである．

これが可能である根拠は次の補題である．

補題 3.4.5　任意の開集合に $U \subseteq M$ 対して $d_A^+ : L_{k+1}^2(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M)) \to L_k^2(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda_2^+(M))$ の余核 CoKer d_A^+ 上制限写像 $L_k^2(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda_2^+(M)) \to L_k^2(U; Ad\,\zeta \otimes \Lambda_2^+(M))$ は単射である．

もし A （およびリーマン多様体 M）が実解析的ならば CoKer d_A^+ の元は実解析的であることが示せるので（楕円型方程式の解の実解析性）補題は直ちに従う．一般の場合の証明はかなりデリケートであるので省略する（[Ar]）．

さてこの補題を念頭に置いて，p_0 の小近傍 U をとろう．U は D^4 と可微分同相とし写像を決めておく．摂動のパラメーターとして D^4 上の自己双対 2 型式の集合をとりたい．これをするには関数空間を設定する必要がある．適当な L_k^p をとってもよいのだが，できたら C^∞ 級 2 型式で摂動したい．(こうすることで摂動後の方程式の解が C^∞ 級になる.）そのための一つの問題点は $C^\infty(\cdot)$ がバナッハ空間にはならないことである．(これはフレシェ(Fréchet) 空間でその上の関数解析は少しだけバナッハ空間より複雑である．(たとえば陰関数定理は成り立たない.)）この問題はどちらかというと技術的なものであるが，フレアー (Floer) はこのために C^∞ 級関数の空間の中にうまいバナッハ空間をとるというアイデアをだした．これを少し説明しよう．0 に収束する正の数からなる数列$\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \cdots)$ をとり C^∞ 級関数 f に対して

$$||f||_{\vec{\beta}} = \sum_i \beta_i \cdot \sup |\nabla^i f|$$

とおく．むろん右辺が収束するとは限らない．これが収束するときこの f は

$C^{\vec\beta}$ に含まれるとし，このとき上の式で f のノルムを定める．$C^{\vec\beta}$ がバナッハ空間になることは容易にわかる．次の補題の証明は省略する．

補題 3.4.6　β_i が十分早く0に収束するように $\vec\beta$ を選ぶと $C^{\vec\beta}$ は任意の L^p_k で稠密である．

この補題によって，$C^{\vec\beta}$ を C^∞ 級関数の空間のかわりに用いることができる．$C^{\vec\beta}$ はベクトル束の切断の空間に対しても定義できる．

さて $\Gamma(D^4; su(2)\otimes\Lambda^2_+)$ の元で $C^{\vec\beta}$ 級かつ $D^4(1/2)$ の外で0であるもの全体を Y と表す．$u\in Y$, $A\in\mathcal{A}_k(M,\zeta)$ に対して $J(u,A)\in\Gamma(M; Ad\,\zeta\otimes\Lambda^2_+(M))$ を定義しよう．(以下の定義が少しごたついて見えるのはゲージ変換不変になるように $U=D^4$ 上の $Ad\,\zeta\otimes\Lambda^2_+(M)$ の自明化を具体的にとっているからである.)

まず p_0 での $Ad\,\zeta$ の基底を決めておく．$Y\cong(C^{\vec\beta}(D^4,D^4(1/2)))^9$ なる標準同型が存在する．($C^{\vec\beta}(D^4,D^4(1/2))$ は $D^4(1/2)$ の外で0である $C^{\vec\beta}$ 級関数全体で，9は $Ad\,\zeta\otimes\Lambda^2_+(M)$ のファイバーの次元.) 一方 p_0 での $Ad\,\zeta\otimes\Lambda^2_+(M)$ のファイバーの基底が決まっているから，この基底を $\frac{\partial}{\partial r}$ 方向の接続 A についての共変微分が0になるように平行移動することで $U=D^4$ 上の各点で $Ad\,\zeta\otimes\Lambda^2_+(M)$ の基底が決まる．これを使えば $Y\cong(C^{\vec\beta}(D^4,D^4(1/2)))^9$ の元 u に対して $Ad\,\zeta\otimes\Lambda^2_+(M)$ の $U=D^4$ での切断で境界の近傍で0になるものができる．これを0で拡張して $Ad\,\zeta\otimes\Lambda^2_+(M)$ の M での切断 $J(u,A)\in\Gamma(M;Ad\,\zeta\otimes\Lambda^2_+(M))$ が決まる．

さて $Y\cong(C^{\vec\beta}(D^4,D^4(1/2)))^9=C^{\vec\beta}(D^4,D^4(1/2))\otimes Ad\,\zeta_{p_0}\otimes\Lambda^2_{+p_0}$ とみなせば，$SU(2)$ が Y 上に作用する ($Ad\,\zeta_{p_0}$ 上の作用により導かれる)．$C^{\vec\beta}(SU(2)^K, Y)$ で $SU(2)^K$ から Y への $C^{\vec\beta}$ 級写像全体とし，$C^{\vec\beta}(SU(2)^K,Y)$ の元で $SU(2)$ の作用を保つもの全体を B とおく．

$\mathcal{B}_k(M,\zeta)\times B$ 上の $(L^2_{k+1}(M;Ad\,\zeta\otimes\Lambda^2_+(M))\times_{\mathcal{G}_{k+1}(M,\zeta)}\mathcal{A}_k(M,\zeta))\times B$ の切断を $(A,\psi)\mapsto J(\psi(Hol_{\vec\ell}(A)),A)$ で定めこれを s とおく．(作り方から $(A,\psi)\mapsto J(\psi(Hol_{\vec\ell}(A)),A)$ は $SU(2)$ の作用を保つからこの定義は正当である．たとえば Y そのものを B ととったりすると，ここで必要なゲージ不変性

が満たされない.）この切断の大事な性質は，それがホロノミーをとるのに使った閉曲線の近傍および U での接続の様子でのみ決まり，また切断の値は U に台を持つことである．この性質は幾つかの応用で必要になる．

次の補題はこれで十分な摂動を与えることを主張している．

補題 3.4.7　$[A] \in \mathcal{B}_k(M,\zeta)$ とし，$Hol_{\vec{\ell}}(A) \in SU(2)^K$ の $SU(2)$ による作用の等方部分群が $\{\pm 1\}$ だけであるとする．このとき $d_A^+ + (ds) : L^2_{k+1}(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M)) \oplus T_b B \to L^2_k(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^2_+(M))$ は全射である．

証明　まず d_A^+ の余核は有限次元であったから，$d_A^+ + (ds)$ の像は閉集合である．$d_A^+ + (ds)$ の像の直交補空間（L^2 ノルムでの）を H とおく．H は C^∞ 級関数からなる．$u \in H$ としよう．u が 0 でないとして矛盾を導く．

補題 3.4.5 より u の $D^4(1/2)$ への制限は 0 ではない.（ここで U（p_0 の近傍）を D^4 と同一視していた.）Y は $D^4(1/2)$ 上の L^2 切断全体の中で稠密だったから（補題 3.4.6），Y の元 y を u との内積が 0 でないようにとれる．$Hol_{\vec{\ell}}(A)$ で $SU(2)$ の等方部分群は自明 ($\{\pm 1\}$) だったから B の元で $Hol_{\vec{\ell}}(A)$ での値が y であるものがとれる．この元の ds による像（ここでは B とその接空間を同一視する）は u と直交しない．これは矛盾である．　　証明終わり

補題 3.4.7 を使うと，$\mathcal{M}(M,\zeta)$ の既約接続からなる任意のコンパクト集合に対して，その近くで方程式を摂動して定理 2.2.2 改（この節の 3 ページ目）の仮定が満たされるようにすることができる.（なぜなら十分大きい K をとり摂動に使うループをうまく選べば，このコンパクト集合の像では $Hol_{\vec{\ell}}(A) \in SU(2)^K$ の $SU(2)$ による作用の等方部分群が $\{\pm 1\}$ だけであるようにとることができるからである.（ここで補題 3.4.4 を用いる.)）モジュライ空間の無限遠方でうまく摂動ができることを示すにはバブルに関することを用いるので後で注意する．

次に可約接続 A の近傍での摂動について述べよう．この場合の問題点は上で述べた補題 3.4.7 の証明にすでに現れている．すなわちこの場合には等方部分群を $I_A = \{g \in \mathcal{G}(M,\zeta) \mid g^*A = A\} \subseteq SU(2)$ とおくと，Y の I_A 不変な元し

か B の元の $Hol_{\tilde{\ell}}(A)$ での値にはなりえない．それでこの場合は一般には補題 3.4.1 の仮定は必ずしも満たされない．しかし $F^+ + s|_{\mathcal{B}_k(M,\zeta)\times\{b\}}$ の $([A], b)$ での微分が全射になるような摂動 b はやはり存在する．これを証明しよう．AHS 複体から決まる楕円型作用素

$$d_A^+ + d_A^* : \Gamma(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1(M)) \to \Gamma(M; Ad\,\zeta \otimes \Lambda_+^2(M)) \oplus \Gamma(M; Ad\,\zeta)$$

を考える．もし接続 A が可約であるとその等方部分群 I_A はその核および余核に作用する．したがってこのときは指数 $\mathrm{Index}(d_A^+ + d_A^*)$ は単なる数というより I_A の表現の作る K群 $R(I_A)$ の元とみなすべきである．この元を調べよう．まず $I_A = U(1)$ とする．

補題 3.4.8　$\mathrm{Index}(d_A^+ + d_A^*) = \mathbf{R}^{m_1} + \mathbf{C}^{m_2}$ でかつ $m_1 = b_1 - 1 - b_2^+$, $m_2 = 4k + (b_1 - 1 - b_2^+)$．ここで $\mathbf{C}$ 上 $I_A = U(1)$ は 1×1 行列として作用し，$\mathbf{R}$ への $I_A = U(1)$ の作用は自明．

証明　可約接続 A によって ζ は二つの複素直線束の和 $\zeta = L \oplus L^*$ に分解する．これに従い $Ad\,\zeta$ も $L^{\otimes 2} \oplus \mathbf{R}$ と分解する．これに伴い $d_A^+ \oplus d_A^*$ も分解する．$L^{\otimes 2}$ に対応する方の指数が m_2で，$\mathbf{R}$ に対応する方の指数が m_1 である．これは $I_A = U(1)$ が $L^{\otimes 2}$ のファイバー上 1×1 行列として作用し，$\mathbf{R}$ へは自明に作用することからわかる（§1.3 参照）．$m_1 + 2m_2$ はすでに述べたように $8k + 3(b_1 - 1 - b_2^+)$ である．一方 m_1 の方は自明束（接続も込めて）$\mathbf{R}$ を係数とする $d^* \oplus d^+ : \Gamma(M; \Lambda^1) \to \Gamma(M; \Lambda^0) \oplus \Gamma(M; \Lambda_+^2)$ の指数である．これはコホモロジー自身が直ちにわかる．すなわち $\mathrm{Ker}\,(d^* \oplus d^+) = H^1(X; \mathbf{R})$, $\mathrm{CoKer}\,(d^* \oplus d^+) = H^0(X; \mathbf{R}) \oplus H_+^2(X; \mathbf{R})$．よって $m_1 = b_1 - 1 - b_2^+$．したがって $m_2 = 4k + (b_1 - 1 - b_2^+)$．　証明終わり

ここで考えているのは ASD 接続が存在する場合だけであったから，$k \geq 0$ としてよい．これから補題 3.4.8 により $m_1 \geq 0 \Rightarrow m_2 \geq 0$ がわかる．次の補題によりこのことは**大体** $m_2 \geq 0$ の場合だけ考えればよいことがわかる．

補題 3.4.9 $b_2^+ > 0$ とすると B のあるベール集合に含まれる b に対して，$(F^+ + s)^{-1}(0) \cap (\mathcal{B}(M,\zeta) \times \{b\})$ には $I_A = U(1)$ なる可約接続は存在しない．

証明 この補題の結論はすでに§2.2 で述べた．証明はまず $b_1 = 0$ の場合に行う．このときは $b_2^+ > 0$ ゆえ $m_1 < -1$ である．補題の証明にはこれまで既約 $SU(2)$ 接続に対して行ってきた議論を既約 $U(1)$ 接続に対して行う．$-c^1(L)^2 = c^2(\zeta)$ なる複素直線束 L の同型類は可算無限個しかなくベール集合の可算無限個の交わりはベール集合であるから，ベールのカテゴリー定理により次のことを各々の L に対して証明すればよい．

B のあるベール集合に含まれる b に対して，L に対応する可約接続で $(F^+ + s)^{-1}(0) \cap (\mathcal{B}(M,\zeta) \times \{b\})$ の元であるものはない．

このことを証明するために L の接続の集合 $\mathcal{B}(M,L)$ を考えよう．より正確には，$\mathcal{B}(M,L) = \mathcal{A}(M,L)/\mathcal{G}(M,L)$, すなわち L の $U(1)$ 全体の集合 $\mathcal{A}(M,L)$ のゲージ変換群 $\mathcal{G}(M,L)$ による商空間である．ここでは構造群が可換群 $U(1)$ であるので，$\mathcal{G}(M,L)$ は M から $U(1)$ への写像の全体と一致し，その $\mathcal{A}(M,L)$ への作用は

$$g^*A = g^{-1}dg + A$$

に一致する．$\mathcal{B}(M,L)$ の元はζ の可約接続とみなせるから写像 $\mathcal{B}(M,L) \to \mathcal{B}(M,\zeta)$ が存在する．

摂動の集合の $U(1)$ に対するアナロジーを作ろう．まず $Y \cong (C^{\vec{\beta}}(D^4, D^4(1/2)))$ $\otimes su(1) \otimes \Lambda_2^+(\mathbf{R}^4)$ の部分集合 $Y_{\mathbf{R}} \cong (C^{\vec{\beta}}(D^4, D^4(1/2))) \otimes u(1) \otimes \Lambda_2^+(\mathbf{R}^4)$ をとる．またホロノミーから定まる写像 $Hol_{\vec{\ell}} : \mathcal{B}(M,\zeta) \to SU(2)^K/SU(2)$ で $\mathcal{B}(M,L) \subseteq \mathcal{B}(M,\zeta)$ を移すと，これは $U(1)^K$ の同値類にあたる部分集合に一致する．（どの $U(1) \subseteq SU(2)$ に対応するかは L によって異なる．）この集合を X と書こう．B は $SU(2)^K/SU(2)$ から Y への $SU(2)$ 不変な写像の集合であったから，X から $Y_{\mathbf{R}}$ への写像（この全体を $B_{\mathbf{R}}$ と書こう）は必ず B の元に拡張される．

$\mathcal{B}(M,\zeta)\times B_{\mathbf{R}}$ 上の $(L^2_{k+1}(M;\Lambda^2_+(M))\times_{\mathcal{G}_{k+1}(M,L)}\mathcal{A}_k(M,L))\times B_{\mathbf{R}}$ の切断 s が $SU(2)$ のときと同様にして定義できる．(ただしこの場合はベクトル束 $(L^2_{k+1}(M;\Lambda^2_+(M))\times_{\mathcal{G}_{k+1}(M,L)}\mathcal{A}_k(M,L))\times B_{\mathbf{R}}$ は実は自明である.)

さて $A\in\mathcal{B}(M,L)$ に対して作用素 $d^*_A\oplus d^+_A:\Gamma(M;\Lambda^1(M))\to\Gamma(M;\Lambda^0(M))\oplus\Gamma(M;\Lambda^2_+(M))$ を考えよう.(ここで $\Lambda^i(M)$ と書いたのは本来は $Ad\,L\otimes\Lambda^i(M)$ または $u(1)\otimes\Lambda^i(M)$ と書くべきであろう．しかし $U(1)$ は可換であるから $Ad\,L$ は接続も込めて自明である．だから実は $d^*_A+d^+_A$ は $A\in\mathcal{B}(M,L)$ によらない.) 補題3.4.7と同じようにして，$A\in\mathcal{B}(M,L)$ が $U(1)$ 接続としては既約であるとすると，$d^+_A+(ds):L^2_{k+1}(M;\Lambda^1(M))\oplus T_bB\to L^2_k(M;\Lambda^2_+(M))$ が全射であることが示せる．このことから補題3.4.1により，b が $B_{\mathbf{R}}$ のあるベール集合に含まれていれば $[A]\mapsto(F^++s)([A],b)$ の微分は任意の既約な $A\in\mathcal{A}_k(M,L)$, $(F^++s)([A],b)=0$ に対して全射である．$[A]\mapsto(F^++s)([A],b)$ の微分は $d^+_A:\mathrm{Ker}\,d^*_A\to\Gamma(M;\Lambda^2_+(M))$ と s の微分の和で s の微分はコンパクト作用素である．これが決して全射にはならないことを示そう．

$d^*_A\oplus d^+_A:\Gamma(M;\Lambda^1(M))\to\Gamma(M;\Lambda^0(M))\oplus\Gamma(M;\Lambda^2_+(M))$ の指数は m_1 である．ところで $\mathrm{CoKer}\,(d^*_A:\Gamma(M;\Lambda^1(M))\to\Gamma(M;\Lambda^0(M)))$ は1次元であるから，仮定より $\dim(\mathrm{Ker}\,(d^+_A:\mathrm{Ker}\,d^*_A\to\Gamma(M;\Lambda^2_+(M))))-\dim(\mathrm{CoKer}\,(d^+_A:\mathrm{Ker}\,d^*_A\to\Gamma(M;\Lambda^2_+(M))))$ は $m_1+1<0$ である．したがって指数のコンパクト作用素による摂動に関する不変性より $[A]\mapsto(F^++s)([A],b)$ の微分は決して全射にはなることはない．

よって b が $B_{\mathbf{R}}$ のあるベール集合に含まれていれば既約な $A\in\mathcal{A}_k(M,L)$ で $(F^++s)([A],b)=0$ なるものは存在しない．

$B_{\mathbf{R}}$ の元が常に B の元に拡張されるのであったから，これで補題は $b_1=0$ の場合は証明された．

$b_1>0$ の場合を考えよう．$\mathcal{H}^1(M)$ で調和1型式全体を表す．$\mathcal{A}_k(M,L)=\mathcal{A}'_k(M,L)\oplus\mathcal{H}^1(M)$ と直交直和分解する．ところで $H^1(M;\mathbf{Z})=Hom(\pi_1(M),\mathbf{Z})$ であるが，これは M から $S^1=U(1)$ への写像のホモトピー類に1対1に対応する．すなわちゲージ変換群 $\mathcal{G}_k(M,L)$ の単位元を含む連結成分を $\mathcal{G}_{k,0}(M,L)$ と書くと，$H^1(M;\mathbf{Z})\cong\mathcal{G}_k(M,L)/\mathcal{G}_{k,0}(M,L)$ である．

一方 $\mathcal{G}_{k,0}(M,L)$ の元 g は実数値関数 f を用いて $g=e^{2\pi\sqrt{-1}f}$ と表せ，その

とき

$$g^*A = 2\pi\sqrt{-1}df + A$$

である．したがって$\widetilde{\mathcal{B}}_k(M,L) = \mathcal{A}_k(M,L)/\mathcal{G}_{k+1,0}(M,L)$ は CoKer $d : L^2_{k+1}(M;\mathbf{R}) \to L^2_k(M;\Lambda^1(M))$ と一致する．よって調和積分論（定理 0.3.4）より $\widetilde{\mathcal{B}}_k(M,L) = \mathcal{A}_k(M,L)/\mathcal{G}_{k+1,0}(M,L) = \mathrm{Im}\ d^* \oplus \mathcal{H}^1(M)$．ここで $d^* : L^2_{k+1}(M;\Lambda^2(M)) \to L^2_k(M;\Lambda^1(M))$.

次に $\mathcal{G}_k(M,L)$ の作用で $\mathcal{H}^1(M)$ が保たれることに注意する．これをみるには $g \in \mathcal{G}_k(M,L)$ に対して$\pi(g^{-1}dg) \in \mathcal{H}^1(M)$ を示せばよいが $(\pi : L^2_k(M;\Lambda^1(M)) \to \mathrm{CoKer}\ d$ は直交射影)，これは $d(g^{-1}dg) = 0$ より明らか．

したがって$\widetilde{\mathcal{B}}_k(M,L) = \mathcal{A}_k(M,L)/\mathcal{G}_{k+1,0}(M,L) = \mathrm{Im}\ d^* \oplus \mathcal{H}^1(M)$ ゆえ，

$$\mathcal{B}_k(M,L) = \mathcal{A}_k(M,L)/\mathcal{G}_{k+1}(M,L) = \mathrm{Im}\ d^* \times \frac{\mathcal{H}^1(M)}{H^1(M;\mathbf{Z})}$$

となる．この直積分解に関して ASD 方程式は $\mathcal{H}^1(M)/H^1(M;\mathbf{Z})$ 成分不変である．(より正確には第 1 成分 $= 0$ が ASD 方程式)．そこで摂動も $\mathcal{H}^1(M)/H^1(M;\mathbf{Z})$ 成分によらないようにとる．すると $b_1 = 0$ の場合と同じ議論ができるが，指数を計算するときちょうど $\mathcal{H}^1(M)$ の次元 b_1 分だけ小さくなる．したがって，$b_1 = 0$ の場合と同じ証明が通用し，可約接続はすべて摂動で除くことができる．　証明終わり

補題より「大体」，可約で $I_A = U(1)$ であるような接続が ASD 方程式を摂動したものの解である場合には，$m_2 \geq 0$ としてよい．大体と書いたのは $b_1 = b_2^+ = 0, k = 0$ の場合が例外であるからである．$b_1 = b_2^+ = 0, k = 0$ の場合は可約平坦接続を問題にしていることになる．もし M が単連結なら平坦接続は自明であるから，この場合は考えなくてよい．たとえば M の第 1 ホモロジーが有限群で $\mathbf{Z}_2^N$ の形でないときが問題になる．この場合は $k = 0$ であるような可約平坦接続を摂動で除くことができない．これはたとえば定理 2.4.12 を単連結性の仮定なしで証明しようとすると問題になるが，その場合はこの問題は回避できる．そのための議論は述べない．以後ドナルドソン多項式の定義を問題にするので，$b_1 = b_2^+ = 0$ である場合は考えない．したがって $m_2 \geq 0$ で

ある場合を考えればよい．

$A \in \mathcal{B}(M,\zeta)$ を，$(F^+ + s_0)(A,b) = 0$, $I_A = U(1)$ である接続とする．さて写像 $Hol_{\vec{\ell}}\colon \mathcal{B}_k(M,\zeta) \to SU(2)^K/SU(2)$ を考えよう．すると十分大きい K を使ってこの写像を構成すれば，この A での微分が Ker $(d_A^+ \oplus d_A^*) = \mathbf{R}^{n_1} \oplus \mathbf{C}^{n_2} \subseteq T_A\mathcal{B}(M,\zeta)$ 上単射に選ぶことができる．この像のことを単に $\mathbf{R}^{n_1} \oplus \mathbf{C}^{n_2}$ と書こう．

一方補題 3.4.5 によって CoKer $d_A^+ \oplus d_A^* = \mathbf{R}^{n_1'} \oplus \mathbf{C}^{n_2'}$ 上では $D(1/2)$ への制限が単射になる．よって CoKer $d_A^+ \oplus d_A^* = \mathbf{C}^{a'} \oplus \mathbf{R}^{b'}$ の $D(1/2)$ への制限は Y の（$I_A = U(1) \subseteq SU(2)$ の作用も込めて）$\mathbf{R}^{n_1'} \oplus \mathbf{C}^{n_2'}$ と同型な部分空間を与える．この部分空間のことを単に $\mathbf{R}^{n_1'} \oplus \mathbf{C}^{n_2'}$ と書く．b を generic にとっておけば $n_1' = 0$ としてよい．

ここで $m_2 \geq 0$ より $n_2 \geq n_2'$ である．よって $SU(2)^K \to Y$ なる $SU(2)$ 不変な写像を，その $Hol_{\vec{\ell}}(A)$ での微分が $\mathbf{R}^{n_1} \oplus \mathbf{C}^{n_2}$ から $\mathbf{C}^{n_2'}$ への全射を与えるようにとることができる．(この写像の A での値は 0 である．したがってこの摂動は補題 3.4.7 の証明に使われた摂動とは異なる．そこでは摂動の A における値をずらして求める摂動を作ったが，ここでは A での微分を使って摂動している.）この写像に対応する B の元のことを b と書く．すると作り方から十分小さい ε に対してεb に対応する摂動方程式は A で横断正則性の条件を満たす．すなわちこの点でその（摂動された）AHS 複体の 2 次のコホモロジーは消える．

上の議論は本当は少し不完全である．というのは上では可約接続 A を一つ止めて議論したが，$(F^+ + s_0)(A,b)$ が 0 になる可約接続 A は一般には無限個（非可算）あり得る．この場合の議論はやはり補題 3.4.1 と同様な補題を用いてすればいいので省略しよう．とにかく以上で $I_A = U(1)$ である接続のコンパクト集合上でも方程式の摂動で（摂動された）AHS 複体の 2 次のコホモロジーを消せることがわかった．($b_1 = b_2^+ = 0$, $k = 0$ の場合は除く．)

次に $I_A = SU(2)$ の場合を論じよう．この場合は A のホロノミー群は $SU(2)$ の中心 $\{\pm 1\}$ に含まれていなければならない．これは離散群であるから A は平坦接続で準同型 $\pi_1 \to \{\pm 1\}$ に対応する．したがって $H^1(M;\mathbf{Z}_2) = 0$ ならばこのような接続は自明なものだけである．また一般にこのような接続は $\mathcal{B}(M,\zeta)$

の有限部分集合である.

この場合 $Ad\,\zeta$ は接続も込めて自明である. したがってこのとき AHS 複体の指数は $3(b_1-(1+b_2^+))$ になる. さらに $I_A=SU(2)$ の作用を込めて考えるとこれは $su(2)^{b_1-(1+b_2^+)}$ である. ここで $su(2)$ へは $SU(2)$ は共役表現で作用している. このことから $3(b_1-(1+b_2^+))$ が負であってもこの接続を摂動してなくしてしまう方法がないことがわかる. ($su(2)$ の不動点は原点だけだから, $SU(2)$ 不変関数でどう摂動しても原点は残る.) これは次元の粗い計算で物事を進めようとするとうまくいかないことが起こる主要な原因である.

$3(b_1-(1+b_2^+))$ が正の場合には摂動で AHS 複体の 2 次のコホモロジーをこの点でも正にできる.

さて以上で証明したことをまとめよう.

命題 3.4.10 $b_1=b_2^+=0, k=0$ の場合を除いて次のことが成立する. $\mathcal{M}(M,\zeta)$ の任意のコンパクト集合 K に対して十分多くのループをとり, B をそれに対応する摂動のパラメータとすると, generic な B の元によって摂動された ASD 方程式の K の近傍の解は AHS 複体の 2 次のコホモロジーがいつも消えているか, $\pi_1\to\{\pm1\}$ に対応する平坦接続で $3(b_1-(1+b_2^+))$ が負であるかのどちらかである.

次にモジュライ空間の無限遠の近傍での摂動について述べよう. これは考えている束のチャーン数 $c^2=k$ についての帰納法で行う. まずこれが一番小さいときつまり $k=0$ のときは, 証明すべきことはあまりない. この場合は ASD 接続は平坦接続である. $b_1=b_2^+=0$ の場合を除けば, この場合は $\pi_1\to\{\pm1\}$ に対応する平坦接続 AHS 複体の第 2 コホモロジーが 0 でない接続以外は, 摂動すればなくなってしまう. そこで $k<k_0$ では (摂動された) ASD 方程式の解は, AHS 複体の 2 次のコホモロジーがいつも消えるか$\pi_1\to\{\pm1\}$ に対応する平坦接続であるかのどちらかであるとしよう.

$k=k_0$ でもコンパクト集合の中では摂動はもうできている. コンパクト集合の外で摂動をするには次のようにする. $U_1,\cdots,U_{k_0+1}$ を X のお互いに交わらない開部分集合とする. $k<k_0$ に対する摂動は $i\le k_0+1$ を任意に選んだと

き，台も閉曲線も U_i にあるようにとることができる．$\mathcal{B}(M,\zeta_\ell)\times S^{k-\ell}(M)$ の点を考えたとき，$S^{k-\ell}(M)$ のどの点にも属さないような U_i がある．この近くの $\mathcal{B}(X,\zeta_k)$ に対する摂動は，台も閉曲線も U_i にあるような摂動でとる．すると $k=k_0$ での摂動が一つ決まる．このとき $\mathcal{B}(M,\zeta_\ell)\times S^{k-\ell}(M)$ の点の近くの $\mathcal{M}(M,\zeta_k)$ の元を考えよう．これは摂動されたモジュライ空間 $\mathcal{M}(X,\zeta_{k-\ell})$ の元を U_i の外で ℓ ヶ所バブルさせてできたものであった．$\mathcal{M}(M,\zeta_{k-\ell})$ の定義のための摂動は，$\mathcal{B}(X,\zeta_\ell)\times S^{k-\ell}(X)$ の中で $\mathcal{B}(M,\zeta_\ell)\times S^{k-\ell}(M)$ の近くの部分では，台も閉曲線も U_i にあるようなものをとっていた．これに対応するAHS 複体の第 2 コホモロジーは帰納法の仮定により消える．一方バブルの方の AHS 複体の第 2 コホモロジーも消える．またバブルをはり付ける場所では方程式は摂動していなかったからよけいなことは心配しなくてよい．ところで後で§4.8 で示すように，はり合わせる前の接続たちに対応する ASH 複体たちの第 2 コホモロジーが消えていればはり合わせた後の接続に対応する ASH 複体の第 2 コホモロジーも消える．よって $\mathcal{B}(M,\zeta_\ell)\times S^{k-\ell}(M)$ の点の近くにある $\mathcal{M}(M,\zeta_k)$ の元に対する AHS 複体の第 2 コホモロジーは消える．

コンパクト集合の外にある摂動された方程式のモジュライ空間 $\mathcal{M}(M,\zeta_k)$（記号の節約で同じ記号で書く）の元は必ずどれかの $\mathcal{B}(M,\zeta_\ell)\times S^{k-\ell}(M)$ の点の近くにあるから以上で条件を満たす摂動を作ったことになる．

実は上の議論では $\mathcal{M}(M,\zeta_k)$ の元で $\mathcal{B}(M,\zeta_0)\times S^{k}(M)$ の近くにあるもののことを忘れていた．(このときはバブルをはる前には AHS 複体の第 2 コホモロジーが生き残っている.）この場合は実は次の節の議論で使っていないので証明は省略しよう（結果的にはこの場合も正しい）．以上で次のことが示された．

定理 3.4.11　$b_1=b_2^+=0$ ではないとすると，任意の計量に対して次の性質を持つ $b\in B$ はベール集合である．$(F^+ + s)^{-1}(0)\cap(\mathcal{B}_k(M,\zeta)\times\{b\})$ の元でAHS 複体の第 2 コホモロジーが消えないのは$\pi_1(X)\to\mathbf{Z}_2$ の元に対応する平坦接続だけである．

さらに $b_2^+>0$ とすると，$\pi_1(M)\to\mathbf{Z}_2$ の元に対応する平坦接続以外の可約接続は $(F^+ + s)^{-1}(0)\cap(\mathcal{B}_k(M,\zeta)\times\{b\})$ の元ではない．

さて摂動に関する議論は大体終わったが，次の節では計量の 1 次元の族 g_t を考えてその族に対するモジュライ空間の和$\bigcup_t \mathcal{M}(M,\zeta_k,g_t)$ を考える必要がある．(これはドナルドソン多項式が計量によらないことを示すために必要である.)

これを調べるのにやはり摂動を用いよう．B はいままで論じてきたものと同じとし，

$$\mathcal{M}_b(M,\zeta_k) = (F^+ + s)^{-1}(0) \cap (\mathcal{B}_k(M,\zeta) \times \{b\})$$

とおく．ここで F^+ の定義には M 上の計量を使っている．これを明示して $\mathcal{M}_b((M,g),\zeta_k)$ と書こう．$\mathcal{M}et(M)$ で M 上の計量全体とする．(C^∞ 級計量全体．あるいはバナッハ空間にしたければ $C^{\vec{\beta}}$ 級としてもよい.）次の定理 3.4.12 が定理 3.4.11 を一般化したものである．

N を n 次元多様体とし $g: V \to \mathcal{M}et(M)$ を C^∞ 級写像とする．$b: V \to B$ に対して

$$\mathcal{M}(M,g,b,\zeta_k) = \bigcup_{x\in V} \mathcal{M}_{b(x)}((M,g(x)),\zeta_k)$$

とおく．

定理 3.4.12 $b_2^+ > n$ とすると，任意の $g: V \to \mathcal{M}et(M)$ に対して $\mathcal{M}(M,g,b,\zeta_k)$ が可微分多様体になるような $b: V \to B$ の全体はベール集合である．

さらに $\partial V \neq \emptyset$ として，$g: V \to \mathcal{M}et(M)$, $g|_{\partial N} = \bar{g}$, $\bar{b}: \partial V \to B$ とし $\mathcal{M}(M,\bar{g},\bar{b},\zeta_k)$ は任意の k に対して横断正則性を満たしているとする．このとき $b: V \to B$ なる$\bar{b}$ の拡張で $\mathcal{M}(M,g,b,\zeta_k)$ が可微分多様体になるもの全体は，拡張全体の中でベール集合をなす．

仮定が $b_2^+ > n$ と，定理 3.4.11 より強くなっていることに注意．証明の中で定理 3.4.11 のものを変更する必要が生じるのは次の点である．補題 3.4.9 が一番問題である．この補題の証明は $U(1)$ 接続の集合での横断正則性と指数（次元）の計算（補題 3.4.8）であった．補題 3.4.9 は次のように変える必要がある．

補題 3.4.13 $b_2^+ > n$ とすると，任意の $g: V \to \mathcal{M}et(M)$ に対して $\mathcal{M}(M,g,b,$

ζ_k) に $I_A = U(1)$ なる可約接続が存在しないような $b: V \to B$ 全体はベール集合をなす.

証明の粗筋は補題 3.4.9 の場合と同じである. まず $I_A = U(1)$ なる可約接続は $U(1)$ 接続としては既約接続であることに注意し, $U(1)$ 接続の方程式に対する横断正則性が満たされているとする. すると, $\mathcal{M}(M, g, b, \zeta_k)$ の $I_A = U(1)$ なる可約接続全体の集合の次元は $m_1 + n + 1$ である. ここで $m_1 = b_1 - 1 - b_2^+$ は補題 3.4.8 で与えられていた. すると仮定 $b_1 = 0$ よりこれは負. $b_1 > 0$ の場合は補題 3.4.9 のときと同様に可約接続の空間を $\mathcal{B}_k(M, L) = \mathcal{B}'_k(M, L) \times \frac{\mathcal{H}^1(M)}{H^1(M; \mathbf{Z})}$ と分解して考えればやはり次元は負になる. 横断正則性は満たされているから, この集合は空集合である.　証明終わり

補題 3.4.13 を用いると定理 3.4.12 は定理 3.4.11 と同様に示される. 以上で横断正則性についての議論を終わる.

§ 3.5 ドナルドソン不変量のまとめ

この節では第 3 章でいろいろ準備したことに基づいてドナルドソン不変量の(第 2 章であらましを述べた) 定義を完成させる．まず状況設定をしよう．

X を 4 次元多様体とする．可約接続に関わる問題をさけるには generic な変形によって自明でない可約接続が M 上に存在しないようにしなければならない．そのために M が満たすべき条件は補題 3.4.9 で述べたように $b_2^+ > 0$ であった．これをまず仮定しよう．

仮定 3.5.1.1　$b_2^+ > 0$

次に X 上に第 2 チャーン数 k の $SU(2)$ 束 ζ_k をとろう．これに対してまず定理 3.4.11 でいう摂動を施した ASD 接続のモジュライ空間を $\mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_k)$ と書く．ここで g は M 上のリーマン計量で S は摂動のパラメータである．このモジュライ空間のウーレンベックコンパクト化

$$\mathcal{CM}_{(g,S)}(M,\zeta_k) = \mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_k) \cup \bigcup_{k\geq\ell} \mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_\ell) \times S^{k-\ell}(M)$$

を考えよう．§3.4 の横断正則性についての議論の結論は次のことであった．

命題 3.5.2　仮定 3.5.1.1 の下で $([A],(p_1,\cdots,p_{k-\ell})) \in \mathcal{CM}_{(g,S)}(M,\zeta_k)$ とすると

(1) A は既約接続または $Hom(\pi_1(M),\mathbf{Z}_2)$ に対応する平坦接続である．
(2) A が既約ならば A に対応する AHS 複体の 0 次および 2 次のコホモロジーは消える．

これから§3.2 で証明した定理 2.2.1 により，

系 3.5.3　$\mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_k)$ は可微分多様体でその次元は $8k+3(b_1-1-b_2^+)$ で

ある．ただし $k=0$ の場合は例外で，その場合は $\mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_0)$ は有限集合 $Hom(\pi_1(M),\mathbf{Z}_2)$ である．

さて次にコホモロジー類 $u_i \in H^2(M;\mathbf{Z})$ をとる．これを表す向きの付いた閉曲面 $\Sigma_i \subseteq M$ を選ぶ．このとき次のことを仮定する．

仮定 3.5.1.2　摂動 S の台はどの $\Sigma_i \subseteq M$ とも交わらない．

正確には曲面 Σ_i を選んでからそれと交わらないように S を選ぶ．これは $M-\bigcup\Sigma_i$ が M で稠密であるからいつでも可能である．これを用いて写像 $\mathrm{Res}_i : \mathcal{B}(M,\zeta_k) \to \mathcal{B}(\Sigma_i)$ を作る．

ここで $\mathcal{B}(\Sigma_i)$ 上の直線束について思い出そう．$\mathcal{B}_*(\Sigma_i)$ で，$\mathcal{B}(\Sigma_i)$ の既約接続全体を表す．これに $Hom(\pi_1(\Sigma_i),\mathbf{Z}_2)$ の元に対応する 2^{2g_i} 個の可約接続をつけ加えたものを $[A] \in \mathcal{B}_{*,+}(\Sigma_i,\zeta_k)$ と書こう（g_i は Σ_i の種数）．$[A] \in \mathcal{B}_{*,+}(\Sigma_i,\zeta_k)$ に対して $L_{[A]} = \det \mathrm{Index}(\overline{\partial}_A : \zeta_A \otimes \Lambda^{0,0}(\Sigma_i) \to \zeta_A \otimes \Lambda^{0,1}(\Sigma_i))$ とおこう．ここで ζ_A は自明な $SU(2)$ 束（ファイバーは $\mathbf{C}^2$）に接続 A を入れたものである（§2.4 参照）．

補題 3.5.4　$L_{[A]}$ は $\mathcal{B}_{*,+}(\Sigma_i,\zeta_k)$ 上の（複素直線）束を定める．

証明　$L_{[A]}$ が $\mathcal{B}_*(\Sigma_i)$ 上複素直線束を定めることは§2.3 で証明した．$Hom(\pi_1(\Sigma_g),\mathbf{Z}_2)$ の元に，これがのびることを示さなければならない．§2.3 で述べたように，ここで問題になるのはこれらの点が特異点であるということである．すなわちゲージ変換群で割る前の $\mathcal{A}(\Sigma_i,\zeta_k)$ 上に存在する直線束を下へ落とすのに，ゲージ変換群の等方部分群がこれらの点で自明でないことが問題となる．証明すべきなのは A が $Hom(\pi_1(\Sigma_i),\mathbf{Z}_2)$ の元に対応する接続であるとき，その等方部分群 $I_A \cong SU(2)$ がファイバー $L_{[A]}$ に自明に作用することである．

まず A が自明な場合を考えよう．この場合は

$$\mathrm{Ker}\,(\overline{\partial}_A : \zeta_A \otimes \Lambda^{0,0}(\Sigma_i) \to \zeta_A \otimes \Lambda^{0,1}(\Sigma_i)) = \mathbf{C}^2$$

$$\mathrm{CoKer}\ (\overline{\partial}_A : \zeta_A \otimes \Lambda^{0,0}(\Sigma_i) \to \zeta_A \otimes \Lambda^{0,1}(\Sigma_i)) = \mathbf{C}^2 \otimes H^{0,1}(\Sigma_i)$$

が $I_A \cong SU(2)$ の作用も込めて成立する．($\mathbf{C}^2$ への $SU(2)$ の作用はそのまま行列とみなしてかける，$H^{0,1}(\Sigma_i)$ への $SU(2)$ の作用は自明.) したがって $SU(2)$ の元の行列式は 1 だから $L_{[A]} = \det \mathrm{Index}(\overline{\partial}_A : \zeta_A \otimes \Lambda^{0,0}(\Sigma_i) \to \zeta_A \otimes \Lambda^{0,1}(\Sigma_i))$ 上の作用は自明である．

次に A が $Hom(\pi_1(\Sigma_i), \mathbf{Z}_2)$ の自明でない元に対応するとしよう．すると曲面 Σ_i のしかるべき 2 重被覆 $\widetilde{\Sigma}_i$ をとると，そこで A は自明になる．このとき 2 重被覆に対する被覆変換群 $\mathbf{Z}_2$ が $\mathrm{Ker}\ (\overline{\partial}_A : \zeta_A \otimes \Lambda^{0,0}(\widetilde{\Sigma}_i) \to \zeta_A \otimes \Lambda^{0,1}(\widetilde{\Sigma}_i)) = \mathbf{C}^2$ および $\mathrm{CoKer}\ (\overline{\partial}_A : \zeta_A \otimes \Lambda^{0,0}(\widetilde{\Sigma}_i) \to \zeta_A \otimes \Lambda^{0,1}(\widetilde{\Sigma}_i)) = \mathbf{C}^2 \otimes H^{0,1}(\widetilde{\Sigma}_i)$ に作用し $\mathrm{Ker}\ (\overline{\partial}_A : \zeta_A \otimes \Lambda^{0,0}(\Sigma_i) \to \zeta_A \otimes \Lambda^{0,1}(\Sigma_i))$ や $\mathrm{CoKer}\ (\overline{\partial}_A : \zeta_A \otimes \Lambda^{0,0}(\Sigma_i) \to \zeta_A \otimes \Lambda^{0,1}(\Sigma_i))$ はこの変換の不動点全体である．ところで，定義と A のホロノミー $Hol_A \cong \mathbf{Z}_2 \subseteq SU(2)$ が中心であることより，被覆変換群の作用と $I_A = SU(2)$ の作用とは可換である．これから容易に $\mathrm{Ker}\ (\overline{\partial}_A : \zeta_A \otimes \Lambda^{0,0}(\Sigma_i) \to \zeta_A \otimes \Lambda^{0,1}(\Sigma_i))$ および $\mathrm{CoKer}\ (\overline{\partial}_A : \zeta_A \otimes \Lambda^{0,0}(\Sigma_i) \to \zeta_A \otimes \Lambda^{0,1}(\Sigma_i))$ がともに $\mathbf{C}^2 \otimes V$ （V は I_A が自明に作用するあるベクトル空間）となっていることがわかる．したがって $L_{[A]} = \det \mathrm{Index}(\overline{\partial}_A : \zeta_A \otimes \Lambda^{0,0}(\Sigma_i) \to \zeta_A \otimes \Lambda^{0,1}(\Sigma_i))$ へ I_A は自明に作用する．　証明終わり

ここで本当は§2.4 で述べた問題すなわち，M 上の既約接続の Σ_i への制限が可約になりうる，を考えなければならない．しかしこれは本節のもう少し後に回す．それでとりあえず次の仮定をしておく．

仮定 3.5.5 $[A] \in \mathcal{M}(M, \zeta_\ell)$, $k \geq \ell$ ならば $\mathrm{Res}_i([A]) \in \mathcal{B}_{*,+}(\Sigma_i)$

次に $8k + 3(b_1 - 1 - b_2^+) = 2d$ なる d をとろう．むろんこれは $b_1 - 1 - b_2^+$ が偶数でなければ意味がない．しかし§0.4 でちょっと述べたように，ケーラー (Kähler) 多様体であるような複素曲面（たとえば代数曲面）では b_1 は偶数で b_2^+ は奇数である．したがってその場合は $b_1 - 1 - b_2^+$ は偶数である．もちろん複素曲面以外のものを考えれば $b_1 - 1 - b_2^+$ が奇数であるような例はいくら

でもある.(たとえば $K3$ 曲面の二つの連結和をとればよい.) このような場合にゲージ理論を用いて4次元多様体の不変量を作りそれを活用することには今のところ誰も成功していない. また $b_1 - 1 - b_2^+$ が奇数であるような4次元多様体の組で可微分同相でなく同相である例は知られていない.

元に戻って d 個のコホモロジー類 $u_1, \cdots, u_d$ とそれを表す曲面 $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_d$ をとる. 次に補題3.5.6で構成した複素直線束 $L_{i,[A]} \to \mathcal{B}_{*,+}(\Sigma_i)$ を考え, これに対する切断 s_i をとる. ここで次を仮定する.

仮定 3.5.1.3　s_i は $\mathcal{B}_{*,+}(\Sigma_i) - \mathcal{B}_*(\Sigma_i)$ 上で0にならない.

$\mathcal{B}_{*,+}(\Sigma_i) - \mathcal{B}_*(\Sigma_i)$ は有限個の点であるから仮定3.5.1.3を満たす切断があることは明らかである.

次にモジュライ空間の向き付けを思い出そう. すなわち

補題 3.5.6　$H_+^2(M;\mathbf{R}) \oplus H^1(M;\mathbf{R})^* \oplus H^0(M;\mathbf{R})$ の向きから $\mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_k)$ の向き付けを標準的に定めるやり方が存在する.

これは §2.3, §2.4 で述べた. さてここでもう一つ仮定をする.

仮定 3.5.1.4　$d > 2k$

この仮定の意味はもう少し先で明らかになる. これは書き換えると,

仮定 3.5.1.4′　$4k > 3(1 + b_2^+ - b_1)$

である. 最後に曲面たち Σ_i について次の仮定をする.

仮定 3.5.1.5　i_1, i_2, i_3 が相異なれば $\Sigma_{i_1} \cap \Sigma_{i_2} \cap \Sigma_{i_3} = \emptyset$.

もちろんこれは generic な曲面に対しては正しい. この仮定の意味も直ぐに

明らかになる．

さて以上の仮定の下で「定理 2.3.11」で述べておいたドナルドソン多項式 (Donaldson polynomial) の構成をもう一度やってみよう．

定義 3.5.7　$Q(M;\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;\zeta_k;g,S;s_i)=\#\{[A]\in\mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_k)\mid s_i\mathrm{Res}_i([A])=0,\ i=1,\cdots,d\}$

この右辺がいろいろと余計に選んだものによらないことをまだ証明していないので，とりあえず $Q(M;\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;\zeta_k;g,S;s_i)$ の括弧の中には g,S,s_i を書いておいた．# は向きを込めて考えた位数である．この意味は前に説明した．

定義 3.5.7 が意味を持つためには次の主張を証明しなければならない．

定理 3.5.8　$\{[A]\in\mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_k)\mid s_i\mathrm{Res}_i([A])=0,\ i=1,\cdots,d\}$ は generic な s_i に対して有限個の点からなり，またその各点で s_i $(i=1,\cdots,d)$ は互いに横断的である．

定理の横断性についてはほぼ明らかである．すなわちこれは普通のベクトル束の切断に対する横断正則性定理である．とはいっても少し注意が必要である．なぜなら我々は，$\mathcal{B}_{*,+}(\Sigma_i)$ 上の直線束を引き戻した直線束 $\mathrm{Res}_i{}^*(L_i)$ の $\mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_k)$（のコンパクト化）での任意の切断をとるとしているのではない．そうではなくて $\mathcal{B}_{*,+}(\Sigma_i)$ 上の切断をとりそれを引き戻した $\mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_k)$ の切断を考えている．したがって有限次元の普通の横断正則性定理から直ちに，求める横断正則性が出るわけではない．しかしこの点はかなり技術的であるので，前に触れたもう一つの問題点すなわち仮定 3.5.5 とともに後で論ずることにする．

さて横断正則性はいいとしよう．すると次元は合うようにとったから $\{[A]\in\mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_k)\mid s_i\mathrm{Res}_i([A])=0,\ i=1,\cdots,d\}$ は 0 次元である．また向きも入っている．問題はコンパクト性である．すなわち集合 $\{[A]\in\mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_k)\mid s_i\mathrm{Res}_i([A])=0,\ i=1,\cdots,d\}$ の位数が有限であるかという点である．モ

ジュライ空間 $\mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_k)$ がコンパクトならこれは明らかである．しかし $\mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_k)$ はコンパクトではなかった．この点を扱うために今まで苦労してそのコンパクト化を論じてきたのだった．さてそのコンパクト化 $\mathcal{CM}_{(g,S)}(M,\zeta_k) = \mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_k) \cup \bigcup_{k\geq\ell} \mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_\ell) \times S^{k-\ell}(M)$ を使おう．もし引き戻した $\mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_k)$ 上の直線束 $\mathrm{Res}_i{}^*(L_i)$ が $\mathcal{CM}_{(g,S)}(M,\zeta_k)$ までのびるならばやはり $\{[A] \in \mathcal{M}_{(g,S)}\ (M,\zeta_k) \mid s_i\mathrm{Res}_i([A]) = 0,\ i = 1,\cdots,d\}$ が有限集合であることは横断正則性から明らかである．$(\mathcal{CM}_{(g,S)}(M,\zeta_k) - \mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_k)$ の次元は $\mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_k)$ の次元より真に小さい．)

しかし直線束 $\mathrm{Res}_i{}^*(L_i)$ は $\mathcal{CM}_{(g,S)}(M,\zeta_k)$ 全体にはのびない．それを理解するために $[A_j] \in \mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_k)$ を考えそれが $([A_\infty],\ p_1,\cdots,p_{k-\ell}) \in \mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_\ell) \times S^{k-\ell}(M)$ に収束するとしよう．これは (2.4.3) で定義したように A_j が A_∞ に $M - \{p_1,\cdots,p_{k-\ell}\}$ で C^∞ 収束し，また A_j の曲率のノルムの 2 乗が A_∞ の曲率のノルムの 2 乗と $p_1,\cdots,p_{k-\ell}$ でのデルタ関数の和に収束するという意味であった．したがってもし $\Sigma_i \cap \{p_1,\cdots,p_{k-\ell}\}$ が空集合であれば，$\mathrm{Res}_i([A_j])$ は $\mathrm{Res}_i([A_\infty])$ に収束する．よって $\Sigma_i \cap \{p_1,\cdots,p_{k-\ell}\}$ が空集合である $([A_\infty],\ p_1,\cdots,p_{k-\ell}) \in \mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_\ell) \times S^{k-\ell}(M)$ には $\mathrm{Res}_i{}^*(L_i)$ は拡張する．この辺の考察をうまくやるために $\mathrm{Res}_i{}^*(L_i)$ の $\mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_k)$（のコンパクト化）での任意の切断をとるのではなく $\mathcal{B}_{*,+}(\Sigma_i)$ 上の切断をとりそれを引き戻した $\mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_k)$ の切断を考えていたのである．以上をまとめると

補題 3.5.9　$[A_j] \in \mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_k)$, $([A_\infty],p_1,\cdots,p_{k-\ell}) \in \mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_\ell) \times S^{k-\ell}(M)$, $\lim_{j\to\infty}[A_j] = ([A_\infty],p_1,\cdots,p_{k-\ell})$ とし $\Sigma_i \cap \{p_1,\cdots,p_{k-\ell}\} = \emptyset$ とする．このとき $\lim_{j\to\infty} \mathrm{Res}_i([A_j]) = [A_\infty]$.

さて定理 3.5.8 の証明をしよう．そのために切断 s_i を generic にとり $k \geq \ell$ なる各々の ℓ に対しても $\{[A] \in \mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_k) \mid s_i\mathrm{Res}_i([A]) = 0,\ i = 1,\cdots,d\}$ の各点で s_i たちが互いに横断的であるようにとろう．(そのようにとれるというためには証明の始めに書いた問題，すなわち $s_i\mathrm{Res}_i$ の形の切断をとっても横断的にできることを証明しておかなければならない．これも後に回す．)

さて $\{[A] \in \mathcal{M}_{(g,S)}(M,\zeta_k) \mid s_i\mathrm{Res}_i([A]) = 0,\ i = 1,\cdots,d\}$ が無限集合であ

るとして矛盾を導こう．$[A_j] \in \mathcal{M}_{(g,S)}(M, \zeta_k)$, $s_i\mathrm{Res}_i([A_j]) = 0$ $(i = 1, \cdots, d)$ とする．すると $[A_j]$ は $\mathcal{M}_{g,S}(X, \zeta_k)$ の中には集積点をもつことはできない．よって部分列に移って $[A_j]$ は $([A_\infty],\ p_1, \cdots, p_{k-\ell}) \in \mathcal{M}_{g,S}(M, \zeta_\ell) \times S^{k-\ell}(M)$ $(\ell \neq 0)$ に収束するとしてよい．ここで場合を二つに分ける．

場合 1　$\ell \neq k$

この場合は仮定 3.5.1.5 を用いる．この仮定を用いると曲面 Σ_i たちのうちで高々 $2(k-\ell)$ 個しか集合 $\{p_1, \cdots, p_{k-\ell}\}$ と交わらない．番号をつけ換えて $i \le d - 2(k-\ell)$ に対して$\Sigma_i \cap \{p_1, \cdots, p_{k-\ell}\} = \emptyset$ が成り立つとしよう．すると $s_i\mathrm{Res}_i([A_j]) = 0$ と補題 3.5.9 より，$i \le d - 2(k-\ell)$ に対して $s_i\mathrm{Res}_i([A_\infty]) = \lim_{j\to\infty} s_i\mathrm{Res}_i([A_j]) = 0$ である．つまり

$$[A_\infty] \in \{[A] \in \mathcal{M}_{(g,S)}(M, \zeta_\ell) \mid s_i\mathrm{Res}_i([A]) = 0,\ i \le d - 2(k-\ell)\}$$

横断正則性は仮定してあったからこの右辺の空間の次元は普通に勘定できる．つまり

$$\begin{aligned}
\dim\{[A] \in \mathcal{M}_{(g,S)}(M, \zeta_\ell) \mid s_i\mathrm{Res}_i([A]) = 0,\ i \le d - 2(k-\ell)\}& \\
= 8\ell + 3(b_1 - 1 - b_2^+) - 2(d - 2(k-\ell))& \\
= -4(k-\ell)& \\
< 0&
\end{aligned}$$

したがって空集合に $[A_\infty]$ が含まれることになり矛盾である．

場合 2　$\ell = k$

今度は仮定 3.5.1.4 すなわち $d > 2k$ を使おう．この場合バブルする点は k 個である．一方曲面の数は d 個だったから，仮定 3.5.1.5 より，少なくとも一つの曲面 Σ_i はバブルする点を含まない．したがって

$$s_i\mathrm{Res}_i([A_\infty]) = \lim_{j\to\infty} s_i\mathrm{Res}_i([A_j]) = 0$$

ところが $\mathcal{M}_{(g,S)}(X, \zeta_0)$ の元はすべて平坦接続である．命題 3.5.2 より平坦接続で $Hom(\pi_1(M), \mathbf{Z}_2)$ の元でないものは我々のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{(g,S)}(M, \zeta_\ell)$ には含まれていない．したがって $[A_\infty]$ は $Hom(\pi_1(M), \mathbf{Z}_2)$ の元に対応する平

坦接続である．もちろんその Σ_i への制限も $Hom(\pi_1(\Sigma_i),\mathbf{Z}_2)$ に対応する平坦接続である．ところがすると仮定 3.5.1.3 より $s_i\mathrm{Res}_i([A_\infty]) \neq 0$．これは矛盾である．(仮定 3.5.1.3 を満たす切断がとれることを示すために補題 3.5.4 を証明したのだった．)

以上で横断正則性に関して保留した一つの点を除いて定理 3.5.8 が証明された．　　　　証明終わり

さて次に定義 3.5.7 の数が多様体 M（とその向き付け）およびコホモロジー類 $[\Sigma_1],\cdots,[\Sigma_d] \in H_2(M;\mathbf{Z})$ のみにより，M の計量 g，摂動 S，および（コホモロジー類を実現する）曲面$\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d \subseteq M$，切断 s_i によらないことを証明しよう．そのためには定義 3.5.7 の数が定義されるために仮定した $b_2^+>0$ より少し強い仮定が必要である．すなわち

仮定 3.5.1.1′　$b_2^+>1$

定理 3.5.10　3.5.1.1′,3.5.1.2,$\cdots\cdots$,3.5.1.5 を仮定すると定義 3.5.7 の数 $Q(M;\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;\zeta_k;g,S;s_i)$ は M の計量 g，摂動 S，および（コホモロジー類を実現する）曲面$\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d \subseteq M$，切断 s_i によらない．

証明　g_t, S_t, $t \in [0,1]$ を二つの計量 g_0, g_1 および二つの摂動 S_0, S_1 を結ぶ道とする．まず $Q(M;\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;\zeta_k;g_0,S_0;s_i) = Q(M;\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;\zeta_k;g_1,S_1;s_i)$ を証明しよう．S_t, $t \in [0,1]$ の台は$\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d$ と交わらないとする．(これは一般には満たされないが，必要ならこれを満たす組 $(\Sigma_1^0,\cdots,\Sigma_d^0,g_0,S_0,s_i^0)$ と $(\Sigma_1^1,\cdots,\Sigma_d^1,g_1,S_1,s_i^1)$, $(\Sigma_1^1,\cdots,\Sigma_d^1,g_1,S_1,s_i^1)$ と $(\Sigma_1^2,\cdots,\Sigma_d^2,g_2,S_2,s_i^2)$, $\cdots\cdot$ を順番にとっていけば，任意の組 $(\Sigma_1^0,\cdots,\Sigma_d^0,g_0,S_0,s_i^0)$ と $(\Sigma_1^k,\cdots,\Sigma_d^k,g_k,S_k,s_i^k)$ が実現できる．したがって定理はこの 1 ステップについて証明すれば十分である.)

するとモジュライ空間の族 $\mathcal{M}_{(g_t,S_t)}(M,\zeta_k)$ ができる．これを合わせた集合 $\bigcup_{t\in[0,1]}\mathcal{M}_{(g_t,S_t)}(M,\zeta_k)\times\{t\} \subseteq \mathcal{B}(M,\zeta_k)\times[0,1]$ を考えよう．

補題 3.5.11　$\bigcup_{t\in[0,1]}\mathcal{M}_{(g_t,S_t)}(M,\zeta_k)\times\{t\}$ は generic な族 g_t, S_t に対して（境界付き）可微分多様体である．

これは定理 3.4.12 である．そこで注意したように，1 パラメータの族の場合，可約接続からくる特異点の可能性を排除するには仮定 $b_2^+>1$ が必要である．

補題 3.5.11 で作った多様体を $\mathcal{M}_{para}(M,\zeta_k)$ と書こう．この境界は $\mathcal{M}_{(g_0,S_0)}(M,\zeta_k)\cup-\mathcal{M}_{(g_1,S_1)}(M,\zeta_k)$ である．次にこれのコンパクト化を行おう．それには

$$\mathcal{CM}_{para}(M,\zeta_k)=\mathcal{M}_{para}(M,\zeta_k)\cup\bigcup_{k\geq\ell}\mathcal{M}_{para}(M,\zeta_\ell)\times S^{k-\ell}(M)$$

をとればよい．さて $\mathcal{M}_{para}(M,\zeta_k)$ から写像 $\mathrm{Res}_i:\mathcal{M}_{para}(M,\zeta_k)\to\mathcal{B}_+(\Sigma_i)$ と切断 s_i を使って

$$\mathcal{M}_{para}(M,\zeta_k)\cap\bigcap_i(s_i\mathrm{Res}_i)^{-1}(0)$$

を考えよう．

補題 3.5.12　$\mathcal{M}_{para}(M,\zeta_k)\cap\bigcap_i(s_i\mathrm{Res}_i)^{-1}(0)$ は 1 次元コンパクト多様体でその境界は

$$\left(\mathcal{M}_{(g_0,S_0)}(M,\zeta_k)\cap\bigcap_i(s_i\mathrm{Res}_i)^{-1}(0)\right)\cup-\left(\mathcal{M}_{(g_1,S_1)}(M,\zeta_k)\cap\bigcap_i(s_i\mathrm{Res}_i)^{-1}(0\right.$$

である．

証明　まず $\mathcal{M}_{para}(M,\zeta_k)\cap\bigcap_i(s_i\mathrm{Res}_i)^{-1}(0)$ が 1 次元多様体で

$$\left(\mathcal{M}_{(g_0,S_0)}(M,\zeta_k)\cap\bigcap_i(s_i\mathrm{Res}_i)^{-1}(0)\right)\cup-\left(\mathcal{M}_{(g_1,S_1)}(M,\zeta_k)\cap\bigcap_i(s_i\mathrm{Res}_i)^{-1}(0\right.$$

がその境界に含まれることは明らかであろう．問題はコンパクト性である．この証明は $\mathcal{CM}_{para}(M,\zeta_k)$ を使って定理 3.5.8 と同様にできる．ただし一つ注意することは，今考えているのは余計にパラメータがある場合であるから，定理

3.5.8 の証明でまだ「1 つ分次元に余裕がある」ことを見なければいけない点である．

補題 3.5.11 と 1 次元多様体の境界の向きも込めた位数が 0 であることより $\left(\mathcal{M}_{(g_0,S_0)}(M,\zeta_k)\cap\bigcap_i(s_i\mathrm{Res}_i)^{-1}(0)\right)\cup-\mathcal{M}_{(g_1,S_1)}(M,\zeta_k)\cap\bigcap_i(s_i\mathrm{Res}_i)^{-1}(0)$ の位数は 0，つまり

$$Q(M;\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;\zeta_k;g_0,S_0;s_i)=Q(M;\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;\zeta_k;g_1,S_1;s_i)$$

次に曲面と切断の方を動かそう．一つずつやればよいから d 番目だけ動かす．すなわち Σ_d^t $(t=0,1)$ をコホモロジー類 $[\Sigma_d^0]=[\Sigma_d^1]$ を実現する二つの曲面とし，s_d^t $(t=0,1)$ を $\mathcal{B}_+(\Sigma_d^t)$ 上の直線束 L_d^t の切断とする．まず $[\Sigma_d^0]=[\Sigma_d^1]$ より，$\Sigma_d^0\cup\Sigma_d^1$ を含む 3 次元空間（多様体とは限らない） Z があって $[\Sigma_d^0]=[\Sigma_d^1]$ が Z 上成立する．$i\neq j,\ i\neq d,\ j\neq d$ に対して$\Sigma_i\cap\Sigma_j\cap Z=\emptyset$ を仮定してよい．また摂動 S_t $(t\in[0,1])$ の台は Z と交わらないようにとる（前と同じ理由でこう仮定してよい）．

$\mathcal{B}_{*,+}(Z)$ で Z 上の接続のゲージ同値類で自明または既約な接続に対応するもの全体を表す．制限写像 $\mathrm{Res}^t:\mathcal{B}_{*,+}(Z)\to\mathcal{B}(\Sigma_d^t)$ を考える．この像が $\mathcal{B}_{*,+}(\Sigma_d^t)$ に入っていると仮定する．(前保留した仮定 3.5.5 と同様）．$[\Sigma_d^0]=[\Sigma_d^1]$ より $\mathrm{Res}^{0^*}(L_d^0)\cong\mathrm{Res}^{1^*}(L_d^1)$ が成立する．(これには族の指数がコホモロジー的に記述できることの証明が必要である．実は我々はこの証明をサボっていた．ここでもそれは省略する.）直線束 $\mathrm{Res}^{0^*}(L_d^0)\cong\mathrm{Res}^{1^*}(L_d^1)$ を L_d^Z と書く．s_d^t $(t=0,1)$ は L_d^Z の切断を導く．この二つの切断の間のホモトピーを s_d^t $(t\in[0,1])$ としよう．

制限写像 $\mathrm{Res}_Z:\mathcal{M}_{para}(M,\zeta_k)\to\mathcal{B}(Z)$ の像が $\mathcal{B}_{*,+}(Z)$ に含まれると仮定する．(再び保留した仮定 3.5.5 と同様である.)

さて次の空間を考えよう．

$$\bigcup_t\left(\bigcap_{i=1}^{d-1}(s_i\mathrm{Res}_i)^{-1}(0)\cap(s_d^t\mathrm{Res}_Z)^{-1}(0)\right)\times\{t\}\subseteq\mathcal{B}(M,\zeta_k)\times[0,1]\tag{3.5.1}$$

容易にわかるように s_d^t が generic ならば，この空間は 1 次元多様体でその境

界には

$$\left(\bigcap_{i=1}^{d-1}(s_i\mathrm{Res}_i)^{-1}(0)\cap(s_d^0\mathrm{Res}_Z)^{-1}(0)\right)\cup-\left(\bigcap_{i=1}^{d-1}(s_i\mathrm{Res}_i)^{-1}(0)\cap(s_d^1\mathrm{Res}_Z)^{-1}(0)\right)$$

が含まれる．したがって (3.5.1) の空間がコンパクトであることが示されれば，

$$\begin{aligned}&Q(M;\Sigma_1,\cdots,\Sigma_{d-1},\Sigma_d^0;\zeta_k;g,S_0;s_1,\cdots,s_{d-1},s_d^0)\\&\quad=Q(M;\Sigma_1,\cdots,\Sigma_{d-1},\Sigma_d^1;\zeta_k;g,S_0;s_1,\cdots,s_{d-1},s_d^1)\end{aligned}$$

が示され証明が終わる．

コンパクト性の証明は前 2 回と同じである．ただし「使える」曲面の一つが 3 次元になってしまったので，ちょっとだけ変わる．これに気をつければ同じなので詳細は読者に任せることにしたい．

以上で定理 3.5.10 の証明は完成した． 証明終わり

最後に保留した仮定 3.5.5 について注意する．正確に言えばこの仮定がいつも満たされるようにできるか筆者にはわからない．これが必要であると考えられた理由を思い出してみよう．接続全体の空間 $\mathcal{A}(\Sigma_i)$ を考え，その上の直線束 $\widetilde{L}_{\Sigma_i}\to\mathcal{A}(\Sigma_i)$ を考えよう．これはコーシー (Cauchy)–リーマン (Riemann) 作用素の核と余核の外積代数のテンソル積であった．この直線束上にはゲージ変換群 $\mathcal{G}(\Sigma)$ が作用していた．$\{\pm1\}\subseteq\mathcal{G}(\Sigma_i)$ は $\mathcal{A}(\Sigma_i)$ の任意の点の等方部分群に含まれているがこの作用はファイバーでも自明だから（補題 2.3.9 の帰結）かまわない．一方 $\mathcal{A}(\Sigma_i)$ の 0 接続のファイバー L_{i0} にはゲージ変換群の作用の等方部分群 $I_0\cong SU(2)$ は自明に作用していた．したがって $\widetilde{L}_{\Sigma_i}\to\mathcal{A}(\Sigma_i)$ は $\mathcal{B}_{*,+}(\Sigma_i)$ の上の直線束を与えたが，これは $\mathcal{B}(\Sigma_i)$ 全体にはのびなかった．したがって写像 $\mathcal{M}(M,\zeta_k)\to\mathcal{B}(\Sigma_i)$ の像が $\mathcal{B}_{*,+}(\Sigma_i)$ に含まれないと，切断 s_i を定義するときに $\mathcal{B}(\Sigma_i)$ 上の切断から導かれるものを選ぶわけにはいかなくなる．切断 s_i が $\mathcal{B}(\Sigma_i)$ 上の切断から導かれるようにとっておかないと，コンパクト化を調べるときバブルの議論で問題が起きた．ただし§2.3 で述べたように直線束 L_i の引き戻し自身は定義できた．

さてこれを解決するには次のようにすればよい．切断 s_i が $\mathcal{B}(\Sigma_i)$ 上の切断

から導かれるようにとっておくのが必要であった理由は，仮定 3.5.1.5 が満たされなければならないからであった．そこで Σ_i を少し膨らませてこの仮定は満たされるが，しかしそれぞれが開集合を含むようにしよう．具体的には $x_i \in \Sigma_i$ を $i \neq j$ のとき $x_i \notin \Sigma_j$ であるようにとり，この x_i を中心にした小さい球体 (4 次元) をΣ_i に足したものを $\widehat{\Sigma}_i$ とおく．これは $\widehat{\Sigma}_i \cap \widehat{\Sigma}_j \cap \widehat{\Sigma}_k = \emptyset$ を満たすから仮定 3.5.1.5 は成り立つ．一方で $\widehat{\Sigma}_i$ は開集合を含むから M 上の既約 ASD 接続の $\widehat{\Sigma}_i$ への制限は既約としてよい．(平坦でない既約 ASD 接続の開集合への制限が再び既約であることを証明しなければならない．これはある種の一意接続性定理である．証明は省略する．)

一方で§2.3 の議論により $\mathcal{B}(\Sigma)$ 上の直線束 L_i の $\mathcal{B}(\widehat{\Sigma}_i)$ への引き戻しは $\mathcal{B}_{*,+}(\widehat{\Sigma}_i)$ 上の直線束に拡張される．したがって切断 s_i は $\mathcal{B}(\widehat{\Sigma}_i)$ 上の切断の $\mathcal{M}(M,\zeta_k)$ への引き戻しとして定めればよい．

さらにこう考えると定理 3.5.8 の証明のところで気になった横断正則性も大丈夫である．なぜならば $\mathcal{B}(\widehat{\Sigma}_i)$ への制限写像は $\mathcal{M}(M,\zeta_k)$ 上で単射であるから，好きなように摂動できる．

これで仮定 3.5.5 が成り立つとして行った議論はすべて正当化される．

第4章　フレアーホモロジーと相対ドナルドソン不変量

§ 4.1　位相的場の理論

この章では前の章で述べたドナルドソン (Donaldson) 多項式を境界のある多様体に拡張したい．この拡張について述べるには，まず位相的場の理論 (topological field theory) について少し述べ，特にアティヤ (Atiyah) の公理を説明しておくのが便利である[1]．

物理的イメージを説明するには境界が二つある多様体 X の場合を説明するのがよいであろう．すなわち X をコンパクトで向きの付いた境界付き 4 次元多様体とし $\partial X = M_1 \cup M_2$ とする．ただし X,M_i の向きと整合的な M_i の法ベクトルは，M_1 上は内側に M_2 上は外側に向いているとする（図 4.1.1）．

このとき（気分としては）法ベクトルの方向が時間の方向であると考える．したがって M_1 上で初期状態が定まりそれが X に沿って時間発展し M_2 上の状態になると考える．(ただし時間軸は $\partial X = M_1 \cup M_2$ の近傍では意味があるが，X が直積でない限りそのほかの場所では意味を持たない.)

量子力学ではある瞬間に状態がとる可能性は，あるヒルベルト空間の元（正確には原点を通る直線なのだがここではそれは忘れる）で表される．そこで M_1 上でとりうる状態の全体を $\mathcal{H}_{M_1}$ で，M_2 上でとりうる状態の全体を $\mathcal{H}_{M_2}$ で表すこと

---

[1] 位相的場の理論全体がアティヤの公理で捉えられると考えるのは正しくないが，本書の目的にはアティヤの公理は十分な枠組みを与える．

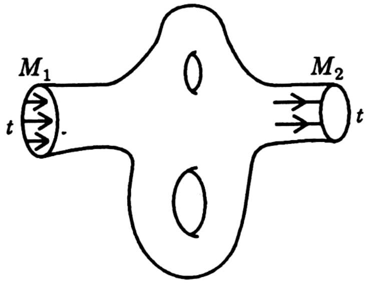


図 4.1.1

にしよう．すると X に沿って時間発展は準同型写像 $Z_X \in Hom(\mathcal{H}_{M_1}, \mathcal{H}_{M_2})$ として与えられる．すなわち始めに状態 $x \in \mathcal{H}_{M_1}$ であったとき，これが $y \in \mathcal{H}_{M_2}$ に変化する確率が $|\langle Z_X x|y\rangle|^2$ であると考える．

このイメージに基づいて数学的な定式化をきちっとやると，次のアティヤの公理になる．

公理 4.1.1　位相的場の理論とは，向きが付いた n 次元閉多様体 X に対して数 Z_X，向きが付いた $n-1$ 次元閉多様体 M に対してヒルベルト空間 $\mathcal{H}_M$（ここには M の可微分同相の作る群 $Diff(M)$ が作用する），M を境界として持つ向きが付いた n 次元閉多様体 X に対して $\mathcal{H}_M$ の元 Z_X を対応させるもので，次の公理を満たすものである．

(4.1.1.1)　$\mathcal{H}_{-M} = (\mathcal{H}_M)^*$．ここで $-M$ は M の向き付けを変えたもの．$*$ は双対空間．

(4.1.1.2)　$\mathcal{H}_{M_1 \cup M_2} = \mathcal{H}_{M_1} \otimes \mathcal{H}_{M_2}$．ここで $M_1 \cup M_2$ は（交わりのない）和．

(4.1.1.3)　$\partial X_1 = M_1 \cup -M_2$, $\partial X_2 = M_2 \cup -M_3$ とし，X_1 と X_2 を M_2 に沿ってはったものを X とする（図 4.1.2 参照）．$Z_{X_1} \in \mathcal{H}_{\partial X_1} = \mathcal{H}_{-M_1} \otimes \mathcal{H}_{M_2} = Hom(\mathcal{H}_{M_1}, \mathcal{H}_{M_2})$，$Z_{X_2} \in \mathcal{H}_{\partial X_2} = \mathcal{H}_{-M_2} \otimes \mathcal{H}_{M_3} = Hom(\mathcal{H}_{M_2}, \mathcal{H}_{M_3})$, $Z_X \in \mathcal{H}_{\partial X} = \mathcal{H}_{-M_1} \otimes \mathcal{H}_{M_3} = Hom(\mathcal{H}_{M_1}, \mathcal{H}_{M_3})$ で

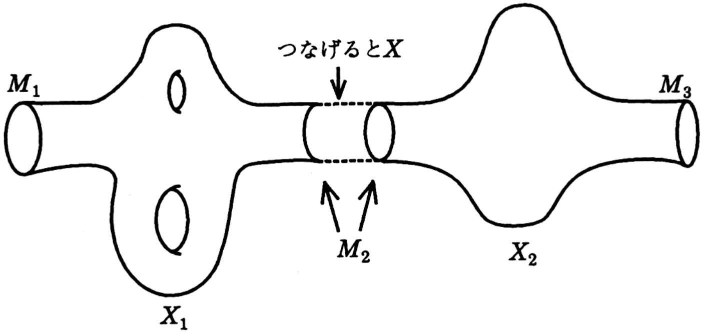


図 4.1.2

あるが，これらは $Z_X = Z_{X_2} \circ Z_{X_1}$ を満たす．

(4.1.1.4)　$Z_{M\times[0,1]} = id \in (\mathcal{H}_M)^* \otimes \mathcal{H}_M.$

ここではこの公理系は考え方のガイドラインとして使うだけなので，必要な性質が全部はいっているかどうかなど，細かいことはあまり気にしないことにする．

この公理系を満たす理論の例としては，共形場の理論とウィッテン (Witten)–ジョーンズ (Jones) 不変量（$n = 3$）([W6])，シンプレクティック多様体へのリーマン面からの概複素写像から作るグロモフ (Gromov)– ウィッテン不変量＋（シンプレクティック）フレアー (Floer) ホモロジーに関わるもの（$n = 2$）がある．とはいってもいずれもこの公理をそのまま満たすわけではなく，若干の修正が必要である．

そうしてもう一つの大切な例がここで述べるドナルドソン不変量＋（ゲージ理論）フレアーホモロジーである．

境界付き多様体のドナルドソン多項式を考えるのに，まず§2.2 で述べた粗い考え方に戻ろう．第 2 章では 4 次元多様体には記号 Mを当てたが，この章では 4 次元多様体と 3 次元多様体が両方登場するので，区別するために前者には

X, Y，後者には M, N を当てよう．

さて Xを向きの付いたコンパクトな4次元多様体としその境界を Mとする．Xにはリーマン計量を入れ境界付近では $M \times (-1, 0]$ と等長的であるとしよう．X上に $SU(2)$ 束ζをとり，§2.2 にならってモジュライ空間

$$\mathcal{M}(X,\zeta) = \{[A] \in \mathcal{B}(X,\zeta) \,|\, *F_A = -F_A\}$$

を考える．関数空間などはまだ指定しない．ただここでは接続にもゲージ変換にも境界条件は考えないことだけ注意しておく．制限を考えることにより写像 $\pi_M : \mathcal{B}(X,\zeta) \to \mathcal{B}(M,\zeta)$ が定まる．

「「定義 4.1.2」」　Xの相対ドナルドソン不変量とは $(\pi_M)_*([\mathcal{M}(X,\zeta)]) \in H_*(\mathcal{B}(M,\zeta))$ のことである．

これは極めていかがわしい「定義」なので2重に括弧が付いている．とりあえずは $\mathcal{M}(X,\zeta)$ の基本ホモロジー類が何らかの意味で定義され，それがホモロジー群 $H_*(\mathcal{B}(M,\zeta))$ の元を定めるとして話を進めよう．(すぐに見るように Xが境界を持つとき $\mathcal{M}(X,\zeta)$ は無限次元である．したがってその基本ホモロジー類は無限次のホモロジー類になる．定義 4.1.2 がいかがわしいゆえんである.)

定義 4.1.2 をひとまず認めると，位相的場の理論の公理に従えば相対不変量 (公理 4.1.1 では Z_Xと書いた) が住む場所すなわち $\mathcal{H}_M$はこの場合ホモロジー群 $H_*(\mathcal{B}(M,\zeta))$ である．

公理 4.1.1 の中でもっとも中心的な公理である (4.1.1.3) を考えよう．ここでは簡単のため$\partial X_1 = -\partial X_2 = M$の場合を考える．この場合は $X = X_1 \cup_M X_2$ とおくと公理は

$$Z_X = \langle Z_{X_1} | Z_{X_2} \rangle$$

と表される．(Z_Xは数で $Hom(\mathbf{R},\mathbf{R}) = Hom(\mathcal{H}_\emptyset, \mathcal{H}_\emptyset)$ の元とみなしている.)

我々の場合これは次のように考えられるであろう．まず $\mathcal{B}$であるがひどく粗っぽくいうと

$$\mathcal{B}(X,\zeta) = \mathcal{B}(X_1,\zeta) \times_{\mathcal{B}(M,\zeta)} \mathcal{B}(X_2,\zeta) \tag{4.1.1}$$

と考えられるであろう．ここで$\times_{\mathcal{B}(M,\zeta)}$はファイバー積 (Fiber product) を表す．すなわち

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}(X_1,\zeta)\times_{\mathcal{B}(M,\zeta)}\mathcal{B}(X_2,\zeta)\\&\quad=\{([A],[B])\in\mathcal{B}(X_1,\zeta)\times\mathcal{B}(X_2,\zeta)|\pi_M([A])=\pi_M([B])\}\end{aligned}$$

この部分集合として考えると

$$\mathcal{M}(X,\zeta)=\mathcal{M}(X_1,\zeta)\times_{\mathcal{B}(M,\zeta)}\mathcal{M}(X_2,\zeta) \tag{4.1.2}$$

となる．この式はX_1上の接続とX_2の接続の組でM上一致するものはX上の接続を与えるという感じに基づいている．もっとも接続は関数ではないので，M上一致するだけではMの直交方向でどうなっているかわからないからおかしいではないかと感ずるかもしれない．その感覚は正常であるが，さらにゲージ変換群で割っていることまで勘定に入れると大丈夫である．(§1.2 で述べた同時刻ゲージで考える.) ともあれとりあえず信じて進めさせて欲しい．

さてドナルドソン不変量は数ではなくて多項式なので，位相的場の理論の公理を本当は少し修正しなければならない．ここは煩雑さを避けてとりあえずモジュライ空間が 0 次元の場合を考えよう．するとその位数がドナルドソン不変量であろう．(本当はバブルに絡む問題でそういう場合は定義しづらい．(仮定 3.5.1.4 を満たさない.) ただし構造群を $SO(3)$ にするとちゃんと定義できる場合がある．これについては第 5 章参照.)

まあ細かいことはとにかく

$$Z_X=\#\mathcal{M}(X,\zeta)$$

と思うことにすると，(4.1.2) から

$$Z_X=\pi_{M*}([\mathcal{M}(X_1,\zeta)])\bullet\pi_{M*}([\mathcal{M}(X_2,\zeta)])$$

となるであろう．ここで$\bullet$は交叉型式

$$\bullet:H_*(\mathcal{B}(M,\zeta))\otimes H_{\dim\mathcal{B}(M,\zeta)-*}(\mathcal{B}(M,\zeta))\to\mathbf{Z}$$

である．すると (4.1.1) は「ヒルベルト空間」$H_*(\mathcal{B}(M,\zeta))$ 上で$\bullet$を内積だと思えば満たされることになる．

むろんここでの問題点は $\dim \mathcal{B}(M,\zeta)=\infty$ である点である．すなわち交叉形式•がうまく定義できるためには，$[\mathcal{M}(X_1,\zeta)]$ か $[\mathcal{M}(X_2,\zeta)]$ の少なくともどちらか一方の「サイクル」が無限次元のサイクルでなければならない．

この二つで，一方が有限次元もう一方が無限次元になる理由はないから，この無限大は両者が半分ずつ分け合ってどちらも2分の無限大次のサイクルと考えるのが適当であろう．

かくして我々は $H_{\infty/2}(\mathcal{B}(M,\zeta))$ なるホモロジー群，そこの元 $\pi_{M*}([\mathcal{M}(X_1,\zeta)])$，そして交叉形式 $\bullet : H_{\infty/2}(\mathcal{B}(M,\zeta))\otimes H_{\infty/2}(\mathcal{B}(M,\zeta))\to \mathbf{Z}$ を定義しなければならない．これを行うのが次節以後この章の目的である．

§ 4.2 フレアーホモロジー概説

I ウィッテン複体

さてまず $\mathcal{B}(M,\zeta)$ の「無限次のホモロジー」を定義することから始めよう．このために用いられるのが§0.2で述べたモース理論である．ここで§0.2の続きに戻りウィッテン複体の定義をしよう．

有限次元の向きの付いた閉多様体 V とその上のモース (Morse) 関数 f を考えよう．(この章では X,M はそれぞれ4,3次元の多様体を表す約束だった．V の次元は何でもよい.) f の臨界点 p,q に対して次のモジュライ空間を考えよう，

$$\mathcal{M}(p,q)=\left\{\ell:\mathbf{R}\to M\;\middle|\;\begin{array}{l}\frac{d\ell}{dt}=-\mathrm{grad}_\ell f\\ \lim_{t\to-\infty}\ell(t)=p\\ \lim_{t\to+\infty}\ell(t)=q\end{array}\right\}$$

この空間は§0.2の記号を使うと $S_q\cap U_p$ と表される．($\ell\mapsto\ell(0)$ で1対1対応が与えられる.) この空間の上には群 $\mathbf{R}$ が $(s\cdot\ell)(t)=\ell(t+s)$ で作用する．この作用による商空間を $\overline{\mathcal{M}}(p,q)$ で表す．

$\mathcal{M}(p,q)=S_q\cap U_p$ であったが一般にはこの二つ S_q と U_p は横断的に交わるとは限らない．しかしモース関数 f を少し動かすことによりいつも S_q と U_p が横断的に交わるようにとることができる．以下これを仮定する．(この仮定のことを勾配ベクトル場 $\mathrm{grad} f$ がモース–スメイル (Smale) ベクトル場であると言い表す.) このとき $\mathcal{M}(p,q)$,$\overline{\mathcal{M}}(p,q)$ は滑らかな多様体になる．$\dim S_q=\eta(p)$,$\dim U_p=n-\eta(p)$ であるから（ここで $\eta(p)$ はモース指数，n は多様体 V の次元を表す）次の式を得る．

(4.2.1)
$$\dim\mathcal{M}(p,q)=\eta(p)-\eta(q)$$
$$\dim\overline{\mathcal{M}}(p,q)=\eta(p)-\eta(q)-1$$

ここで，空間 $\mathcal{M}(p,q)$ の向きについて述べておく．まず任意の臨界点 p に対してその安定多様体 S_pの向きを与えておく．(この向きの決め方は任意で，$\overline{\mathcal{M}}(p,q)$ の向きはこの分の不定性が残る.）すると Vの向きと $T_pS_p \oplus T_pU_p = T_pV$から U_pの向きが定まる．したがって $\mathcal{M}(p,q) = S_q \cap U_p$から $\mathcal{M}(p,q)$ の向きも決まる．$\mathcal{M}(p,q)$ の向きと $\mathbf{R}$ の向きから$\overline{\mathcal{M}}(p,q)$ の向きも定まる．特に$\overline{\mathcal{M}}(p,q)$ が 0 次元のとき（すなわち$\eta(p) - \eta(q) = 1$ のとき）この向きは$\overline{\mathcal{M}}(p,q)$ の各点に正または負の符号を与えることに対応する．

ところで$\overline{\mathcal{M}}(p,q)$ が 0 次元のとき，これがコンパクトであることを示すことができる．したがって向きを込めた位数$\#\overline{\mathcal{M}}(p,q)$ が定義される．$\#\overline{\mathcal{M}}(p,q)$ を $\langle\partial p, q\rangle$ とおく．§0.2 の言葉を用いると $\langle\partial p, q\rangle$ は，$S_q(c)$ と $U_q(c)$ の $V(c) = \{x \in V | f(x) = c\}$ での交点数である ($f(p) > c > f(q)$).

さてモース関数 fのウィッテン複体 (Witten complex)$C_*(V,f)$ とは次のように定義される．

$$C_k(V,f) = \bigoplus_{\substack{p \in Cr(f) \\ \eta(p)=k}} \mathbf{Z}[p]$$

すなわち $C_k(V,f)$ とはモース指数 kの臨界点の個数の生成元を持つ自由アーベル群である．また$\partial : C_k(V,f) \to C_{k-1}(V,f)$ は

$$\partial[p] = \sum \langle\partial p, q\rangle[q]$$

で定義される．

定理 4.2.1　$\partial\partial = 0$ でありしかも

$$\frac{\text{Ker } (\partial : C_k(M,f)) \to C_{k-1}(M,f)}{\text{Im } (\partial : C_{k+1}(M,f)) \to C_k(M,f)} \cong H_k(M;\mathbf{Z})$$

この定理をここに書いた形で述べたのはウィッテンとフレアーである．ここでは$\partial\partial = 0$ の証明のあらましだけを述べよう．

p をモース指数 kの臨界点とする．$\partial\partial[p] = 0$ を示さねばならない．定義にし

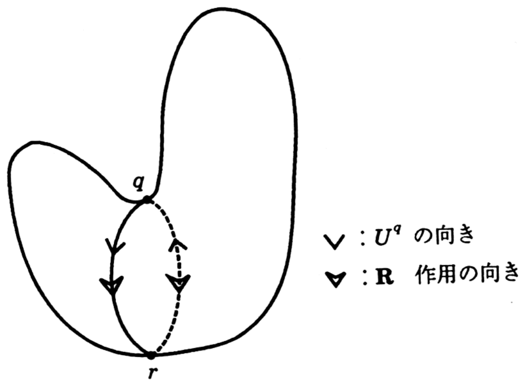


図 4.2.1

たがって計算すると

$$\begin{aligned}\partial\partial[p] &= \sum\nolimits_{\mu(q)=k-1}\langle\partial p, q\rangle\partial[q] \\ &= \sum\nolimits_{\mu(q)=k-1}\sum\nolimits_{\mu(r)=k-2}\langle\partial p, q\rangle\langle\partial q, r\rangle[r]\end{aligned}$$

よって$\eta(p)=k,\ \eta(r)=k-2$ なる任意の p,rに対して

$$\sum_{\eta(q)=k-1}\langle\partial p, q\rangle\langle\partial q, r\rangle = 0 \tag{4.2.2}$$

を示せばよい．そのためにモジュライ空間$\overline{\mathcal{M}}(p,r)$ を考えよう．式 (4.2.1) よりこれは 1 次元の多様体である（向きが付いている）．次の補題が定理 4.2.1 の証明の主要なアイディアである．

補題 4.2.2 $\eta(p)=k,\ \eta(r)=k-2$ なる任意の p,rに対して$\overline{\mathcal{M}}(p,r)$ のコンパクト化$\mathcal{CM}(p,r)$ が存在し，その境界は$\bigcup_q\overline{\mathcal{M}}(p,q)\times\overline{\mathcal{M}}(q,r)$ と（向きも込めて）可微分同相である．

補題 4.2.2 はフレアーホモロジーが関わる無限次元の場合に詳しく証明するので，ここでは証明しない．ただし図 0.2.1 の例の場合を述べておこう．

この場合$\overline{\mathcal{M}}(p_2,q)$ は 1 点，$\overline{\mathcal{M}}(q,r)$ は 2 点である．後者の元は図 4.2.1 の 2 本の線に対応する．qの不安定多様体の U_qの向きを，たとえば手前では下に向

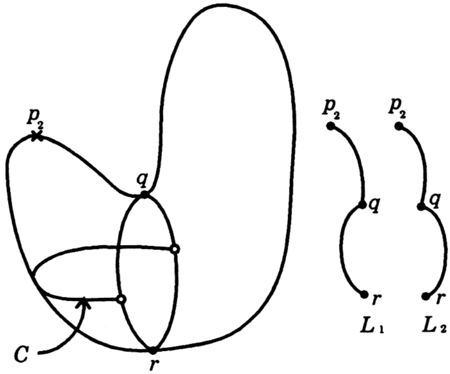


図 4.2.2

かい向こう側では上に向かうように与えよう．$U_q \cap S_r = \mathcal{M}(q,r)$ への $\mathbf{R}$ の作用は常に上から下であるから，商空間$\overline{\mathcal{M}}(q,r)$ の向き付けは手前の線に対応する元が+，向こう側の線に対応する元が−である．すなわちこの二つは打ち消し合う．

ところで $\mathcal{M}(p_2,r)$ の任意の元は図 4.2.2 の線分 Cと必ず交わる．これから $\overline{\mathcal{M}}(p_2,r) \cong (0,1)$ がわかる．この集合をコンパクト化するには両端の 2 点をつけ加える必要がある．それには図 4.2.2 の 2 つの「2 つにちぎれた軌道」L_1と L_2を追加すればよい．この二つの元が直積$\overline{\mathcal{M}}(p_2,q) \times \overline{\mathcal{M}}(q,r)$ の 2 点に対応している．

さて補題 4.2.2 を認めると式 (4.2.2) は直ちに示せる．それには 1 次元多様体に対してその境界の数は向きも込めて考えると 0 であることに注意すればよい．すなわち

$$0 = \#\partial\overline{\mathcal{M}}(p,q) = \#\bigcup_q \overline{\mathcal{M}}(p,q) \times \overline{\mathcal{M}}(q,r) = \sum_q \langle\partial p, q\rangle\langle\partial q, r\rangle$$

以上が定理 4.2.1 の証明の粗筋である．

ここで蛇足ではあるが，§0.2 で高次元ポアンカレ (Poincaré) 予想について述べたことを補足しておこう．そこで述べたポアンカレ予想の証明のあらましは

次のとおりであった．ホモトピー球面 M に対してまずモース関数をとり，M のホモロジーについての情報から，臨界点の間の$-\mathrm{grad}f$の軌道の代数的数（正負で打ち消し合う分を込めた数）の情報を引き出し，ホイットニー (Whitney) のトリックを用いてこれを幾何学的な数の情報に直し，それを用いて臨界点の数を減らしていく．これで臨界点を最大値，最小値に対応する二つに減らせれば証明が完成する．

この中のホモロジーの情報から$-\mathrm{grad}f$の軌道の代数的数の情報を導くところは，上で述べたウィッテン複体の考え方が使える．実際 $\langle\partial p, q\rangle$ とは p, q を結ぶ$-\mathrm{grad}f$ の軌道の代数的数に他ならない．もう少し言うと次のことをまず用いる．

$C_k(M, f)$ の標準基底（臨界点に対応）について境界作用素を考える．基本行列（対角成分が 1 でそれ以外の成分は一つを除いて 0 である行列）による基底の取り換えに対して，モース関数 f' で次の性質を持つものが存在する: $C_k(M, f')$ の標準的な基底を用いて境界作用素を行列で表すと，これが $C_k(M, f)$ の境界作用素を与えられた基本行列で変換したものになっている．f' はハンドルのずらしを用いて構成できるのだがその構成は省略する．

さて M はホモトピー球面であったからそのホモロジーは 0 次と最高次を除いては 0 である．したがってウィッテン複体の基底を適当にとると，境界作用素が隣り合った次数の生成元を一つずつ打ち消すようにすることができる．上の注意と，整数係数で行列式が 1 の行列が必ず基本行列の積になることを用いると，この基底が，あるモース関数の臨界点に対応しているとしてよい．すなわち結局

$$\widehat{C}_*(M, f') = \bigoplus_{p_i, q_i \in Cr(f)} \mathbf{Z}[p_i] \oplus \mathbf{Z}[q_i]$$

で $\partial[p_i] = [q_i]$ なるモース関数 f' がとれる．ここで $\widehat{C}_*(M, f')$ のハットは 0 次と最高次のホモロジーの生成元の分を除いていることを表す．これで (0.2.13) を使って臨界点を消去する前提が代数的には満たされたわけである．後はホイットニートリックを用いる．

上の議論は少しごまかしていて基本群の関わる部分を端折っている．実は最初

にモース指数1の臨界点を単連結性を使って消去してからこの議論をするのだが，本書の主旨とはずれるのでこの辺でやめよう．詳しくはミルナー (Milnor) の名著 [Mi2] を見ていただきたい．

さて有限次元のアナロジーはここまでにして無限次元の場合に戻ろう．

前節で述べたようにフレアーホモロジーとは3次元多様体の上の接続全体のゲージ同値類の空間 $\mathcal{B}(M,\zeta)$ 上の $\infty/2$ 次元のホモロジー群であった．これを**定義**するためにモース理論を用いる．(有限次元の場合にはホモロジーの定義そのものは知られていたので，モース理論はそれを計算するために用いられた．無限次元の場合には定義そのものが知られていないのでモース理論は定義のために用いられる．(この辺がフレアーホモロジーの計算の難しい理由かもしれない．))

さてモース理論を展開するためにはモース関数を $\mathcal{B}(M,\zeta)$ 上に与える必要がある．すなわち $\mathcal{A}(M,\zeta)$ (接続全体の空間) 上にゲージ不変な関数を与える必要がある．ゲージ不変な量というとまず曲率を思いつく．すなわちたとえば曲率のノルムをとることが考えられる (つまりヤン (Yang)–ミルズ (Mills) 汎関数の3次元の場合である)．しかしこれはここでの目的にはふさわしくない．その理由はヤン–ミルズ汎関数に対する臨界点の指数がいつも有限であることである．すなわち $\mathcal{B}(M,\zeta)$ 上でヤン–ミルズ汎関数のヘッセ (Hesse) 行列を考えると，いつも有限個の負の固有値しかない．これはたとえば4次元のヤン–ミルズ汎関数の臨界点の典型例が (反) 自己双対接続で，これは極小値であることを考えれば納得されるであろう．したがってヤン–ミルズ汎関数をモース関数として使って得られるのは，有限次のホモロジー群すなわち $\mathcal{B}(M,\zeta)$ の普通のホモロジー群である．

そこでここでは別の汎関数すなわちチャーン (Chern)–サイモンズ (Simons) 汎関数を用いる．チャーン–サイモンズ微分型式の定義は (1.2.4) で与えたがここで復習しよう．まずここで考えているのは3次元多様体上の $SU(2)$ 束 ζ であるが，§1.3 で4次元の場合に論じたのと同様に議論すると3次元多様体上の $SU(2)$ 束はすべて自明であることが示せる．すると $\mathcal{A}(M,\zeta) = su(2) \otimes \Lambda^1(M)$ である．すなわち $\mathcal{A}(M,\zeta)$ の元は (M 全体で) 2×2 行列値の微分型式とみなせる．こうみなしたとき

定義 4.2.3

$$cs(a) = \frac{1}{8\pi^2} Tr\left(a \wedge da + \frac{2}{3} a \wedge a \wedge a\right)$$

（以後 3 次元多様体上の接続には小文字を，4 次元多様体上の接続には大文字を用いる.）

チャーン–サイモンズ汎関数のゲージ不変性について論じよう．我々が考えているゲージ変換群は $\mathcal{G}(M,\zeta)$ であるが，ここでは束 ζ は自明であるから $\mathcal{G}(M,\zeta) = C^\infty(M; SU(2))$ （M から $SU(2)$ への C^∞ 級写像の全体）である．またその元 $g \in C^\infty(M; SU(2))$ の $a \in \mathcal{A}(M,\zeta)$ への作用は

$$g^* a = g^{-1} dg + g^{-1} a g$$

で与えられる（この作用は右からの作用である）．ここで次のことを示そう（記号 deg の意味は証明中に説明する）．

補題 4.2.4

$$cs(g^* a) = cs(a) + \deg g$$

証明 $a_t \in \mathcal{A}(M,\zeta)$ を

$$\begin{cases} a_t = a & t \in [0,\varepsilon] \\ a_t = g^* a & t \in [1-\varepsilon, 1] \end{cases}$$

となるように選ぶ．これから $M \times [0,1]$ 上の自明束の接続 A で，$M \times \{0\}$ で a,$M \times \{1\}$ で $g^* a$ となるものが定まる（A は $[0,1]$ 方向には 0 と定義する）．ゲージ変換 g は M 上の自明束の自己同型を与えていると考えることができるから，これを使って，$M \times [0,1]$ 上の自明束と A から $M \times \{0\}$ と $M \times \{1\}$ ではり合わせて $M \times S^1$ 上の $SU(2)$ 束 ξ とその上の接続 $\widehat{A}$ が定まる．チャーン数

$$c^2(\xi) = \int_{M \times S^1} c^2(\widehat{A})$$

は整数でこれは束 ξ からのみ決まり接続によらない．束 ξ は g のホモトピー類のみから定まる．ところで $SU(2)$ は S^3 と同相であるから 3 次元多様体からの写像

$: M \to S^3$のホモトピー類はそのH_3に導く写像$H_3(M;\mathbf{Z}) \to H_3(S^3;\mathbf{Z}), \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$のみで決まる.(このことの証明は省略する.) これは$\mathbf{Z} = Hom(\mathbf{Z},\mathbf{Z})$の元とみなせる.($M$および$SU(2)$には向きを与えているので$H_3$の生成元は決まっている.) この元を$\deg g$と書く. $c^2(\xi)$が$g \in \mathcal{G}(M,\zeta)$の合成について加法的であること (すなわち$g_1$,$g_2$,$g_1g_2$から作った束をそれぞれ$\xi_1,\xi_2,\xi$とすると$c^2(\xi_1)+c^2(\xi_2) = c^2(\xi)$であること) は定義より明らかであるから, $c^2(\xi) = k\cdot\deg g$である. チャーン類の整数性 (証明していないが) よりkは整数でなければならない. また$c^2(\xi) = 1$なるξをこのやり方で作ることができるので$k = \pm 1$である. 符号はそのうちわかってくるので今は放っておく.

さてここで自明な式

$$\int_{M\times[0,1]} c^2(A) = \int_{M\times S^1} c^2(\widehat{A})$$

と補題 1.2.19 より

$$\int_{M\times S^1} c^2(\widehat{A}) = \int_{M\times[0,1]} dcs(A)$$

ここでストークス (Stokes) の定理より

$$\begin{aligned} \int_{M\times[0,1]} d\,cs(A) &= \int_{M\times\{1\}} cs(A) - \int_{M\times\{0\}} cs(A) \\ &= cs(g^*a) - cs(a) \end{aligned}$$

証明終わり

補題 4.2.4 よりチャーン–サイモンズ汎関数は$\mathcal{B}(M,\zeta) \to \mathbf{R}/\mathbf{Z} = S^1$なる写像とみなすことができる. このまま考えてもよいがここでは次のようにすることにする. まず$\mathcal{G}_{conn}(M,\zeta) = \{g \in \mathcal{G}(M,\zeta) | \deg g = 0\}$とおき$\widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta) = \mathcal{A}(M,\zeta)/\mathcal{G}_{conn}(M,\zeta)$とする. 補題 4.2.4 から$cs : \widetilde{\mathcal{B}}(M,\eta) \to \mathbf{R}$が定まる. 実は$\mathcal{G}_{conn}(M,\zeta)$は$\mathcal{G}(M,\zeta)$の連結成分で, したがって$\widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta)$は$\mathcal{B}(M,\zeta)$の普遍被覆である.(このことの証明は省略する.)

さてこの関数$cs : \widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta) \to \mathbf{R}$に対してウィッテン複体を構成したい. まずそれには$\widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta)$に計量を入れる必要があるが, これは次のようにする. M上にリーマン計量を一つとる. これを使って$\mathcal{A}(M,\zeta)$上に内積を$\langle a,b\rangle =$

$\int_M \langle a(x), b(x)\rangle * 1_M$で定める．ここで a, b は $\mathcal{A}(M,\zeta)$ の一点での接ベクトルすなわち$\Gamma(M; Ad\ \zeta \otimes \Lambda^1(M))$ の元である．(この節ではまだソボレフ (Sobolev) 空間の取り方などは指定しない.) ($su(2)$ での正定値不変内積 $\langle a(x), b(x)\rangle$ は $-Tr(a(x)b(x))$ である.) この計量はゲージ変換群の作用で不変で，したがって商空間$\widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta)$ 上の計量を与える．

さてこの計量についてチャーン–サイモンズ汎関数の勾配ベクトル場を計算しよう．このために $\mathcal{A}(M,\zeta)$ 上の関数としてのチャーン–サイモンズ汎関数の勾配ベクトル場を計算しよう．

補題 4.2.5

$$\mathrm{grad}_a cs = \tfrac{-1}{4\pi^2} * F_a$$

証明　$a_t, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ を $a_0 = a$, $\left.\frac{da_t}{dt}\right|_{t=0} = b$ なる $\mathcal{A}(M,\zeta)$ の曲線とする．補題は以下の計算から明らかである．

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\,cs(a_t)}{dt}\right|_{t=0} &= \frac{1}{4\pi^2}\frac{d}{dt}\int_M Tr\left(\frac{1}{2}a_t \wedge da_t + \frac{1}{3}a_t \wedge a_t \wedge a_t\right)\Bigg|_{t=0} \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_M Tr\left(\frac{1}{2}b \wedge da + \frac{1}{2}a \wedge db + b \wedge a \wedge a\right) \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_M Tr\,(b \wedge (da + a \wedge a)) \\
&= \frac{-1}{4\pi^2}\int_M \langle b, *F_a\rangle * 1_M
\end{aligned}$$

証明終わり

以下$\frac{1}{4\pi^2}$を書くのがめんどうであるので $su(2)$ の正定値不変内積の方をこの分変えて (すなわち$\widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta)$ などのリーマン計量を定数倍だけ変えて) $\mathrm{grad}_a cs = -*F_a$となっているとする．補題 4.2.5 より$\widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta)$ 上の関数とみなしたときのチャーン–サイモンズ汎関数の勾配ベクトル場が次の (4.2.3) のようにもとまる．

$[a] \in \widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta)$ とすると，この点での$\widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta)$ の接空間は $a \in \mathcal{A}(M,\zeta)$ のゲージ変換群の軌道 $\mathcal{G}_{conn}(M,\zeta)\cdot a$ に対する法ベクトル束の a での軌道である．す

なわち

$$T_{[a]}\widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta) = \frac{T_a\mathcal{A}(M,\zeta)}{T_a(\mathcal{G}_{conn}(M,\zeta)\cdot a)}$$

あるいは計量を使うと $T_{[a]}\widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta)$ は $T_a\mathcal{A}(M,\zeta)$ での $T_a(\mathcal{G}_{conn}(M,\zeta)\cdot a)$ の直交補空間である．この直交補空間は（4 次元多様体の場合に）§2.2 で計算した（この計算は次元とは関係ない）．答えは Ker d_a^*であった．すなわち同型：

$$T_{[a]}\widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta) = \text{Ker } d_a^*$$

がわかった．ところで

$$d_a^*(*F_a) = *d_a(**F_a) = *d_aF_a = 0$$

(最後の等式はビアンキ (Bianchi) の恒等式）より$*F_a$は Ker d_a^*に含まれる．(実はこのことは計算しなくても補題 4.2.4 すなわちチャーン–サイモンズ汎関数のゲージ不変性から従う.）したがって

$$*F_a \in T_{[a]}\widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta)$$

とみなせる．こうみなしたときやはり

$$\text{grad}_{[a]}cs = -*F_a \tag{4.2.3}$$

が成立する．(これは補題 4.2.4 と$\widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta)$ 上の計量の決め方から明らか.）（読者は (4.2.3) の右辺が同型 $T_{[a]}\widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta) = \text{Ker } d_a^*$で移して考えると代表元 a の取り方によらないことを確かめてみるとよい.）

さて (4.2.3) の第一の帰結はチャーン–サイモンズ汎関数の臨界点についての次の主張である．

補題 4.2.6　$[a] \in \widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta)$ がチャーン–サイモンズ汎関数の臨界点であることと a が平坦であること，すなわち $F_a = 0$ は同値である．

これは (4.2.3) から明らかである．

$\widetilde{R}(M) \subseteq \widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta)$,$R(M) \subseteq \mathcal{B}(M,\zeta)$ で平坦接続の同値類全体を表す．さて次

に $[a],[b] \in \widetilde{R}(M)$ としてモジュライ空間

$$\mathcal{M}([a],[b]) = \left\{ \ell : \mathbf{R} \to \mathcal{B}(M,\eta) \;\middle|\; \begin{array}{l} \frac{d\ell}{dt} = -\mathrm{grad}_\ell cs \\ \lim_{t\to-\infty} \ell(t) = [a] \\ \lim_{t\to+\infty} \ell(t) = [b] \end{array} \right\}$$

を考えよう．ここで方程式 $\frac{d\ell}{dt} = -\mathrm{grad}_\ell cs$ は $\ell(t) = [a_t]$ と書いたとき

$$\frac{\partial a_t}{\partial t} = *F_{a_t} \tag{4.2.4}$$

と表される ((4.2.3))．

さてフレアーホモロジーの構成のための大事なアイディア（タウベス (Taubes) による）は方程式 (4.2.4) が $M \times \mathbf{R}$ 上の（反）自己双対方程式であるという事実である．

もう少しきちんと述べよう．まず $M \times \mathbf{R}$ の向きは M の体積要素を Ω_M として $\Omega_M \wedge dt$ が $M \times \mathbf{R}$ の体積要素になるように定める．$t \mapsto a_t (t \in \mathbf{R})$ なる $\mathcal{A}(M,\eta)$ の曲線があったときこれを dt 成分を持たない $M \times \mathbf{R}$ 上の接続とみなすことができる．この接続を A と書こう．すると

補題 4.2.7 a_t が (4.2.4) を満たすことと $F_A = - * F_A$ は同値である．

((4.2.4) での $*$ は 3 次元多様体 M に対するホッジ (Hodge) 作用素で，補題 4.2.7 での $*$ は 4 次元多様体 $M \times \mathbf{R}$ に対するホッジ作用素である．たとえば前者は 1 型式を 2 型式に，後者は 1 型式を 3 型式に変換する．以後紛らわしいときは添字をつけて区別する.)

補題の証明は単なる計算であるがやってみよう．まず

$$\begin{aligned} F_A &= dt \wedge \tfrac{\partial a_t}{\partial t} + d_M a_t + a_t \wedge a_t \\ &= -\tfrac{\partial a_t}{\partial t} \wedge dt + F_{a_t} \end{aligned}$$

よって

$$*_{M\times\mathbf{R}} F_A = - *_M \frac{\partial a_t}{\partial t} dt + *_M F_{a_t} \wedge dt$$

よって F_A, $*_{M\times\mathbf{R}}F_A$の dt 成分を含まない部分を比べて，$F_A = -*F_A \Rightarrow *_M F_{a_t} = *_M \frac{\partial a_t}{\partial t}$ がわかる．一方 $\mathrm{grad}_{a_t} cs = -*_M F_{a_t}$ゆえ，$F_A = -*F_A \Rightarrow \frac{da_t}{dt} = -\mathrm{grad}_{a_t} cs$．逆の証明も同様である．　証明終わり

最後に前に証明した補題 1.2.8 を思い出そう．つまり $M\times\mathbf{R}$ 上の任意の接続はゲージ変換で dt 成分を持たない接続に変換することができる．これを使うと $M\times\mathbf{R}$ の上の（反）自己双対接続のゲージ同値類のモジュライ空間として $\mathcal{M}([a],[b])$ を表すことができる．もう少し正確に述べるためにゲージ変換の境界条件を設定しよう．まず $a\in\mathcal{A}(M,\zeta)$ に対して $I_a = \{g\in\mathcal{G}(M,\zeta) | g^*a = a\}$ とおく．I_aは $SU(2)$,$U(1)$,$\{\pm1\}$ のどれかと同型で $\{\pm1\}$ と同型なとき既約というのであった．さて $a,b\in\mathcal{A}(M,\zeta)$ に対して

$$\mathcal{G}(M\times\mathbf{R},\zeta;a,b) = \left\{ g : M\times\mathbf{R}\to SU(2) \;\middle|\; \begin{array}{l} \lim_{t\to+\infty} g(\cdot,t)\in I_b \\ \lim_{t\to-\infty} g(\cdot,t)\in I_a \end{array} \right\}$$

とおく.（定義中の極限の意味は曖昧である．関数空間を設定るするときに正確にする.）次に

$$\widehat{\mathcal{M}}(a,b) = \left\{ A\in\mathcal{A}(M\times\mathbf{R},\zeta) \;\middle|\; \begin{array}{l} F_A = -*F_A \\ \lim_{t\to-\infty} A = a \\ \lim_{t\to+\infty} A = b \end{array} \right\}$$

とする.（ここでも極限の意味は曖昧なままにしておく.）

これらを使って

$$\mathcal{M}(a,b) = \frac{\widehat{\mathcal{M}}(a,b)}{\mathcal{G}(M\times\mathbf{R},\zeta;a,b)}$$

と定義する．

注意 4.2.8　$g,g'\in\mathcal{G}_{conn}(M,\zeta)$ とすると $\mathcal{M}(a,b) = \mathcal{M}(g^*a, g'^*b)$．これは次のようにして証明できる．まず g,g'を $\mathcal{G}_{conn}(M,\zeta)$ の道でつないで $M\times\mathbf{R}$ 上のゲージ変換$\tilde{g}$で $t << 0$ で g, $t >> 0$ で g'であるものを作る．この$\tilde{g}$によるゲージ変換が$\widehat{\mathcal{M}}(a,b)\cong\widehat{\mathcal{M}}(g^*a, g'^*b)$ なる同型を与える．$\mathcal{M}(a,b) = \mathcal{M}(g^*a, g'^*b)$

はこれから直ちに得られる.

上で定義した $\mathcal{M}(a,b)$ は前の $\mathcal{M}([a],[b])$ と同一である. このことはもうほとんど証明した. このことを後で使うわけではないのでここでは証明を完成させるのはやめて読者に任せる.

さてチャーン–サイモンズ汎関数に対してウィッテン複体を構成するという始めの目的に戻ろう. まず有限次元の場合と同様に $\mathcal{M}(a,b)$ には $\mathbf{R}$ が作用する (接続を $M\times\mathbf{R}$ の $\mathbf{R}$ 方向の移動で動かす). この作用による商空間を $\overline{\mathcal{M}}(a,b)$ と書く.

次の定理が (4.2.1) の類似物である.

「定理 4.2.9」　$\eta:\widetilde{R}(M)\to\mathbf{Z}$ が存在して次を満たす. $\mathcal{M}(a,b)$ は $\eta(a)-\eta(b)$ 次元の多様体である.

定理に括弧がついているのは次の二つの理由からである. 第一に a,b のどちらかが可約であるときこの次元の式は正しくない. これは可約な接続は $\mathcal{B}(M,\zeta)$ の特異点に対応し, そこではモース理論は多様体の場合とは少し様子が違うからである (§4.7 できちんと述べる). 第二に $\mathcal{M}(a,b)$ を多様体にするには横断正則性についての議論が必要であるからである. これらの諸点についてはもう少し先で触れることにしよう.

先に行く前に $\mathcal{B}(M,\zeta)$ の代わりに $\widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta)$ で考えていることの効果について触れる. 注意 4.2.8 は $g,g'\in\mathcal{G}(M,\zeta)-\mathcal{G}_{conn}(M,\zeta)$ に対しては成立しない. 粗く言うと $\mathcal{B}(M,\zeta)$ の代わりに $\widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta)$ で考えることは, $M\times\mathbf{R}$ の両端での ζ (自明束) の自明化を決めていることに当たる. この自明化を取り換えれば, 相対チャーン類 $c^2\in H^4(M\times\mathbf{R},M\times\{\pm\infty\};\mathbf{R})$ が変わる. したがって閉多様体の場合の§2.2 の議論から類推すれば $\mathcal{M}(a,b)$ の次元は a,b を $\mathcal{G}_{conn}(M,\zeta)$ に入っていないゲージ変換で動かしたとき変わることが予想される. この変わり方はやはり相対チャーン類の 8 倍であることがアティヤ–シンガー (Singer) の指数定理からわかる.

以上のことを補題として述べておこう. $\mathcal{G}(M,\zeta)/\mathcal{G}_{conn}(M,\zeta)=\mathbf{Z}$ に注意す

れば，$\mathbf{Z}$ は$\widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta)$ に作用しこの商空間が $\mathcal{B}(M,\zeta)$ である．

補題 4.2.10　$k \in \mathbf{Z}, a, b \in \widetilde{R}(M)$ に対して$\eta(k \cdot a) = 8k + \eta(a)$, $\mathcal{M}(a,b) = \mathcal{M}(k \cdot a, k \cdot b)$.

次に補題 4.2.2 の類似である次の結果を述べる．

「定理 4.2.11」

(1) $\eta(a) = \eta(b) + 1$ のとき$\overline{\mathcal{M}}(a,b)$ は有限集合である．

(2) $\eta(a) = \eta(b) + 2$ であるとき 1 次元多様体$\overline{\mathcal{M}}(a,b)$ のコンパクト化である 1 次元多様体 $\mathcal{C}\overline{\mathcal{M}}(a,b)$ が存在し，その境界は次の式で与えられる．

$$\partial \mathcal{C}\overline{\mathcal{M}}(a,b) = \bigcup_{\eta(c)=\eta(a)+1} \overline{\mathcal{M}}(a,c) \times \overline{\mathcal{M}}(c,b)$$

括弧がついているのはやはり可約接続と横断正則性に関わる問題からである．

以上述べた定理 4.2.9 と定理 4.2.11 はウィッテン複体の構成に必要とされる二つの結果であった．したがって

$$\begin{aligned} CF_k(M) &= \bigoplus_{\substack{a \in \widetilde{R}(M) \\ \mu(a)=k}} \mathbf{Z}[a] \\ \partial[a] &= \sum \langle \partial a, b \rangle [b] \\ \langle \partial a, b \rangle &= \# \overline{\mathcal{M}}(a,b) \end{aligned}$$

とおくことで複体が定義される（可約接続の存在はしばらく忘れて欲しい）．この複体に対するホモロジーがフレアーホモロジーである．

実はこの構成にはまだ何も述べていなかったモジュライ空間の向き付けが必要である．この点にも後で触れる．

本節で証明なしで述べた諸定理は§4.4 以後に順に証明していく．その前に次節では相対ドナルドソン不変量の定義について述べよう．

§ 4.3 相対ドナルドソン多項式

この節では §4.1 で境界付き多様体のドナルドソン不変量について述べたことをもう少し詳しく述べる.(この節では数学的に正確な定義は与えない. 正確な定義は解析学から必要な準備をした後で行う.)

まず有限次元の場合に戻り, 定理 4.2.1 で述べた同型 $H_*(C_*(M,f)) \cong H_*(M, \mathbf{Z})$ を思い出そう. この同型は次のようにして与えられる. $\sum c_i[p_i] \in C_*(M;f)$ をサイクルとする. 安定多様体の和集合 $\sum c_i\overline{U}(p_i)$ を考えよう. (集合に 1 次結合を考えるのは変だが, 正確には $U(p_i)$ を 3 角形分割して特異チェイン複体とみなし, その 1 次結合だと考えればよい.) このとき $\partial \sum c_i\overline{U}(p_i) = 0$ (たとえば特異チェイン複体として) が容易にわかる. 同型 $H_*(C_*(M,f)) \cong H_*(M;\mathbf{Z})$ は, $\sum c_i\overline{U}(p_i)$ が表す $H_*(M;\mathbf{Z})$ の元を, $\sum c_i[p_i] \in C_*(M,f)$ の表す $H_*(C_*(M,f))$ の元に対応させる. たとえば図 0.2.1 のモース関数の場合 (そこでの記号で) $[p_1]+[p_2]$ を考えると, これはサイクルでまた $\overline{U}(p_1)+\overline{U}(p_2)$ は $M=S^2$ 全体の 3 角形分割を与える. 一方 $[p_1]$ はサイクルでなくこのことに対応して $\overline{U}(p_1)$ にも境界がある.

さて無限次元の場合に戻ろう. すなわちモース関数 $cs : \widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta) \to \mathbf{R}$ の場合である. この (汎) 関数の勾配ベクトル場は (4.2.3) 式で与えられ, その積分曲線は (4.2.4) で与えられた. したがって cs の臨界点すなわち $[a] \in \widetilde{R}(M)$ に対して, $-\mathrm{grad}\, cs$ の安定多様体 $S_{[a]}$ は (4.3.1) 式で記述される. (なぜ不安定多様体でなく安定多様体を考えるのかは少しするとわかるので待っていて欲しい.)

$$
S_{[a]} = \left\{ [a_0] \,\middle|\, \begin{array}{l} t \mapsto a_t : [0,\infty) \to \mathcal{A}(M,\zeta) \\ \frac{\partial a_t}{\partial t} = *F_{a_t} \\ \lim_{t\to\infty} a_t = a \end{array} \right\} \tag{4.3.1}
$$

ここで一つ大事な注意をしておかなければならない．すなわち実は (4.3.1) はそのままでは数学的に正当化できないということである．問題点は方程式 (4.2.4) にある．この方程式は初期条件を与えたとき必ずしも解を持つとは限らない．これは空間成分が正定値ではない「放物型方程式」の性質の一つである．((括弧の付かない，本当の) 放物型方程式とは，方程式 $\frac{df}{dt}+Pf=0$ で空間成分 P が正定値楕円型であるものを指した.) 実はゲージ不変性のために (4.2.4) の空間成分 $-*F_{a_t}$ は楕円型ですらないが，この点はおいておくとしても，この作用素 $-*F_{a_t}$ (正確にはその線形化と言うべきか) は正定値ではない．このことは (4.2.4) の初期値問題の解の存在に対して問題を引き起こす．事情を説明するために $-*F_{a_t}$ を線形作用素 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ で置き換えて方程式

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f(x+1,y)=f(x,y+1)=f(x,y)$$

に対する初期値問題

$$f(0,x,y)=\sum c_{k,k'}e^{2\pi(\sqrt{-1}kx+\sqrt{-1}k'y)}$$

を考えよう．この解は形式的に計算すると

$$f(t,x,y)=\sum c_{k,k'}e^{2\pi(\sqrt{-1}kx+\sqrt{-1}k'y)+(k'^2-k^2)t}$$

で与えられる．$t>0$ でこれが収束するためには，$k'\to\infty$ で $c_{k,k'}$ が十分早く 0 に収束する必要があり，しかもその場合でも $f(t)$ は $t=\infty$ まで存在するとは限らない．同様に $t<0$ で収束するには $k\to\infty$ で $c_{k,k'}$ が十分早く 0 に収束する必要がある．すなわちほとんどすべての初期条件に対して方程式 $\frac{df}{dt}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ は解をもたない．

このような事情により (4.2.4) の初期値問題の解は必ずしも存在せず，したがって (4.2.4) は無限次元多様体 $\widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta)$ 上の力学系を**与えない**．このため (4.3.1) が安定多様体であると主張することはそのままでは問題がある．この点はここでは放っておく．(ここはあくまでも背景説明できちんとした数学的な証明ではない.)

さて §4.1 に書いた説明に従えば，M を境界に持つ 4 次元多様体 X_0 の相対ドナルドソン不変量とは$\widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta)$ の 2 分の無限次元のサイクルであって

$$\left\{ \mathrm{Res}_{X_0/M}(A) \;\middle|\; \begin{array}{l} A \in \mathcal{B}(X_0,\zeta) \\ F_A = - * F_A \end{array} \right\} \tag{4.3.2}$$

で与えられた．もうちょっと正確に書こう．まず X_0 はコンパクト（で境界が M）とし，そこにリーマン計量を入れてこの計量に関して境界の近傍が $M \times (-1,0]$ と等長的とする．t を $(-1,0]$ 方向の座標とする．

次に X_0 上の $SU(2)$ ベクトル束 ζ をとる．これの M への制限は自明である．(すべての $SU(2)$ 束は 3 次元多様体上自明であるから.) この自明化を一つ選ぶ．ζ の自明化は一意ではない．ホモトピー類の意味でこの選び方は $\pi_0(Map(M,SU(2))) = \mathbf{Z}$ の分だけある．実はこれを決めることが $\mathcal{B}(M,\zeta)$ の代わりにその普遍被覆 $\widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta)$ を考えることに対応する．それはさておき M 上の ζ の自明化を決めるとζ の X 上の相対チャーン類 $c^2(\zeta) \in H^2(X,M;\mathbf{Z})$ が定まる．以後 ζ と書いたときはその M 上の自明化まで込めて考える．したがってそのチャーン数（整数）が定まっている．これを k としよう（このことを強調するときは ζ_k と書く）．

X 上の ζ の接続 A に対してゲージ変換をすると M の近傍 $M \times (-1,0]$ でそれが dt 成分を持たないようにできる（同時刻ゲージ，補題 1.2.8）．以後この節では断らない限りそう選んでおく．これで (4.3.2) 式に一応の意味がついた．この空間を $\mathcal{M}(X,\zeta)$ と書こう．

さて $\mathcal{M}(X,\zeta)$ の表す「サイクル」をフレアーサイクル ($CF_*(M,\zeta)$ の元) として表したいのであるが，この節の始めに書いた（有限次元の場合の）ウィッテン複体のホモロジーと普通のホモロジーの同型の作り方を考えれば，$\mathcal{M}(X,\zeta)$ に対応するフレアーサイクルは次の式 (4.3.3) で表されるであろう．

$$\sum_{[a]\in\widetilde{R}(M)} (\mathcal{M}(X,\zeta) \bullet S_{[a]})[a] \tag{4.3.3}$$

ここで $\bullet$ は交点数を表す．これは（有限次元の場合に）サイクル $C \subseteq V$ に

対応するウィッテン複体の元が

$$\sum_{p\in Cr(f)} (C\bullet S_p)[p]$$

であることに対応する．ただし総和は交点数がうまく定義できる次数の臨界点についてだけとる．(このことはこの節前半に書いた同型 $H_*(C_*(M,f)) \cong H_*(M;\mathbf{Z})$ の作り方とポアンカレ双対の定義を考えればわかる.)

(4.3.3) の交点数は無限次のサイクルの間のものであるから問題を含んでいる．この交点数 $\mathcal{M}(X,\zeta)\bullet S_{[a]}$ をどう定義すればよいであろうか．両者の定義から素朴に考えればこれは集合

$$\left\{ (A,B) \;\middle|\; \begin{array}{l} A\in\mathcal{B}(X_0,\zeta), B\in\mathcal{B}(M\times[0,\infty),\zeta) \\ F_A=-*F_A, F_B=-*F_B \\ A|_M=B|_M \\ \lim_{t\to\infty} B=a \end{array} \right\}$$

の（符号付きの）位数とみなすべきであろう．ただしここで A は $M\times(-1,0]$ で B は $M\times[0,\infty)$ 全体で同時刻ゲージをとって考えている．

この二つの接続 A と B は M で一致するのであるからはり合わせることができる．(はり合わせるところでは両方とも同時刻ゲージであるから dt 成分はない.) したがって交点数 $\mathcal{M}(X,\zeta)\bullet S_{[a]}$ は次の式 (4.3.4) で定義されるモジュライ空間 $\mathcal{M}(X,\zeta;a)$ の符号付きの位数で与えられるであろう．

$$\mathcal{M}(X,\zeta;a)=\left\{ C \;\middle|\; \begin{array}{l} C\in\mathcal{B}(X,\zeta) \\ F_C=-*F_C \\ \lim_{t\to\infty} C=a \end{array} \right\} \tag{4.3.4}$$

ただしここで $X=X_0\cup M\times[0,\infty)$．すなわち X は完備なリーマン多様体でコンパクト集合を除くと $M\times(-1,\infty)$ に等長的である．

さて前にも述べたとおり，安定多様体 $S_{[a]}$ の定義には問題があって $S_{[a]}$ そのものがうまく定義できない．しかし (4.3.4) のモジュライ空間は（関数空間をう

まくとると）厳密に定義することができ，しかも有限次元になる．すなわち次の定理 4.3.1 が成り立つ．ここで簡単のため a は既約で $H^1(M; Ad\ a) = 0$ と仮定する．

定理 4.3.1 X のコンパクト集合上の generic な摂動に対して $\mathcal{M}(X, \zeta; a)$ は C^∞ 多様体でその次元は

$$\dim \mathcal{M}(X, \zeta; a) = 8k + 3(b_1(X) - 1 - b_2^+(X)) - \eta(a)$$

で与えられる．

定理 4.3.1 の証明は§4.7 で述べる．

定理 4.3.1 の $X = M \times \mathbf{R}$ の場合がフレアーホモロジーの定義に用いられる．ただしこの場合 $X = M \times \mathbf{R}$ のコンパクト集合上での摂動は我々の目的には不十分である．(方程式の $\mathbf{R}$ の作用に関する不変性を壊してはならないから.) $X = M \times \mathbf{R}$ の場合の摂動の仕方は§4.10 で述べる．

さてここではモジュライ空間 $\mathcal{M}(X, \zeta; a)$ のコンパクト化などについての諸定理を述べ，それが相対ドナルドソン不変量の定義と公理 (4.1.1.3) の証明にどのように用いられるかの概略を説明する．そのためのデリケートな点の一つは M 上に自明な接続が存在することである．自明な接続はもちろん既約ではない．これがどんな問題を引き起こすかは後の節に回し，ここでは（この節は厳密さを目指さないので）M 上に自明な接続が存在することは忘れて，M 上の平坦接続はいつも既約でまた $H^1(M; Ad\ a) = 0$ であると仮定する．($H^1(M; \mathbf{Z}) = 0$ の場合は後で述べるように適当な摂動によって自明な接続以外はこの条件を満たすようにすることができる.)

さて定理 4.3.1 を用いて相対ドナルドソン不変量を定義しよう．$H^2(X; \mathbf{Z})$ の元 $[\Sigma_1], \cdots, [\Sigma_d]$ をとる．ここで Σ_i は X_0 に含まれる閉曲面で境界の近傍 $M \times [-1, 0]$ とは交わらないとする．制限 $\mathrm{Res}_{\Sigma_i} : \mathcal{B}(X_0, \zeta) \to \mathcal{B}(\Sigma_i, \zeta)$ を考える．§3.5 で（閉多様体の場合に）行ったのと同様に，$\mathcal{B}(\Sigma_i, \zeta)$ 上の複素直線束 $L_i \to \mathcal{B}(\Sigma_i, \zeta)$ とその generic な切断 $s_i : \mathcal{B}(\Sigma_i, \zeta) \to L_i$ をとり，余次元 2 の部分多様体 $s_i^{-1}(0) \subseteq \mathcal{B}(\Sigma_i, \zeta)$ を考える．$m = 8k + 3(b_1(X) - 1 - b_2^+(X)) - 2d$

とおき，$CF_m(M;\zeta)$ の元 $Q([\Sigma_1],\cdots,[\Sigma_d])$ を

$$Q([\Sigma_1],\cdots,[\Sigma_d]) = \sum_{\eta([a])=m} \#\left(\mathcal{M}(X,\zeta;a)\cap\bigcap_{i=1}^{d}\mathrm{Res}_{\Sigma_i}^{-1}(s_i^{-1}(0))\right)\cdot[a]$$

で与える．# は符号付きの数である．(これをきちんと定めるには向き付けについての議論が必要である．それは後に行う.)

「定理 4.3.2」　$Q([\Sigma_1],\cdots,[\Sigma_d])$ はサイクルでそのホモロジー類は計量，摂動，Σ_i（ホモロジー類を表す曲面の取り方），切断 s_i によらない．

ここで括弧が付いているのは定理の条件が正確に書いていないからである．適当な条件を与えればこれはきちんと証明できる．証明は後に行う．ここではまず細かいことを忘れてアイディアだけを述べる．

「定理 4.3.2」の証明の基本的なアイディアはモジュライ空間 $\mathcal{M}(X,\zeta;a)$ のコンパクト化である．これについて述べよう．$\mathcal{N}(X,\zeta,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;a)=\mathcal{M}(X,\zeta;a)\cap\bigcap_{i=1}^{d}\mathrm{Res}_{\Sigma_i}^{-1}(s_i^{-1}(0))$ とおく．

「定理 4.3.3」　$\dim\mathcal{N}(X,\zeta,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;c)=1$ とすると $\mathcal{N}(X,\zeta,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;c)$ は境界付き多様体 $\mathcal{CN}(X,\zeta,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;c)$ の内部と可微分同相でまた

$$\partial\mathcal{CN}(X,\zeta,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;c)=\bigcup_{\eta(b)=\eta(c)+1}\mathcal{N}(X,\zeta,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;b)\times\overline{\mathcal{M}}(M;b,c)$$

が（0次元の向きの付いた多様体の間の等式として）成立する．

括弧が付いているのは自明な接続の存在を忘れているからである．さて「定理 4.3.3」を用いて $Q([\Sigma_1],\cdots,[\Sigma_d])$ がサイクルであることを証明しよう．$m=8k+3(b_1(X)-1-b_2^+(X))-2d$ とおくと

$$\begin{aligned}&\partial Q([\Sigma_1],\cdots,[\Sigma_d])\\&\quad=\sum_{\eta([a])=m}\#\mathcal{N}(X,\zeta,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;a)\cdot\partial[a]\end{aligned}$$

$$= \sum_{\eta([c])=m-1} \sum_{\eta([a])=m} \#\mathcal{N}(X,\zeta,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;a)\#\overline{\mathcal{M}}(a,c)\cdot[c]$$

すると仮定より $\eta(c)=m-1$ である任意の c に対して $\dim\mathcal{N}(X,\zeta,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;c)=1$ であるから「定理 4.3.3」より

$$\bigcup_{\eta(a)=m} \mathcal{N}(X,\zeta,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;a)\times\overline{\mathcal{M}}(a,c) = \partial C\mathcal{N}(X,\zeta,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;c)$$

よって

$$\sum_{\eta([a])=m} \#\mathcal{N}(X,\zeta,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;a)\#\overline{\mathcal{M}}(a,c)=0$$

すなわち $Q([\Sigma_1],\cdots,[\Sigma_d])$ はサイクルである．

この議論を正確な証明にするには自明な接続の寄与を調べなければならない．それは§4.8 で行う．

さて次に公理 (4.1.1.3) について述べよう．それにはまずフレアーホモロジーに対する内積を考えなければならない．前節で述べたようにこれはポアンカレ双対のはずである．そこでまず有限次元の場合に，ウィッテン複体のホモロジーに対してポアンカレ双対をどう捉えるか思い出そう．

ウィッテン複体 $C_*(V,f)$ に対して関数の符号を取り換えた $C_*(V,-f)$ を考えよう．$p,q\in Cr(f)=Cr(-f)$ とすると明らかに $\mathcal{M}(f;p,q)=\mathcal{M}(-f;q,p)$ が成り立つ．(ここで§4.2 の始めで定義したモジュライ空間 $\mathcal{M}(p,q)$ を表すのに $\mathcal{M}(f;p,q)$ などと書いた．モース関数が二つでてくるのでこれを区別するためである．)

この等式 $\mathcal{M}(f;p,q)=\mathcal{M}(-f;q,p)$ は $C_*(V,f)$ の境界作用素と $C_*(V,-f)$ の境界作用素が互いの双対であることを示している．またモース指数は $\eta_f(p)+\eta_{-f}(p)=\dim V(=n)$ を満たしている．すなわちチェイン複体としての同型

$$C_{n-*}(V,-f)=Hom(C_*(V,f),\mathbf{Z}) \tag{4.3.5}$$

が成り立つ．ホモロジーに移ると

$$H_{n-k}(C_*(V,-f);\mathbf{Z})=H^k(C_*(V,f);\mathbf{Z})$$

が成り立つ．さらにウィッテン複体のホモロジーがモース関数の取り方によらずに多様体のホモロジーに等しいことを用いると，ポアンカレの双対定理

$$H_{n-k}(V;\mathbf{Z}) = H^k(V;\mathbf{Z})$$

が得られる．

さてこの議論を無限次元にしてみよう．無限次元多様体 $\widetilde{\mathcal{B}}(M,\zeta)$ 上の関数 cs を考えていたわけだが，cs は M 上の積分で定義されていたから，M の向きを取り換えるとちょうど符号だけが変わる．したがってもし (4.3.5) がそのまま成り立つとすると，等式

$$CF_*(M,\zeta) = Hom(CF_{?-*}(-M,\zeta),\mathbf{Z})$$

が得られる．?と書いた部分は $[a] \in \widetilde{R}(M) = \widetilde{R}(-M)$ に対して$\eta_M([a]) + \eta_{-M}([a])$ がいくつになるかで決まる．ここで η_M は M上の接続と見たときの次数である．この数を決めるには次数の決め方をもう少し見なくてはいけない．これは後で行うが，すると $\eta_M([a])+\eta_{-M}([a]) = -3$ である（補題 4.7.16)．したがって

$$CF_*(M,\zeta) = Hom(CF_{-3-*}(-M,\zeta),\mathbf{Z})$$

である．

これからホモロジーに移って積

$$HF_*(M,\zeta) \otimes HF_{-3-*}(-M,\zeta) \to \mathbf{Z} \tag{4.3.6}$$

が定まる．ここで注意すべきなのは，無限次元の場合は有限次元の場合と異なり cs と $-cs$ が決めるウィッテン複体のホモロジーが一致するとは限らないことである.（フレアーホモロジーの摂動に関する不変性はコンパクト作用素による摂動にのみに当てはまる．cs と $-cs$ の差（の微分）はコンパクト作用素ではない.）すなわち一般には $HF_*(M,\zeta) \cong HF_*(-M,\zeta)$ は成立しない．

さて元に戻って (4.3.6) を使って公理 (4.1.1.3) を述べよう．M を 3 次元多様体で $H_1(M;\mathbf{Z}) = 0$ とする．X_1, X_2 を向きの付いたコンパクト 4 次元多様体で$\partial X_1 = -\partial X_2 = M$ とする．X_1 と X_2 を M に沿ってはった多様

体を X とする．仮定 $H_1(M;\mathbf{Z})=0$ よりマイヤー (Mayer)–ヴィエトリス (Vietoris) 完全系列を使って $H_2(X;\mathbf{Z})=H_2(X_1;\mathbf{Z})\oplus H_2(X_2;\mathbf{Z})$ がわかる．公理 (4.1.1.3) は X のドナルドソン不変量と X_1, X_2 の相対ドナルドソン不変量の関係を与えるものである．そこで $[\Sigma_1^{(i)}],\cdots,[\Sigma_{d_i}^{(i)}]\in H_2(X_i;\mathbf{Z})$ とする．X_i 上の $SU(2)$ 束 $\zeta^i_{k_i}$ を考える．(前に述べたように $\zeta^i_{k_i}$ の M 上の自明化が与えられているとし，この自明化に関する相対チャーン数を k_i とする.) m_i を $m_i=8k_i+3(b_1(X_i)-1-b_2^+(X_i))-2d_i$ となるように選ぶ．すると相対ドナルドソン不変量 $Q_{X_i}([\Sigma_1^{(i)}],\cdots,[\Sigma_{d_i}^{(i)}])\in HF_{m_i}((-1)^{i+1}M_i)$ $(i=1,2)$ が定まる．ここで $k=k_1+k_2$ とおく．

一方閉多様体 X に対しては，$2(d_1+d_2)=8k+3(b_1(X)-1-b_2^+(X))$ とするとドナルドソン不変量 $Q_X([\Sigma_1^{(1)}],\cdots,[\Sigma_{d_1}^{(1)}],[\Sigma_1^{(2)}],\cdots,[\Sigma_{d_2}^{(2)}])\in\mathbf{Z}$ が定まる．ここでは $\zeta^1_{k_1}$ と$\zeta^2_{k_2}$ を M 上与えられた自明化ではり合わせた $SU(2)$ 束 $\zeta_{k_1+k_2}$ を用いてドナルドソン不変量を定義した．

二つの式 $m_i=8k_i+3(b_1(X_i)-1-b_2^+(X_i))-2d_i$ $(i=1,2)$ と $2(d_1+d_2)=8k+3(b_1(X)-1-b_2^+(X))$ を比べると $m_1+m_2=-3$ になる．したがって内積 $HF_{m_1}(M,\zeta)\otimes HF_{m_2}(-M,\zeta)\to\mathbf{Z}$ が定義される．これを用いると，

「定理 4.3.4」

$$\begin{aligned}&\langle Q_{X_1}([\Sigma_1^{(1)}],\cdots,[\Sigma_{d_1}^{(1)}]),Q_{X_2}([\Sigma_1^{(2)}],\cdots,[\Sigma_{d_2}^{(2)}])\rangle\\&\qquad=Q_X([\Sigma_1^{(1)}],\cdots,[\Sigma_{d_1}^{(1)}],[\Sigma_1^{(2)}],\cdots,[\Sigma_{d_2}^{(2)}])\end{aligned}$$

括弧が付いているのは必要な仮定が全部書いていないからである．

「定理 4.3.4」の証明のアイディアを説明しよう．まず X 上のリーマン計量の入れ方から考えよう．X には 3 次元多様体 M が含まれていて，これで切ると X_1 と X_2 に分かれるのであった．そこで X_i 上の計量を境界の近傍が $M\times[-1,0]\subseteq X_1$, $M\times[0,1]\subseteq X_2$ となるように決めておく（$M\times\{0\}$ が境界である）．そうして $X_1\cup_M(M\times[-T,T])\cup_M X_2$ を計量も込めて考えたものを $X(T)$ と書こう．

さてこの $X(T)$ 上で ASD 接続のモジュライ空間 $\mathcal{M}(X(T),\zeta_k)$ を考えよう．

これは $2(d_1+d_2)=8k+3(b_1(X)-1-b_2^+(X))$ 次元である．$\Sigma_j^{(i)} \subseteq X_i \subseteq X(T)$ と考えて制限写像 $\mathrm{Res}_{j,i}: \mathcal{B}(X(T),\zeta) \to \mathcal{B}(\Sigma_j^{(i)},\zeta)$ を定義する．また複素直線束 $\det \overline{\partial}_A = L_{i,j} \to \mathcal{B}(\Sigma_j^{(i)},\zeta)$ とその切断 $s_{i,j}$ をとる．

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}(X(T),\zeta_k,[\Sigma_1^{(1)}],\cdots,[\Sigma_{d_1}^{(1)}],[\Sigma_1^{(2)}],\cdots,[\Sigma_{d_2}^{(2)}])\\&\qquad\qquad = \mathcal{M}(X(T),\zeta_k)\cap\bigcap(s_{i,j}\mathrm{Res}_{\Sigma_{i,j}})^{-1}(0)\end{aligned}$$

とおこう．

$$\begin{aligned}&Q_X(\zeta_k;[\Sigma_1^{(1)}],\cdots,[\Sigma_{d_1}^{(1)}],[\Sigma_1^{(2)}],\cdots,[\Sigma_{d_2}^{(2)}])\\&\qquad = \#\mathcal{N}(X(T),\zeta_k,[\Sigma_1^{(1)}],\cdots,[\Sigma_{d_1}^{(1)}],[\Sigma_1^{(2)}],\cdots,[\Sigma_{d_2}^{(2)}])\end{aligned}$$

であった．したがって「定理 4.3.4」は次の「定理 4.3.5」から従う．

「定理 4.3.5」　T が十分大きいとき $\mathcal{N}(X(T),\zeta_k,[\Sigma_1^{(1)}],\cdots,[\Sigma_{d_1}^{(1)}],[\Sigma_1^{(2)}],\cdots,[\Sigma_{d_2}^{(2)}])$ は

$$\bigcup_{\substack{a\in\widetilde{R}(M)\\ \eta_M(a)=m_1}} \mathcal{N}(X_1,\zeta_{k_1}^1,[\Sigma_1^{(1)}],\cdots,[\Sigma_{d_1}^{(1)}];a)\times\mathcal{N}(X_2,\zeta_{k_2}^2,[\Sigma_1^{(2)}],\cdots,[\Sigma_{d_2}^{(2)}];a)$$

に一致する．

$\mathcal{N}(X_1,\zeta_{k_1}^1,[\Sigma_1^{(1)}],\cdots,[\Sigma_{d_1}^{(1)}];a)$ 等は相対ドナルドソン不変量の定義に用いたモジュライ空間である．定理に括弧が付いているのはやはり可約接続の寄与を忘れているからである．それが許される条件を与えて定理を正確に述べそれを証明するのは後の節で行う．定理 4.3.5 は第2章, 第3章でバブルについて述べた諸定理とよく似ていて証明も平行して進む．

§ 4.4 コンパクトでない多様体の上の楕円型作用素

この節から本章の残りで前節までで述べた諸定理の証明を行う．そのためにはまず第 2 章，第 3 章で述べたモジュライ空間の諸性質を非コンパクト多様体（今の場合はコンパクト集合の外で 3 次元多様体と半直線 $[0,\infty)$ の直積である）の上で調べなければならない．この節ではまず線形方程式に関わる問題について述べる．すなわちたとえば局所的性質を確立するためには線形化方程式 (AHS 複体) を調べなければならない．

非コンパクト多様体（特に無限遠で直積になっているもの）の上の楕円型作用素の理論は [LM] で展開されている（これはアティヤ–パットーディ(Patodi)–シンガーによる境界付き多様体の場合の議論のアナロジーである）が，これは未だあまりスタンダードになっていないので，この節でそのあらましを述べることにする．

その前に直積型の無限遠での AHS 複体を計算しておこう．X を向きの付いた完備 4 次元多様体とし，K なる X のコンパクト部分集合があり $X-K$ は直積 $M\times(0,\infty)$ と等長的としよう．(たとえば $X=M\times\mathbf{R}$ のときは $K=M\times[-1,1]$ ととると $X-K$ は $(M\cup -M)\times(0,\infty)$ と等長的である.)

以下 $M\times(0,\infty)$ 上で AHS 複体を計算したい．それにはまず次の同型に注意しよう．$p:M\times(0,\infty)\to M$ を射影とする．

$$\begin{aligned}\Lambda^1(M\times(0,\infty))&\cong p^*(\Lambda^1(M))\oplus p^*(\Lambda^0(M))\\ \Lambda^2_+(M\times(0,\infty))&\cong p^*(\Lambda^1(M))\end{aligned}\tag{4.4.1}$$

ここで第一の同型は $u+vdt$ を (u,v) に対応させることで，第二の同型は $*_M u+u\wedge dt$ を u に対応させることで得られる．$(*_{M\times(0,\infty)}(u+(*_M u)\wedge dt)=u+(*_M u)\wedge dt$ に注意．)

AHS 複体は $d_A^+\oplus d_A^*:\Gamma(su(2)\otimes\Lambda^1)\to\Gamma(su(2)\otimes(\Lambda^2_+\oplus\Lambda^0))$ であった．$M\times(0,\infty)$ 上の接続 A は dt 成分を持たないとし $A=a_t$ とする．このとき (4.4.1) の同型のもとで次の等号が成り立つ．

補題 4.4.1　$d_A^+ \oplus d_A^* = -\frac{\partial}{\partial t} + \begin{pmatrix} *_M d_{a_t} & d_{a_t} \\ d_{a_t}^* & 0 \end{pmatrix}$

証明　単なる計算であるがやってみよう．

$$d_A(u + vdt) = -\frac{\partial u}{dt} \wedge dt + d_{a_t}u + d_{a_t}v \wedge dt$$

よって ($d_A^+ = d_A + *d_A$ ゆえ)

$$\begin{aligned} d_A^+(u+vdt) &= -\frac{\partial u}{dt} \wedge dt + d_{a_t}u + d_{a_t}v \wedge dt \\ &\quad + *_{M\times(0,\infty)}\left(-\frac{\partial u}{dt} \wedge dt + d_{a_t}u + d_{a_t}v \wedge dt\right) \\ &= -*_M\frac{\partial u}{dt} + d_{a_t}u + *_M d_{a_t}v \\ &\quad + \left(-\frac{\partial u}{dt} + *_M d_{a_t}u + d_{a_t}v\right) \wedge dt \end{aligned}$$

したがって d_A^+ は

$$d_A^+\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -\frac{\partial u}{\partial t} + *_M d_{a_t}u + d_{a_t}v = \left(-\frac{\partial}{\partial t} + *_M d_{a_t},\ d_{a_t}\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

次に

$$d_A^*(u + vdt) = d_{a_t}^* u - \frac{\partial v}{\partial t}$$

よって

$$d_A^*\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \left(d_{a_t}^*,\ -\frac{\partial}{\partial t}\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

証明終わり

さてこの補題に現れる作用素を

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_a = \begin{pmatrix} *_M d_a & d_a \\ d_a^* & 0 \end{pmatrix} \quad &: \Gamma(M; su(2) \otimes (\Lambda^1(M) \oplus \Lambda^0(M))) \\ &\to \Gamma(M; su(2) \otimes (\Lambda^1(M) \oplus \Lambda^0(M))) \end{aligned}$$

と定義する．これは3次元多様体上の楕円型作用素である．また $\mathcal{D}_a^* = \mathcal{D}_a$ すなわち $\mathcal{D}_a$ は自己共役である．

ここでちょっと寄り道であるが，作用素 $\mathcal{D}_a$ の意味を説明しておこう．これは大体チャーン–サイモンズ汎関数 cs のヘッセ行列である．ただし cs は $\mathcal{B}(M, su(2))$ 上の関数で，$\mathcal{B}(M, su(2))$ の接空間は $\mathrm{Ker}\ (d_a^* : \Gamma(su(2) \otimes \Lambda^1) \to \Gamma(su(2)))$ であるので $\mathrm{Hess}_{[a]}cs : \mathrm{Ker}\ d_a^* \to \mathrm{Ker}\ d_a^*$ である．このとき

補題 4.4.2 $\mathrm{Hess}_{[a]}cs : \mathrm{Ker}\ d_a^* \to \mathrm{Ker}\ d_a^*$ は $*_M d_a$ の $\mathrm{Ker}\ d_a^*$ への制限である．

証明 $\mathcal{A}(M, su(2))$ に持ち上げて計算してよい．$\mathrm{grad}_{[a]}cs \in \mathrm{Ker}\ d_a^*$ は$*_M F_a = *_M(da+a\wedge a)$ であったからこれを微分すれば，$*_M(du+a\wedge u+u\wedge a) = *_M d_a u$.

証明終わり

これと $\mathcal{D}_a$ の関係は次のとおり．$L^2(M; su(2) \otimes \Lambda^1(M)) = \mathrm{Ker}\ d_a^* \oplus \mathrm{Im}\ d_a$ と分解する．$d_a : \Gamma(M; su(2)) \to \Gamma(M; su(2) \otimes \Lambda^1(M))$ は a が既約なら単射であるから，$d_a \circ (\Delta_a)^{-\frac{1}{2}} : L^2(M; su(2)) \to \mathrm{Im}\ d_a$ は（内積を保つ）同型である．これを使って，

$$L^2(M; su(2) \otimes (\Lambda^1(M) \oplus \Lambda^0(M))) \cong \mathrm{Ker}\ d_a^* \oplus L^2(M; su(2)) \oplus L^2(M; su(2))$$

と分解する．すると

$$\mathcal{D}_a = \begin{pmatrix} \mathrm{Hess}_{[a]}cs & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\Delta_a)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & (\Delta_a)^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

と表せる．$\begin{pmatrix} 0 & (\Delta_a)^{\frac{1}{2}} \\ (\Delta_a)^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}$ の部分は可逆で，また正の固有値と負の固有値がいつも対で現れる．この部分はあまり $\mathcal{D}_a$の解析には現れない．

補題 4.4.2 と関係あるが，$\mathrm{Ker}\ \mathcal{D}_a \cong \mathrm{CoKer}\ \mathcal{D}_a$ を計算しておこう．

補題 4.4.3 $[a] \in R(M)$ に対して $\mathrm{Ker}\ \mathcal{D}_a = H^0(M; Ad\ a) \oplus H^1(M; Ad\ a)$.

(ここで $Ad\ a$ は平坦接続 a と共役表現から定まる局所系である.)

証明　定義から

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\ \mathcal{D}_a &= (\mathrm{Ker}\ d_a : \Gamma(M; Ad\ a) \to \Gamma(M; Ad\ a \otimes \Lambda^1)\\ &\quad \oplus(\mathrm{Ker}\ d_a : \Gamma(M; Ad\ a \otimes \Lambda^1) \to \Gamma(M; Ad\ a \otimes \Lambda^2))\\ &\quad \cap (\mathrm{Ker}\ d_a^* : \Gamma(M; Ad\ a \otimes \Lambda^1) \to \Gamma(M; Ad\ a))\end{aligned}$$

補題はこれと調和積分論から明らか.　証明終わり

ここでは既約で $H^1(M; Ad\ a) = 0$ となる接続 a を考えていたから，$\mathcal{D}_a$は可逆である. ($H^0(M; Ad\ a) = 0$ と a の既約性は同値であった.)

これらの条件を一般化すると次のようになる.

設定 4.4.4　X は完備なリーマン多様体. $K \subseteq X$ はコンパクト部分集合. $X-K$ は直積 $M\times(0,\infty)$ と等長的. E, F は X 上のベクトル束で内積が定まっている. $\overline{E}$ は M の内積の定まったベクトル束で $p^*\overline{E} \cong E|_{M\times(0,\infty)}$, $p^*\overline{E} \cong F|_{M\times(0,\infty)}$ なる内積を保つベクトル束の同型がある. ここで $p : M \times (0,\infty) \to M$ は射影.

次に $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ は 1 階の楕円型微分作用素とし次のことを仮定する. $Q_t : \Gamma(M; \overline{E}) \to \Gamma(M; \overline{E})$ なる自己共役楕円型作用素の $t \in (0,\infty)$ に滑らかに依存する族が存在し $M \times (0,\infty)$ で $P = -\frac{\partial}{\partial t} + Q_t$が成り立つ.

$t \to \infty$ で Q_tは自己共役楕円型作用素 Q_∞に C^∞収束すると仮定する. さらに Q_tの t についての任意階数の微分は 0 に C^∞収束すると仮定する.

最後に Q_∞は可逆（つまり 0 を固有値としてもたない）と仮定する.

以上のもとで次のことを証明しよう.

定理 4.4.5　$\mathrm{Ker}\ P \cap L^2(X; E)$ は有限次元である. また $u \in \mathrm{Ker}\ P \cap L^2(X; E)$

とすると u は C^∞ 級でさらに

$$|\nabla^k u(x,t)| < Ce^{-\lambda t}$$

なる $C,\lambda > 0$ が存在する．

同じことは Pの共役に対しても証明できて，それを使うと Pが，適当に関数空間を設定すると，フレドホルム (Fredholm) 作用素になることが示される．またコンパクト多様体の場合の定理 0.3.4 にあたることも証明できる．これらのことを正確に述べるのはもう少し後にして，定理の証明を始めよう．それにはまず関数空間を設定することから始めなければならない．前に述べたように，ソボレフノルムは接続を用いて $\sum_{\ell=0}^k \int_X |\nabla^\ell u|^2 *_X 1$ で定義された．Xがコンパクト多様体であれば，この接続 ∇ や体積要素$*_X 1$ をどうとろうと，得られたノルムは同値であった（すなわち定数倍でお互いに評価できた）．これはコンパクト多様体の上の二つの正の関数の比が正定数で上下から評価できることの帰結である．コンパクトでない多様体上ではそうはいかない．そこでまず無限遠方での接続 ∇ や体積要素$*_X 1$ の振舞いを決めておかなければならない．

幸いにして我々の多様体はコンパクト集合 Kの外で直積 $M \times (0,\infty)$ に等長的であった．そこで体積要素はこの計量を使って定める．こうしておけばソボレフノルムは M上および K上の計量には（定数比を除いて）よらない（M, K はコンパクトであるから）．

次に接続であるが，我々はベクトル束の方も Kの外では M上のベクトル束$\overline{E}$の引き戻しであると仮定した．したがって$\overline{E}$上の接続を一つ定めこれの引き戻しを拡張した接続を E, Fに入れることにする．こうすればやはりソボレフノルムは$\overline{E}$上の接続や拡張の仕方にはよらない．

これでソボレフノルムが決まった．このソボレフノルムでコンパクト台を持つ C^∞ 級の切断全体$\Gamma_0(X;E)$ を完備化したものを $L^p_k(X;E)$ と書くことにする．

すると 1 階の微分作用素 Pは $L^p_{k+1}(X;E) \to L^p_k(X;F)$ なる有界作用素に拡張される．ただしこれは（コンパクトな場合と違って）任意の 1 階微分作用素で正しいわけではない．たとえば係数が無限遠で発散してしまってはいけない．Pは $X-K$で $P = -\frac{\partial}{\partial t} + Q_t$ と書け，また Q_tは（Q_∞に収束するのであるか

ら）任意の微分も込めて有界である．このことを使って定義に従ってちょっと計算すれば Pが $L^p_{k+1}(X;E) \to L^p_k(X;F)$ なる有界作用素に拡張されることがわかる．

以上のことは自明ではないがそれほど深いことではない．しかし次に考えるその共役についての考察はもう少し本質的である．まずヒルベルト (Hilbert) 空間の間の（非有界）線形作用素についてその共役作用素とは何であったか思い出そう．

H_1, H_2 をヒルベルト空間，$D \subseteq H_1$を稠密な線形部分空間，$P : D \to H_2$を線形写像とする．このときこの共役作用素 $P^* : D' \to H_1$は次のように定義されていた（[伊藤黒] 8 章参照）．

$v \in D'$で $P^*(v) = w$であるのは $\langle Pu, v\rangle = \langle u, w\rangle$ が任意の $u \in D$に対して成立することを言う．

$D \subseteq H_1$は稠密であったから wは高々一つしかない．ここで微妙なのは定義域で，同じ微分作用素でも定義域の取り方で違った作用素と思わなければならない．例を挙げよう．

まず $H_1 = H_2 = L^2((0,1))$ とする．$P = -\frac{d}{dt}$ととるが，問題になるのは定義域である．まず $D = C_0^\infty((0,1))$ とする（すなわちコンパクト台の C^∞級関数全体）．この共役は何であろうか．任意の $v \in C^\infty([0,1])$, $u \in D$に対して

$$\langle Pu, v\rangle = \int_{[0,1]} -\frac{du}{dt} v dt = \int_{[0,1]} u \frac{dv}{dt} dt$$

が成り立つ.（u はコンパクト台であった．このことを上の計算では使っている．vはコンパクト台でなくてもよい.）このことから $C^\infty([0,1])$ は Pの共役作用素 P^*の定義域 D'に含まれそこで Pの共役作用素 P^*は $\frac{d}{dt}$であることがわかる．($C^\infty([0,1])$ の定義はちゃんと書かなかったが閉区間のある近傍の上の C^∞級関数の制限全体と思ってよい.）また実は D'は $L^2_1((0,1))$ に一致し $P^* = \frac{d}{dt}$もそこで成立することがわかる．これを見るには$\int_{[0,1]} u \frac{dv}{dt} dt$ が u を止めたとき vの関数として $L^2_1((0,1))$ まで連続に拡張されることに注意すればよい．

Pの方ははじめは定義域として $C_0^\infty((0,1))$ ととったが，これはその $L^2_1((0,1))$

での閉包まで拡張しておいてよい（閉包は L^2_1ノルムでとる）．この閉包は $L^2_1((0,1))$ 全体ではない．それは $u \mapsto (u(0), u(1))$ なる（$C^\infty([0,1])$ 上の）写像が L^2_1ノルムで連続であるからで，つまり $C^\infty_0((0,1))$ の閉包は境界値が 0 の $L^2_1((0,1))$ の元全体である．(このあたりのことは楕円型作用素の境界値問題についての理論の基礎的な部分である．たとえば [溝畑],[島倉] あたりを見ていただきたい．) 定義域をここまでのばしたものをやはり Pと書こう．(こうすると P は閉作用素になる．閉作用素の定義は省略する（[伊藤黒] 5 章）．）すると Pの共役 P^*と$-P$は微分作用素としての式の形は同じだが定義域が違う．(P^*の定義域は $L^2_1((0,1))$ 全体，$-P$の定義域は境界値が 0 のものだけ）．したがって P は反自己共役ではない．このような問題は閉多様体では生じず多様体がコンパクトでない場合にだけ生じる．

上のような定義域の問題があるので，共役については微分作用素としての式の形の問題と定義域の問題を注意して分けて考える必要がある．前者だけ考えたときの共役を形式的共役 (formal adjoint) と言う．正確に言うと，

定義 4.4.6 微分作用素 P^*が微分作用素 Pの形式的共役であるとは，コンパクトな台を持つ C^∞級切断 u,v に対して $\langle Pu, v\rangle = \langle u, P^*v\rangle$ が成り立つことを言う．

形式的共役は存在して一意である．

以上長々と書いてきたが，実はこの問題は我々が考えている場合には生じない．上の場合 (開区間 $(0,1)$) と本節で問題にしている多様体 Xの場合との違いは Xが完備であることである．我々の場合に近いのはむしろ $\mathbf{R}$（完備で非コンパクト）の上の作用素$-\frac{d}{dt}$の方である．これは $L^2(\mathbf{R})$ の上の非有界作用素として（定義域の問題も込めて）反自己共役である．次の命題 4.4.7 の証明をこの場合に当てはめてみれば議論がわかりやすいであろう．とにかく上で書いてきたことから次の命題が自明ではないことがわかるであろう．

命題 4.4.7 $P : \Gamma(X; E) \to \Gamma(X; F)$ を設定 4.4.4 のとおりとし $P^* : \Gamma(X; F) \to$

$\Gamma(X;E)$ をその形式的共役とする．

このとき P,P^* のコンパクト台の切断への制限 $P:\Gamma_0(X;E)\to\Gamma_0(X;F)$, $P^*:\Gamma_0(X;F)\to\Gamma_0(X;E)$ は有界な線形写像 $P:L^2_1(X;E)\to L^2(X;F)$, $P^*:L^2_1(X;F)\to L^2(X;E)$ に一意に拡張される．

さらにこれらを $L^2(X;E)$ と $L^2(X;F)$ の間の非有界な線形作用素とみなすとそれらは定義域も込めて互いの共役である．

注意　この命題の証明には設定 4.4.4 の最後の仮定すなわち Q_∞ の可逆性は必要ない．

証明　前半については P に対してはすでに述べた．$-P^*$ も実は自動的に設定 4.4.4 を満たすので ($P^*=\frac{d}{dt}-D_{a_t}$ が $M\times(0,\infty)$ で成立) これについても前半の主張は成立する．

後半を証明しよう．証明すべきことは二つである．一つは

(4.4.2.1) $u\in L^2_1(X;E)$, $v\in L^2_1(X;F)$ に対して $\langle Pu,v\rangle=\langle u,P^*v\rangle$ が成り立つ．

もう一つは

(4.4.2.2) $v\in L^2(X;F)$, $w\in L^2(X;E)$ とし任意の $u\in L^2_1(X;E)$ に対して $\langle Pu,v\rangle=\langle u,w\rangle$ が成り立てば $v\in L^2_1(X;F)$ である．

(4.4.2.1) の方が本質的である．こちらから始めよう．$\chi_{S,S'}:X\to[0,1]$ を

$$\chi_{S,S'}(p)=\begin{cases}1 & p\in K\\ 1 & p=(x,t),t<S\\ 0 & p=(x,t),t>S'\end{cases}$$

ととる．$\chi_{S,S'}$ は $X-K=M\times(0,\infty)$ では第 2 成分だけにより，また $\left|\frac{\chi_{S,S'}}{dt}\right|<\frac{2}{S'-S}$ を満たすとしてよい．$\chi_i=\chi_{i,i+e^i}$ としよう．(あるいは $\chi_i=\chi_{S_i,S'_i}$ で $S_i\to$

∞ かつ $S'_i - S_i$は S_iに比べて十分速く ∞ に収束する.)

$$\begin{aligned}\langle Pu, v\rangle &= \lim_{i\to\infty}\langle \chi_i Pu, v\rangle \\ &= \lim_{i\to\infty}\langle P\chi_i u, v\rangle + \lim_{i\to\infty}\int_X \frac{d\chi_i}{dt}(u,v) * 1\end{aligned}$$

ここで第1項は

$$\begin{aligned}\lim_{i\to\infty}\langle P\chi_i u, v\rangle &= \lim_{i\to\infty}\langle \chi_i u, P^* v\rangle \\ &= \langle u, P^* v\rangle\end{aligned}$$

である.($\chi_i u$ はコンパクト台だから最初の等式が成り立つ.) 第2項が0であることは容易にわかる. 結局 $\langle Pu, v\rangle = \langle u, P^*v\rangle$ が示された.

次に (4.4.2.2) を考えよう. まず(少々紛らわしいが)P^*を Pの形式的共役とする. すると P^*は1階の微分作用素であるから P^*vは確かに定義されている.(P^*vは局所 L^2_{-1}級の切断である. つまり任意の相対コンパクト集合への制限が L^2_{-1}級である.) すると任意のコンパクト台の C^∞級関数 u に対して $\langle u, w\rangle = \langle u, P^*v\rangle$ であることから $w = P^*v$である(局所 L^2_{-1}級関数として). したがって P^*vは L^2級である. (4.4.2.2) を示すには

$$C_1 < \frac{||v||_{L^2} + ||\nabla v||_{L^2}}{||v||_{L^2} + ||P^*v||_{L^2}} < C_2 \tag{4.4.3}$$

を示せば十分である. むろんこれは P^*が1階の楕円型作用素であることの帰結であり, ゴルディング (Gårding) の不等式(定理 3.1.1)である. しかし定理 3.1.1 は一般の完備非コンパクト多様体上の楕円型作用素では成立しない. 我々の場合にこれが成立するのは, 作用素 P^*, ベクトル束, 接続, 計量のすべてが無限遠で一様であることの帰結である. 定理 3.1.1 を証明しなかったから (4.4.3) も証明しない. 文献にある定理 3.1.1 の証明をじっと眺めれば (4.4.3) の証明はわかるはずである.

命題 4.4.7 の証明の説明はこれで終わる.

さて次に作用素$\Delta = P^*P : L^2_2(X;E) \to L^2(X;E)$ を考えこれを $L^2(X;E)$ とそれ自身の間の非有界作用素とみなそう. このとき次のことは命題 4.4.7 の帰結である.

系 4.4.8　Δは自己共役である．(つまりその共役作用素と定義域も込めて等しい.)

系 4.4.8 を命題 4.4.7 から証明することは関数解析の演習問題として残そう．

さて今まで非コンパクト性が楕円型作用素の理論に及ぼす影響の一つ，すなわち共役作用素の定義域の問題を論じてきた．もう一つの（おそらくこっちの方がもっと面白い）問題は連続スペクトルの問題である．これについて述べよう．

まず次の定理を思い出そう（この証明は [伊藤黒] 13 章などにゆずる）．

定理 4.4.9　Eを閉多様体X上のベクトル束，PをEからそれ自身への自己共役で楕円型の作用素とする．このとき$u_i \in L^2(E)$ $(i=1,2,\cdots)$ なる$L^2(E)$の正規直交基が存在して$Pu_i = \lambda_i u_i$かつ数列$\lambda_1,\lambda_2,\cdots$は集積点を持たない．

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots$を$P$のスペクトル (spectre) といった．

一般にλがPのスペクトルであるとは，$||(P-\lambda)u|| \ge C||u||$ が任意のuに対して成立するような正の数Cが存在しないことを指した．$Pu=\lambda u$なる 0 でないuが存在すればλはPのスペクトルである．このようなスペクトルを固有値（または離散スペクトル）といいまたuを固有関数と言う．固有値でないスペクトルを連続スペクトルと言う．

定理 4.4.9 の主張はコンパクト多様体の上の自己共役作用素のスペクトルが全て固有値であること，そして固有関数が$L^2(E)$の正規直交基をなすことである．

定理 4.4.9 はコンパクトでない多様体では成立しない．一番単純な例では$X=\mathbf{R}$上の作用素$-\frac{d^2}{dt^2}$である．これの固有関数でL^2関数であるものは存在しない．このスペクトル集合は$[0,\infty)$である．すなわち連続スペクトルが現れる．これはむろん考えているのが非コンパクト多様体であることの帰結である．

粗く言うと我々が示さなければならないのは設定 4.4.4 の仮定の下で連続スペクトルが 0 から離れていること，すなわち 0 が高々固有値で，0 のある近傍に連続スペクトルがないことである．この辺のことを正確に示そうとすると，非有界作用素のスペクトル理論をやらなければならない．それをまともにやって

いるとこの本は関数解析の教科書になってしまうので，結果と意味をちょっと述べて，使う方に専念することにする．(スペクトル理論をいっさい使わないこともできるが，しかし実のところ非有界作用素のスペクトル理論は今我々が考察しているような問題，すなわちコンパクトでない空間上の自己共役作用素の解析のために生まれたものなのだから，ここで使わなければ一般論の立つ瀬がないので使うことにする.)

さて（非有界）自己共役作用素のスペクトル分解定理を思い出そう（[伊藤黒] 12 章参照）．$P: D \to E$, $D \subseteq E$をヒルベルト空間 E上の非有界自己共役作用素とする．Pのスペクトル分解とは

$$\Delta = \int_{\mathbf{R}} \lambda d\mathcal{P}(\lambda) \tag{4.4.4}$$

と表された．この式の意味を少し説明しよう．$\mathcal{P}(\lambda)$ とはスペクトル測度であった．これは $\mathbf{R}$ のボレル可測集合 Uに射影 $\mathcal{P}(U): E \to E$を対応させるものでしかるべき性質を満たすものである．(射影とは $\mathcal{P}(U)^2 = \mathcal{P}(U)$ であるような有界作用素であった.）満たすべき性質をあげることはしない．一つだけ書いておくと $U \supseteq V \Rightarrow \mathrm{Im}\ \mathcal{P}(U) \supseteq \mathrm{Im}\ \mathcal{P}(V)$. (4.4.4) はこの “測度” についてのルベーグ (Lebesgue) 積分である．$\lambda \in \mathbf{R}$ がΔのスペクトルに含まれていないとは，あるλの近傍 Uについて $\mathcal{P}(U) = 0$ であることを指した．また$\lambda \in \mathbf{R}$ が固有値であるとは$\Delta u = \lambda u$ がある 0 でない u に対して成立することを指すが，これは $\bigcap_{\lambda \in U} \mathrm{Im}\ \mathcal{P}(U) \neq \{0\}$ と同値である．

0 がスペクトルでないとして$\Delta^{-1} = \int_{\mathbf{R}} \lambda^{-1} d\mathcal{P}(\lambda)$ とおこう．すると$\Delta^{-1} = \int_{|\lambda|>\varepsilon} \lambda^{-1} d\mathcal{P}(\lambda)$ とも思えるから ($\mathcal{P}((-\varepsilon,\varepsilon)) = 0$ なるεをとる)．$\|\Delta^{-1}\| < \varepsilon^{-1}$. すなわち$\Delta^{-1}$は有界作用素である．勿論$\Delta\Delta^{-1} = \Delta^{-1}\Delta = 1$ が，定義されているところでは，成立する．(Δ^{-1}は至るところ定義されているがΔはそうとは限らない.）Δが微分作用素のときこのΔ^{-1}はパラメトリックス (Parametrix) と呼ばれる．

さて一般論の復習はこれくらいにして設定 4.4.4 の微分作用素 Pに対する $\Delta = P^*P: L^2_2(E) \to L^2(E)$ に戻ろう．この自己共役作用素のスペクトル分

解を

$$\Delta = \int_{\mathbf{R}} \lambda d\mathcal{P}(\lambda)$$

とおく．また自己共役作用素 Q_∞^2 を考える．これは Q_∞ が自己共役だったから非負で，また Q_∞ が可逆だったから正値である．Q_∞^2 は閉多様体上の作用素だからしたがって第1固有値は正である．これを λ_0 とおく．λ_0' を λ_0 より小さい任意の正の数とする．

定理 4.4.10　$\mathrm{Im}\ \mathcal{P}((-\infty, \lambda_0'))$ は有限次元である．また $u \in \mathrm{Im}\ \mathcal{P}((-\infty, \lambda_0'))$ とすると

$$|u(x,t)| \le C||u||_{L^2} e^{-\sqrt{\lambda_0 - \lambda_0'} \cdot t} \tag{4.4.5}$$

が成り立つ．

Δ を有限次元の空間 $\mathrm{Im}\ \mathcal{P}((-\infty, \lambda_0'))$ （Δ 不変である）に制限して考えると，定理 4.4.10 より Δ の 0 に近いスペクトルは固有値だけで，またその固有空間は有限次元であることが示せる．さらに 0 の近くでスペクトルの集合は離散的である．(Δ は非負 $\langle \Delta u, u\rangle \ge 0$ だからスペクトルはすべて 0 以上である.)

定理 4.4.10 と PP^* に対する同様の主張が定理 4.4.5 をもうちょっと精密に言ったものである．たとえば定理 4.4.10 から直交直和分解

$$L^2(X;E) = \mathrm{Ker}\ \Delta \oplus \mathrm{Im}\ (P^* : L_1^2(X;F) \to L^2(X;E)) \tag{4.4.6}$$

が示せる．粗くやってみると次のとおり．

$\mathrm{Ker}\ \Delta$ の直交補空間を W とおく．$\mathrm{Ker}\ \Delta$ は有限次元だから，これは閉部分空間である．ε を $(0,\varepsilon)$ に Δ のスペクトルがないように選ぶ.（ここでスペクトルの 0 の近傍での離散性を用いる.）そして $Q = \int_{\lambda > \varepsilon} \lambda^{-1} d\mathcal{P}(\lambda)$ とおく．これは有界作用素で $\Delta Q = 1 - P((-\varepsilon,\varepsilon)) = 1 - P_{\mathrm{Ker}\ \Delta}$ である．$P_{\mathrm{Ker}\ \Delta}$ とは $\mathrm{Ker}\ \Delta$ への直交射影を表す．したがって $W \subseteq \mathrm{Im}\ \Delta Q \subseteq \mathrm{Im}\ P^*$．証明の残りは易しいので読者に任せる.（というより前にやった閉多様体の場合と同じである.）

(4.4.6) があれば，たとえば前章の局所理論は（少なくとも線形方程式に関わ

る部分は）前章と同じようにできる．

定理 4.4.10 の一番簡単な例としては$\Delta = -\frac{d^2}{dt^2} + C : L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ がある（ここで Cは正の数である）．このときスペクトルはすべて連続スペクトルで $[C, \infty)$ である．Cが 0 の場合は設定 4.4.4の最後の仮定すなわち Q_∞の可逆性が満たされていない場合にあたる．

この例ではスペクトルは全部連続スペクトルである．離散スペクトルもある例が欲しければ関数 $U : \mathbf{R} \to (0, \infty)$ をとり$\Delta = -\frac{d^2}{dt^2} + U$とすればよい．ただし $|t| > 100C$で $U(t) = C$, $|t| < 10C$で $U(t) = C/10$ ぐらいにとっておく．すると定理 4.4.10 から$\Delta = -\frac{d^2}{dt^2} + U$の連続スペクトルは Cから始まるが $\langle \Delta u, u \rangle < C\langle u, u \rangle$ なる（0 の近傍に台を持つ）関数が存在するから，Δは離散スペクトルを持つ．

少し脇道にそれてしまった．定理 4.4.10 の証明を始めよう．次節の非線形の場合と平行してできる証明をする都合上，少し弱い不等式

(4.4.5) 弱
$$|u(x,t)| \le C||u||_{L^2} e^{-\beta \cdot t}$$

$\beta > 0$ だけを示す．本書の目的にはこれで十分である．次の節で述べる非線形の場合の評価も以下の評価とほぼ同じ議論を用いる．

まず評価 (4.4.5) 弱から Im $\mathcal{P}((-\infty, \lambda_0'))$ の有限次元性が導かれることに注意しよう．これは次のようにして示す．Im $\mathcal{P}((-\infty, \lambda_0'))$ が有限次元であることを示すには，その任意の有界集合が相対コンパクトであること，あるいは全有界であることを示せばよい．(全有界の定義は位相空間論の教科書を参照すること.) そこで A を Im $\mathcal{P}((-\infty, \lambda_0'))$ の有界な部分集合としよう．これが全有界であることを示す．$\delta > 0$ を任意にとると (4.4.5) 弱と A の有界性より

(4.4.7)
$$\int_{M \times [T,\infty)} |u|^2 * 1 \le \delta/3$$

が任意の $u \in A$ に対して成立するような $T > 0$ が存在する．

次に $X - M \times (T, \infty)$ でゴルディングの不等式と $||\Delta u||_{L^2} \le \lambda_0' ||u||_{L^2} \le const$ から A は $L^2_2(X - M \times (T, \infty))$ の有界部分集合である．$X - M \times (T, \infty)$ はコンパクトであるからレリッヒ (Rellich) の定理が使えて A は $L^2(X - M \times (T, \infty))$ の相対コンパクトな部分集合である．したがって有限集合 $A_0 \subseteq A$ が存在して

任意の $u \in A$ に対して $v \in A_0$ で $||u-v||_{L^2(X-M\times(T,\infty))} \le \delta/3$ なるものが存在する．ところが (4.4.7) を使うと $||u-v||_{L^2(X)} \le \delta$．すなわち A は全有界である．これで $\mathrm{Im}\ \mathcal{P}((-\infty,\lambda_0'))$ の有限次元性の証明が終わった．(以上の議論は形式的な部分で本質的なのは次に行う評価の方である．)

さて評価式 (4.4.5) 弱を証明しよう．まず区間 $(0,\lambda_0')$ を非常に小さい区間の和に書く．その一つを $[\mu,\mu+\delta)$ とする．(δがどのくらい小さくなければならないかは後で決める．) $u \in \mathrm{Im}\ \mathcal{P}([\mu,\mu+\delta))$ に対して (4.4.5) 弱を証明すれば十分である．

すると $u \in \mathrm{Im}\ \mathcal{P}([\mu,\mu+\delta))$ より

(4.4.8)
$$||(\Delta-\mu)^N u||_{L^2} < \delta^N ||u||_{L^2}$$

が成り立つ．ここで本質的にはなくてもすむが，あると考えやすくなる注意を一つしよう．(4.4.8) を使うと次の式が示せる．

(4.4.9)
$$|\nabla^k u(x)| < C_k ||u||_{L^2(D(x,1))}$$

ここで $D(x,1)$ は x から距離が 1 以下の点全体で，C_kは x によらない正の数である．

(4.4.9) 式はゴルディングの定理とソボレフの定理をコンパクト集合 $D(x,1)$ で使えば (4.4.8) から得られる．ここで C_kが x によらないのは無限遠での計量等の振舞いがおとなしいからであるのは前と同様である．(4.4.9) 式を使うと $D(x,1)$ 上での u のノルムはどのソボレフノルムを使おうと，また C^k ノルムを使おうと同値であることがわかる．(半径は 1 でなくても一つ決めてあれば何でもよい．) したがって直径一定の集合を考える限りどのノルムかはあまり気を使わなくてもいい．

さて設定 4.4.4 から無限遠の近傍で

(4.4.10)
$$\left|\Delta - \left(-\frac{d^2}{dt^2}+Q_\infty^2\right)\right| < \delta$$

がわかる．ここで$\Delta - \left(-\frac{d^2}{dt^2}+Q_\infty^2\right)$ は 1 階の微分作用素で，(4.4.10) はこの係数が各点で十分小さいという意味である．さて (4.4.8),(4.4.9),(4.4.10) より

$x \in M \times (T, \infty)$ に対して

$$\left| \left(-\frac{d^2}{dt^2} + Q_\infty^2 - \mu \right) u(x) \right| < C\delta ||u||_{L^2(D(x,1))} \tag{4.4.11}$$

がわかる．(もうちょっと説明すると左辺は係数が小さい微分作用素を u に作用させたもので評価できる．(これが (4.4.8)+(4.4.10) の帰結．) したがって (4.4.9) より (4.4.11) がいえる．)

ここで $\langle Q_\infty^2 v, v \rangle_M \geq \lambda_0 \langle v, v \rangle_M$ であった．したがって

$$f(t) = \int_M |u(p,t)|^2 dp$$

とおくと，(4.4.11) より

$$-\frac{d^2 f}{dt^2} < (-\lambda_0 + \mu) f + C\delta \int_{t-1}^{t+1} f(s) ds \tag{4.4.12}$$

がいえる．ここで 1 変数関数についての次の初等的な補題を使う．

補題 4.4.11 α, Cを正の数，$f : [-S, S] \to \mathbf{R}$ を正値の関数とし

$$-\frac{d^2 f}{dt^2} < -\alpha f + C\delta \int_{t-1}^{t+1} f(s) ds$$

を仮定する．このとき$\delta \leq \delta_0(\alpha)$ ならば，α, Cのみによる正の数β, Bが存在して，

$$f(0) < Be^{-\beta S} \sup\{f(t) \mid t \in [S-2, S] \cup [2-S, -S]\}$$

が成り立つ．($\delta_0(\alpha)$, β, Bは Sによらない．)

証明 変な積分の項，$C\delta \int_{t-1}^{t+1} f(s) ds$ がなければ，これはごく易しい最大値の原理である．これがあるのでちょっと面倒であるがこの困難は所詮テクニカルで，次のようにすればよい．

補題を示すには，μが存在して，任意の $t_0 \in [-S, S]$ に対して，$|t_1 - t_0| \leq 2$ なる t_1で $f(t_1) \geq (1+\mu) f(t_0)$ なるものがあることを示せばよい．

そこで関数

$$g(t) = (1 - \kappa(t - t_0)^2) f(t)$$

を区間 $[t_0-1, t_0+1]$ で考える（κや仮定の$\delta_0(\alpha)$ は後から決める数でαのみによる）．もし $g(t)$ が区間の端（たとえば t_0+1）で最大値をとれば，

$$f(t_0)=g(t_0)\le g(t_0+1)=(1-\kappa)f(t_0+1)$$

より $t_1=t_0+1$ とおけばよい．

そうでないとして，$t_2\in(t_0-1,t_0+1)$ で $g(t)$ が最大になるとしよう．このとき

$$0=g'(t_2)=(1-\kappa(t_2-t_0)^2)f'(t_2)-2\kappa(t_2-t_0)f(t_2) \tag{4.4.13}$$

また

$$0\ge g''(t_2)=(1-\kappa(t_2-t_0)^2)f''(t_2)-4\kappa(t_2-t_0)f'(t_2)-2\kappa f(t_2) \tag{4.4.14}$$

(4.4.13) を (4.4.14) に代入して，

$$f''(t_2)\le\frac{2\kappa(1-\kappa(t_2-t_0)^2)+8\kappa^2(t_2-t_0)^2}{(1-\kappa(t_2-t_0)^2)^2}f(t_2)$$

ごたごたした式だが，$|t_2-t_0|\le 1$ であったから，κをαに比べて十分小さくとっておけば，これから

$$f''(t_2)\le\frac{\alpha}{2}f(t_2)$$

がでる．ここで仮定$-\frac{d^2f}{dt^2}<-\alpha f+C\delta\int_{t-1}^{t+1}f(s)ds$ を使うと，

$$C\delta\int_{t_2-1}^{t_2+1}f(s)ds\ge\frac{\alpha}{2}f(t_2)$$

がでる．また，$f(t_0)=g(t_0)\le g(t_2)\le f(t_2)$．したがって，

$$2\sup\{f(s)\mid s\in[t_2-1,t_2+1]\}\ge\frac{\alpha f(t_2)}{2C\delta}\ge\frac{\alpha f(t_0)}{2C\delta}$$

δを十分小さくして，$\frac{\alpha}{2C\delta}>2$ となるようにすれば，この場合も，

$$\sup\{f(s)\mid s\in[t_0-2,t_0+2]\}\ge 2f(t_0)$$

これで補題 4.4.11 は証明された．　　証明終わり

(4.4.12) と補題 4.4.11 より

$$f(t) < Cf(T)e^{-\beta(t-T)}$$

$(t > T)$ が得られる．$f(T) < C||u||_{L^2}$ は (4.4.11) から直ちに得られるから，これで (4.4.5) 弱が示された.（前に注意したようにノルムはどれをとっても同じであった.）

定理 4.4.10 の証明終わり

以上で無限遠が直積の場合の解析について我々が必要とすることは線形方程式に関わる部分に対してはほぼ説明し終わった.

これを当てはめると AHS 複体がフレドホルム複体であることが証明されたことになる.

このことが定理 4.3.1 の証明のうちで線形の部分にあたる．非線形の部分については次節参照．ただし一つ注意しなければならないのはソボレフの補題から定まる写像 $u \mapsto u \wedge u$ が $L^2_{k+1} \to L^2_k$ なる連続写像であることであるが，これは次のようにして示せる．まず $||u||_{L^4_k(D)} \leq C(D)||u||_{L^2_{k+1}(D)}$ は任意の相対コンパクトな D に対して示せる.（これはソボレフの補題）．我々の多様体 X は無限遠で直積型であるから**有限種類**の D の（無限）和に書ける．したがって

$$||u||_{L^4_k(X)} = \sum ||u||_{L^4_k(D_i)} \leq \max\{C(D_i)\} \sum ||u||_{L^2_{k+1}(D_i)} = C||u||_{L^2_{k+1}(X)}$$

定理 4.3.1 の証明には次元の計算すなわち AHS 複体の指数も調べなければならない．これについては§4.7,§4.8 を参照せよ.

§ 4.5　ASD 接続の減衰評価

この節では前節の定理の非線形化にあたる次の定理 4.5.1 を証明する．Xを完備で向きの付いた4次元多様体で，X–K（Kはコンパクト集合）は$M\times(0,\infty)$と等長的とする．ζをX上の$SU(2)$ベクトル束とする．さらにM上の自明でない平坦接続のゲージ同値類は有限個ですべて既約かつそれらに対して$H^1(M; Ad\, a) = 0$が成り立つとする．この条件は特に$H^1(M;\mathbf{Z}) = 0$を意味する．($H^1(M;\mathbf{Z}) \neq 0$ならば$\pi_1(M) \to U(1)$なる自明でない準同型がありこれから可約な平坦$SU(2)$接続が作れる.）この条件下では$\widetilde{R}(M)$は離散集合である．($\widetilde{R}(M)/\mathbf{Z} = R(M)$は有限集合である.）

定理 4.5.1　Aをζ上の接続とし

(4.5.1.1)　$-F_A = *F_A$

(4.5.1.2)　$\int_X ||F_A||^2 * 1_X < \infty$

と仮定する．するとM上の平坦接続aとゲージ変換gが存在して

$$|g^*A - p^*a|_{C^k}(x,t) < C_k e^{-c_k t}$$

が成り立つ．ここで$p : X - K \to M$は射影でC_k,c_kは正の数．

定理 4.5.1 では接続にもゲージ変換にも境界条件を付けていない．逆に定理 4.5.1 からコンパクト集合の外が半直線と3次元多様体の直積である非コンパクト多様体上で ASD 接続のモジュライ空間を考えるとき，境界条件をどのようにとったらよいかわかる（本節後半で論ずる）．定理 4.5.1 の証明は（特に以下の第2ステップ）前節の線形の場合とほとんど同じである．

定理の証明は二つのステップに分かれる．最初に示すのは次の事実である．

補題 4.5.2　$U = M \times [0,1] \subseteq V = M \times [-1,2]$とする．$A$を$V$上の ASD 接

続で

$$\int_V ||F_A||^2 * 1 < \varepsilon_0$$

と仮定すると，ゲージ変換 g と U 上の平坦接続 a があって

$$|g^* A - a|_{C_k(U)} < C_k ||F_A||_{L^2(V)}$$

が成り立つ．ここで ε_0, C_k は正の数でリーマン多様体 U, V だけによる．

この補題は U, V が $U = M \times [0,1] \subseteq V = M \times [-1,2]$ でなくても，V が完備なリーマン多様体の相対コンパクトな部分集合で U がその閉包が V に含まれるような開集合であれば成立する．特別な場合として $U = D^4 \subseteq V = D^2(2)$ を考えたのがウーレンベック (Uhlenbeck) の定理 3.3.2 であった．補題 4.5.2 の証明は定理 3.3.2 を使ってはり合わせについての議論をするとできる．これはもう少し後で述べる．

定理 4.5.1 の証明に補題 4.5.2 を使おう．A を (4.5.1.1),(4.5.1.2) を満たす接続とする．$X - K = \bigcup_i (M \times [i, i+2])$ と分割し，$D_i = M \times [i, i+2]$ とおく．ε_0 を補題 4.5.2 の定数とする．A の接続の L^2 ノルムは有限と仮定したから，$\int_{D_i} ||F_A||^2 * 1 < \varepsilon_0$ が有限個の i を除いて成立する．したがってそれらの有限個の i を除いて補題 4.5.2 を D_i 上適用できる．$i > T_0$ なるどの i に対しても適用できるとしよう．すると g_i なる D_i 上のゲージ変換で $|g_i^* A - a_i| < C\varepsilon_0$ が D_i 上成立するとしてよい．ここで a_i は M 上の平坦接続である．

$D_i \cap D_{i+1} = M \times [i+1, i+2]$ 上で $|(g_i^{-1} g_{i+1})^* a_i - a_{i+1}| < C\varepsilon_0$ であった．したがって $\widetilde{R}(M)$ が離散集合であることを用いると，a_i はすべてゲージ同値であることがわかる．これらのゲージ変換を 1 の分解ではり合わせると，X 上のゲージ変換 g で

$$|g^* A - a|\,(x,t) < C\varepsilon_0$$

が任意 $t > T_0$ に対して成立するようにできる．必要なら T_0 を大きくとり直して

$$|g^* A - a|\,(x,t) < \varepsilon_1$$

としておく．ここでε_1は後で決める正の数である．また

$$(4.5.1) \qquad ||F_A||_{L^2(M\times[T_0,\infty))} < \varepsilon_1$$

が満たされるとしてよい．

以上で証明したことは大体 g^*A が $t\to\infty$ で a にとにかく収束することであった．定理 4.5.1 はこの収束が指数関数の速さであることを主張している．このことの成立する理由はたとえば次のように考えられる．方程式 $F_A^+=0$ を考えると，この線形化方程式は $d_A^+u=0$ である．つまり $|A-a|$ が小さいとき差 $u=A-a$ は $|d_a^+u|\le|u|^2$を満たす．これからもしも $d_a^+=-\frac{d}{dt}+\mathcal{D}_a$で $\mathcal{D}_a$が可逆ならば，前節の議論で $u=A-a$ が指数関数的に減衰することが証明できる．しかしこれを実行するには少しこの議論を変える必要がある．なぜならゲージ変換の自由度だけ $d_A^+u=0$ は楕円型でないからである．この難点を解決する一つのアイディアはクーロン (Coulomb) ゲージを使うことであるが，今の状況でクーロンゲージの存在を証明するのは少し面倒である（可能であるが）．また可約な接続（たとえば自明な接続）の近くでは $d_A^+u=d_A^*u=0$ としてもまだ0固有値がでてきて，話が（技術的に）やっかいになる．それでここでは接続のかわりに曲率の方を評価する．つまり

補題 4.5.3　A を $M\times[-T_1,T_1]$ 上の ASD 接続とし $|A-a|(x,t)\le\varepsilon_1$なる平坦接続 a が存在するとする．また $H^1(M;Ad\ a)=0$ を仮定する．このとき

$$|F_A|_{C^k}(x,t)\le C_k e^{-\mu\min\{T_1+t,T_1-t\}}$$

が成立する．ここでε_1,C_k,μは T_1によらない正の数で，T_1はある正の数以上の任意の数である．

補題 4.5.3 が示されれば，(4.5.1) 式の証明に使った議論（補題 4.5.2 を使って接続の平坦接続からのずれを，曲率で評価する）をそのまま繰り返して，定理 4.5.1 が証明される．以下補題 4.5.3 を証明する．

証明　ASD 接続の曲率は調和型式である．すなわち，$\Delta_A F_A=0$．もし $A=a$

(dt 成分を持たない接続で，しかも t について一定でそれが a) ならば

$$\Delta_{M\times[-T,T],a} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta_{M,a}$$

である．ここで右辺の$\Delta_{M,a}$は$\Gamma(M; su(2)\otimes\Lambda^1(M))$上のラプラシアンで，また右辺では $su(2)\otimes\Lambda^2_+ = su(2)\otimes p^*\Lambda^1(M)$ とみなしている．

さて仮定により $|A-a|(x,t)\le\varepsilon_1$．これから A が ASD 接続であることを使い，定理 3.3.2 を用いると

$$|A-a|_{C^k}(x,t)\le C_k\varepsilon_1$$

がわかる．したがって，

$$\Delta_A - \left(-\frac{d^2}{dt^2}+\Delta_{a,M}\right)$$

は 1 階以下の作用素で，その係数は k階以下の微分まで込めて $C_k\varepsilon$で評価される．よって

$$\begin{aligned}
&\left|\left(-\tfrac{d^2}{dt^2}+\Delta_{a,M}\right)(F_A)(x,t)\right|_{C^k}\\
&\quad = \left|\Delta_A(F_A) - \left(-\tfrac{d^2}{dt^2}+\Delta_{a,M}\right)(F_A)(x,t)\right|_{C^k}\\
&\quad \le C_k\varepsilon|F_A(x,t)|_{C^{k+1}}
\end{aligned}$$

が任意の Sに対して成り立つ．もともと F_Aは楕円型方程式$\Delta_A F_A = 0$ の解だから，ノルムはあまり気にしなくていい．すなわち

$$|F_A|_{C^k}(x,t)\le C_k||F_A||_{L^2(D((x,t),1))} \tag{4.5.2}$$

が成り立つ．($D((x,t),1)$ は (x,t) との距離が 1 以下の点全体を指す.) よって，

$$\begin{aligned}
&\left|\left|\left(-\tfrac{d^2}{dt^2}+\Delta_{a,M}\right)(F_A)\right|\right|_{C^k}(x,t)\\
&\quad \le C_k\varepsilon\left|\left|\left(-\tfrac{d^2}{dt^2}+\Delta_{a,M}\right)(F_A)\right|\right|_{C^k}(x,t)\\
&\quad \le C_k\varepsilon||(F_A)||_{L^2(M\times[S-1,S+1])}
\end{aligned} \tag{4.5.3}$$

一方で，$H^1(M; Ad\ a) = 0$ を仮定したから，

$$\langle \Delta_{a,M}(u), u\rangle \geq \alpha\langle u, u\rangle \tag{4.5.4}$$

よって，$f(t) = \int_{M\times\{t\}} |F_A|^2 dx$ とおけば，(4.5.3),(4.5.4) より

$$-\frac{d^2 f}{dt^2} < \alpha f + C\delta \int_{t-1}^{t+1} f(s)ds$$

が成り立つ．したがって，補題 4.5.3 は補題 4.4.11 と (4.5.2) より得られる．

証明終わり

以上で定理 4.5.1 の証明が（補題 4.5.2 を除いて）完成した．この定理は次の（有限次元）モース理論の定理の無限次元版とみなせる．

$f : M \to \mathbf{R}$ をモース関数 $p \in M$ をその臨界点とする．このとき $d(\ell(t), p) \leq \varepsilon$, $-T < t < T, \frac{d\ell}{dt} = \mathrm{grad}\, f$ ならば $d(p, \ell(t)) \leq Ce^{-c\min\{T+t, T-t\}}$.

次に定理 4.5.1 を使って除去可能特異点定理 2.4.2 を証明しよう．(循環論法になっていないことを確かめるため，今まで何を使ったかを書いておくと，§3.3 の定理 3.3.1，3.3.2 は使った．また補題 4.5.2 の証明でもこれらは使う．それ以外に使ったのは陰関数定理や局所理論に属する結果でコンパクト性などの大域理論に属することは（定理 3.3.1，3.3.2 以外は）使っていない．)

定理 2.4.2 では $D^4 - \{0\}$ の曲率 L^2 ノルムが有限な ASD 接続 A から出発した．$D^4 - \{0\}$ は $S^3 \times [0, \infty)$ と共形同値である．A を $S^3 \times [0, \infty)$ 上の ASD 接続とみなそう（ASD 方程式は共形変換不変であった）．曲率の L^2 ノルムも共形変換不変であるから，これに定理 4.5.1 または補題 4.5.2 が使える．S^3 上の平坦接続は自明なものだけだから，A をゲージ変換で動かして $|A|_{C^k}(x, t) \leq Ce^{-ct}$ とできる．はじめから A はそうなっているとしてよい．これから，A は $t \to \infty$ で 0 に収束しているのだから，$D^4 - \{0\}$ に戻せば原点までのびそうであるがそうはいかない．(接続の最大値ノルムなどは共形不変からはほど遠い．)

そこで次のようにする．$S^3 \times [0, \infty)$ 上の関数 χ_i を $S^3 \times [0, i)$ で 1，かつ $S^3 \times [i+1, \infty)$ で 0 であるようにとる．そうして $A_i = \chi_i A$ とおく．$\lim_{j\to\infty} \sup_i ||F_{A_i}||_{L^2(M\times[j,\infty))} \to 0$ である．A_i を $D^4 - \{0\}$ に戻したものを B_i とおく．これ

は原点で 0 とおくことで D^4上の接続に拡張できる．曲率の L^2ノルムは共形不変であったから $\lim_{\delta\to 0}\sup_i ||F_{B_i}||_{L^2(D(\delta))} \to 0$ である．したがって定理 3.3.1 によりもう一度ゲージ変換して $D(\delta)$ での B_iの L^2_1ノルムは有界としてよい．このゲージ変換（i による）を g_iとする．(部分列に移って）$g_i^* B_i$は L^2 収束するとしてよい．$g_i^* B_i$が L^2_1収束することを示そう．まず A_iははり合わせを行っている部分 $S^3\times[i,i+1]$ 以外では ASD である．したがって，$||F^+_{A_i}||_{L^2} = ||F^+_{B_i}||_{L^2}$ は $\sup\{|\nabla^k A|(x,t)\ |t\in[i,i+1]\}$ で評価される．すなわち

$$\lim_{i\to\infty} ||F^+_{B_i}||_{L^2} = 0 \tag{4.5.5}$$

一方

$$\begin{aligned} &F^+_{g_i^* B_i} - F^+_{g_j^* B_j} \\ &\quad = d^+(g_i^* B_i - g_j^* B_j) \\ &\qquad + P_+(g_i^* B_i \wedge (g_j^* B_j - g_i^* B_i) + (g_i^* B_i - g_j^* B_j)\wedge g_j^* B_j) \end{aligned}$$

δを十分小さくとり $||F_{B_i}||_{L^2_1(D(\delta))} \le \varepsilon$ が任意の i に対して成り立つとする．すると

$$\begin{aligned} &P_+(g_i^* B_i \wedge (g_j^* B_j - g_i^* B_i) + (g_i^* B_i - g_j^* B_j)\wedge g_j^* B_j)||_{L^2(B(\delta))} \\ &\quad \le C\varepsilon ||(g_j^* B_j - g_i^* B_i)||_{L^2_1(D(\delta))} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} &||d^+(g_i^* B_i - g_j^* B_j)||_{L^2(D(\delta))} \\ &\quad \le ||F^+_{g_i^* B_i}||_{L^2(B(\delta))} + ||F^+_{g_j^* B_j}||_{L^2(B(\delta))} \\ &\qquad + C\varepsilon ||g_i^* B_i - g_j^* B_j||_{L^2_1(D(\delta))} \end{aligned} \tag{4.5.6}$$

一方定理 3.3.1 の (2),(3) つまり

$$\begin{cases} d^*(g_i^* B_i - g_j^* B_j) = 0 \\ (g_i^* B_i - g_j^* B_j)(\vec{n}(p)) = 0 \end{cases}$$

より

$$(4.5.7)\qquad ||g_i^*B_i - g_j^*B_j||_{L_1^2(D(\delta))} \le C||d^+(g_i^*B_i - g_j^*B_j)||_{L^2(D(\delta))}$$

(4.5.5),(4.5.6),(4.5.7) より

$$||g_i^*B_i - g_j^*B_j||_{L_1^2(D(\delta))} \le \frac{C}{1-\varepsilon C}\left(||F_{g_i^*B_i}||_{L^2(D(\delta))} + ||F_{g_j^*B_j}||_{L^2(D(\delta))}\right) \to 0$$

つまり $g_i^*B_i$は L_1^2ノルムについてもコーシー (Cauchy) 列である．

$g_i^*B_i$の極限 B_∞は明らかに原点以外では ASD 方程式を満たし，今示したように L_1^2級であるから B_∞は ASD 接続である．よって§3.3 の定理 3.3.2 より B_∞はゲージ変換で C^∞級にできる．このゲージ変換を g'とおこう．$(g_ig')^*B_i - g'^*B_\infty \to 0$. B_iは作り方から $D^4 - D^4(\delta_i)$, $\delta_i \to 0$ で A_iに一致しまた A_iと g'^*B_∞はともに滑らかである．したがってブートストラッピングの議論を使って g_ig'には $D^4 - \{0\}$の任意のコンパクト部分集合で C^∞収束するような部分列が存在する．この極限を gと書けば $g^*A = B_\infty$ゆえ，g^*A は D^4上の滑らかな接続に拡張される．定理 2.4.2 は証明された．　　証明終わり

さて最後に補題 4.5.2 を証明しよう．前に述べたように，補題 4.5.2 は Vが完備なリーマン多様体の相対コンパクトな部分集合で，Uがその閉包が Vに含まれるような開集合であれば成立する．ここでは記号を簡単にするため $U = V$が閉 4 次元多様体 Xのときに証明する．すなわち

$$||F_A||_{L2} < \varepsilon_X, F_A = -*F_A \Rightarrow \exists a\ F_a = 0, ||g^*A - a||_{C^k} < C_{k,X}||F_A||_{L^2}$$

を示す．これにはたとえばウーレンベックのコンパクト性を使ってもよいが，そうすると開多様体の場合に証明を一般化しづらい．ここでは定理 3.3.2 から直接証明しよう．

この証明はそんなに難しいことではないのだが，きちんと書くと長くなる．ここでは大体のアイディアだけ書き細部は読者に任せる．

証明には多様体 Xのハンドル分解を用いる．すなわちまず Xを 3 角形分割し，これを使って $D_0^{(i)}, D_1^{(i)}, D_2^{(i)}, D_3^{(i)}$, $D_4^{(i)}$なる Xの D^4と可微分同相な開集合たちを図 4.5.1 のようにとる．

これらは次の性質を持つ．$X_m = \bigcup_i \bigcup_{j\le m} D_j^{(i)}$ とおくと，$X_m \cap D_{m+1}^{(i)} = S^m \times D^{4-m}$．また $X_{j-1}\cup D_j^{(i)}$ はある j 単体の近傍である．

仮定と定理 3.3.2 より $D_j^{(i)}$ 上のゲージ変換 $g_{i,j}$ で $|g_{i,j}^*A|_{C^k} < C_k\|F_A\|_{L^2}$ なるものがある．これらをうまくはり合わせていって X 上にゲージ変換を作るのが目的である．

まず $X_0 = \bigcup D_0^{(i)}$ では何も取り換える必要がない．($D_0^{(i)}$ たちはお互いに交じわらないから.) 次に $D_1^{(1)}$ を考えよう．$D_1^{(1)}$ は $D_0^{(i)}$ たちのうち二つ，たとえば $D_0^{(1)}$ および $D_0^{(2)}$ と交わる．$D_0^{(1)}\cap D_1^{(1)}$ は D^4 と同相でそこで $|(g_{0,1}^{-1}g_{1,1})^*0-0|_{C^k}\le C_k\|F_A\|_{L^2}$．したがって $g_{0,1}^{-1}g_{1,1}$ は定数値のゲージ変換に近い．この定数の分だけ $g_{1,1}$ を変えれば $g_{0,1}$ と $g_{1,1}$ はほぼはり合わさる．このずれの分は 1 の分解ではり合わせてしまう．次に $D_0^{(2)}\cap D_1^{(1)}$ を考える．ここでは $g_{0,2}^{-1}g_{1,1}$ がほぼ定数値であるからこの分 $g_{0,2}$ をずらせば $g_{1,1}$ と $g_{0,2}$ がはり合わさる．

こうやって続けていけば，$X_1 = X_0 \cup \bigcup D_1^{(i)}$ 上のゲージ変換 g_1 で $|g_1^*A-0|_{C^k} < C_k\|F_A\|_{L^2}$ なるものができるように見えるがそうはいかない．図 4.5.1 の場合には $D_0^{(1)}, D_1^{(1)}, D_0^{(2)}, D_1^{(2)}, D_0^{(3)}$ とたとえばこの順にゲージ変換を取り換えてはるのは可能だが，次に $D_1^{(3)}$ を考えると困ってしまう．$(D_0^{(1)}\cup D_0^{(2)}\cup D_0^{(3)}\cup D_1^{(1)}\cup D_1^{(2)})\cap D_1^{(3)} \cong D^4\cup D^4$ で $D_0^{(1)}, D_1^{(1)}, D_0^{(2)}, D_1^{(2)}, D_0^{(3)}$ まではったゲージ変換を g とすると，$g^{-1}g_{1,3}$ はこの各々の連結成分上でほぼ定数値である．しかし $g^{-1}g_{1,3}$ の二つの連結成分での値は一般には相異なる．そこでたとえば $g_{1,3}$ を取り換えて $(D_0^{(1)}\cup D_0^{(2)}\cup D_0^{(3)}\cup D_1^{(1)}\cup D_1^{(2)})\cap D_1^{(3)} \cong D^4\cup D^4$ の第 1 の連結成分で $g^{-1}g_{1,3}$ がほぼ恒等写像になるようにはできる．しかしそうすると第 2 の連結成分でそうすることは一般にはできない．これは当たり前で $X_1 = X_0\cup\bigcup D_1^{(i)}$ 上には自明な接続とゲージ同値でない平坦接続が存在する．このステップで証明すべきなのは $X_1 = X_0\cup\bigcup D_1^{(i)}$ 上に平坦接続を見つけ A をゲージ変換したものが $X_1 = X_0\cup\bigcup D_1^{(i)}$ 上でこの平坦接続と近いことである．

これは次のようにして証明できる．たとえば今述べた $D_0^{(1)}\cup D_0^{(2)}\cup D_0^{(3)}\cup D_1^{(1)}\cup D_1^{(2)}$ に $D_1^{(3)}$ をつけ加えるステップであるが，まず $(D_0^{(1)}\cup D_0^{(2)}\cup D_0^{(3)}\cup D_1^{(1)}\cup D_1^{(2)})\cap D_1^{(3)} \cong D^4\cup D^4$ の第 1 の連結成分ではり合わさるようにしておく．すると第 2 の連結成分上 $g^{-1}g_{1,3}$ はほぼ定数値であるがこの定数は 1 とは限らない．このときは $g^{-1}g_{1,3}-h$ が小さいような $h\in SU(2)$ を選び $\pi_1(D_0^{(1)}\cup$

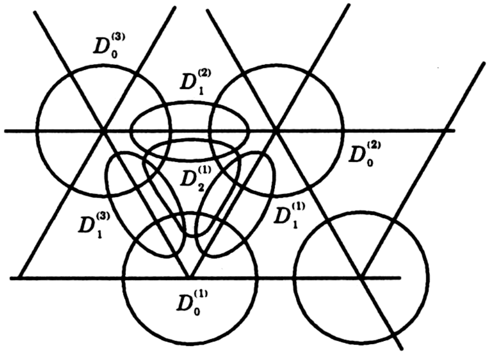


図 4.5.1

$D_0^{(2)} \cup D_0^{(3)} \cup D_1^{(1)} \cup D_1^{(2)} \cup D_1^{(3)}) = \mathbf{Z}$ の生成元を h に移す $Hom(\pi_1(D_0^{(1)} \cup D_0^{(2)} \cup D_0^{(3)} \cup D_1^{(1)} \cup D_1^{(2)} \cup D_1^{(3)}), SU(2))$ の元に対応する平坦接続をとる．すると A の $D_0^{(1)} \cup D_0^{(2)} \cup D_0^{(3)} \cup D_1^{(1)} \cup D_1^{(2)} \cup D_1^{(3)}$ への制限が適当なゲージ変換によってこの平坦接続と近くなることがわかる．

これを続ければ $X_1 = X_0 \cup \bigcup D_1^{(i)}$ 上の平坦接続 a と $X_1 = X_0 \cup \bigcup D_1^{(i)}$ 上のゲージ変換 g_1 で $|g_1^* A - a|_{C^k(X_1)} < C_k \|F_A\|_{L^2}$ なるものがとれる．

さて次にこれを $D_2^{(i)}$ にのばすことを考えよう．$D_2^{(i)} \cap X_1 = S^1 \times D^3$ であった．この上で $|(g_{2,1}^{-1} g_1)^* 0 - a|_{C^k} < C_k \|F_A\|_{L^2}$．これは $S^1 \times \{0\} \subseteq D_2^{(1)} \cap X_1 = S^1 \times D^3$ に沿っての a のホロノミーが十分小さいことを意味する．a を少し変えてこのホロノミーが 0 であるようにできる．すると $g_{2,1}^{-1} g_1$ はほぼ定数値である．($D_2^{(i)} \cap X_1 = S^1 \times D^3$ は連結であるから．) したがって $g_{2,1}$ を少し変えて g_1 と $g_{2,1}$ がはり合わさるようにできる．また a も 0 として D_2^1 まで拡張される．

これを繰り返すと $X_2 = X_1 \cup \bigcup D_2^{(i)}$ 上の平坦接続 a と $X_2 = X_1 \cup \bigcup D_2^{(i)}$ 上のゲージ変換 g_2 で $|g_2^* A - a|_{C^k(X_2)} < C_k \|F_A\|_{L^2}$ なるものがとれる．

これと同じでもっと易しい (3 ハンドルと 4 ハンドルについての) ステップをへるとこの平坦接続とゲージ変換は X 全体に拡張され求める性質を持つことがわかる．これが補題 4.5.2 の証明のあらましである．

以上で定理 4.5.1 の証明は完成した．

さて定理 4.5.1 を使うと§4.3 で $\mathcal{M}(X,\zeta;a)$ を定義するとき曖昧にしていた関数空間の取り方がわかる．というより定理 4.5.1 は ASD 接続が a なる平坦接続に無限遠で近づくなら大変速く近づくことを主張する．つまり $\mathcal{M}(X,\zeta;a)$ の定義をするときの無限遠の境界条件のとり方はあまりデリケートな問題ではないことを意味する（これが定理 4.5.1 の応用の一つである）．

さて $\mathcal{M}(X,\zeta;a)$ の定義をしよう．まず A_0を X上のζの接続でコンパクト集合の外で a と一致するものとする．次に定理 4.5.1 の c_0より小さい正の数δをとり

$$\widehat{\mathcal{M}}(X,\zeta;a)=\left\{A\in\mathcal{A}(X,\zeta)\;\middle|\;\begin{array}{l}\exists C\ |A-A_0(x,t)|_{C^0}<Ce^{-\delta t}\\ F_A+*F_A=0\end{array}\right\}$$

とおく．A に対して仮定する微分可能性はどれをとっても結局同じだからホントはどうでもいいのだが，ここでは C^∞級としておく．

次にゲージ群を考えよう．$\widehat{\mathcal{M}}(X,\zeta;a)$ に対する境界条件をゲージ群に対する境界条件と話が合うよう注意して選ぶ必要がある．このためには次の補題 4.5.4 を使う．まず

$$I_a=\left\{g:M\to SU(2)\middle|g^*a=a\right\}$$

とおく．もちろんここでは $g:M\to SU(2)$ はゲージ変換とみなしている．I_a は a が既約ならば $\{\pm1\}$ への定値写像全体になる．a が自明な接続とゲージ同値なときは I_aは $SU(2)$ と同型であるが，$a=0$ でない限りその元は定値写像ではない．

補題 4.5.4 gを (X,ζ) のゲージ変換としたとき次の三つの条件は同値である．

(1) $\exists A\in\mathcal{M}(X,\zeta;a)\quad g^*A\in\mathcal{M}(X,\zeta;a)$

(2) $\exists g_0\in I_a\ \ |g(x,t)-g_0(x)|_{C^1}\le Ce^{-\delta t}$

(3) $\forall A\in\mathcal{M}(X\zeta;a)\quad g^*A\in\mathcal{M}(X,\zeta;a)$

証明は

$$\frac{1}{C}d_{C^1}(g, I_a) \le |g^*a - a|_{C^0} \le C d_{C^1}(g, I_a)$$

に注意すればできる．これは基本的には§3.3 で述べたブートストラッピングである．細部は省略する．そこで

$$\mathcal{G}(X,\zeta;a) = \left\{ g \in \mathcal{G}(X,\zeta) \mid \exists g_0 \in I_a \ |g - g_0|_{C^1}(x,t) < Ce^{-\delta t} \right\}$$

とおく．これは$\widehat{\mathcal{M}}(X,\zeta;a)$ に作用する．この商を $\mathcal{M}(X,\zeta;a)$ と書く．これはA_0や a の$\widetilde{R}(M)$ での代表元の取り方によらない．後者は gが $\mathcal{G}_0(M,\zeta)$ の元（恒等写像とホモトピックなゲージ変換）とすると，コンパクト集合の外で gと一致するような X上のゲージ変換が存在することからわかる．

また定理 4.5.1 と補題 4.5.4 から $\mathcal{M}(X,\zeta;a)$ は c_0より小さい限りδによらない．

$\mathcal{M}(X,\zeta;a)$ の定義の仕方としては次のようにしてもよい．

$$\widehat{\mathcal{M}}_k(X,\zeta;a) = \left\{ A \in \mathcal{A}(X,\zeta) \;\middle|\; \begin{array}{l} A - A_0 \in L^2_k(X; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1) \\ F_A + *F_A = 0 \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{G}_{k+1}(X,\zeta;a) = \left\{ g \in \mathcal{G}(X,\zeta) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists g_0 \in I_a \\ u \in L^2_{k+1}(X, Ad\,\zeta) \\ \exp(-u)g = g_0 \quad \text{on}\, X - M \times (T,\infty) \end{array} \right\}$$

とおく．定理 4.5.1 により$\widehat{\mathcal{M}}_k(X,\zeta;a)$ の元は$\widehat{\mathcal{M}}(X,\zeta;a)$ の元と（局所 L^2_{k+1}級の変換で）ゲージ同値である．さらに$\widehat{\mathcal{M}}_k(X,\zeta;a)$ のある元を$\widehat{\mathcal{M}}_k(X,\zeta;a)$ の元に移すゲージ変換が $\mathcal{G}_{k+1}(X,\zeta;a)$ の元であることを示すことができる（これは補題 4.5.4 と同様）．したがって

$$\frac{\widehat{\mathcal{M}}_k(X,\zeta;a)}{\mathcal{G}_{k+1}(X,\zeta;a)} = \mathcal{M}(X,\zeta;a) \tag{4.5.8}$$

がわかる．要するに接続に対する条件とゲージ変換に対する条件をうまく合わせればモジュライ空間はどのノルムで定義しても同じである．

(4.5.8) 式の左辺の空間は前節でやったフレドホルム複体とうまく話が合っている．したがって (4.5.8) と前節の諸結果を併せて $\mathcal{M}(X,\zeta;a)$ の局所理論を組

み立てることができる．これは前章のコンパクト多様体の場合と同じなので省略する．

§ 4.6　ASD接続のはり合わせ

この節では前節までの結果を用いて定理4.2.11，定理4.3.3，定理4.3.5の証明のあらましを述べる．これらはお互いによく似ている．定理4.2.11，定理4.3.3は非コンパクトな4次元多様体上のASD接続のモジュライ空間のコンパクト化であり，定理4.3.5はコンパクトな多様体の族がコンパクトでない多様体の和にちぎれていくときのASD接続のモジュライ空間の振舞いを記述するものである．ここでは定理4.3.5の証明を述べる．他の二つは同様である．

まず設定を復習しよう．X_1,X_2を完備リーマン多様体とし $X_1 - K_1 \cong M \times (-1,\infty)$, $X_2 - K_2 \cong M \times (-\infty, 1)$ なる等長写像があるとした．$X_1 - M \times (T,\infty)$ と $X_2 - M \times (-\infty, -T)$ を $M \times \{T\} \to M \times \{-T\}$ なる等長写像ではり合わせたものを（計量も込めて）$X(T)$ と書いた．

次に X_1および X_2上にそれぞれ $SU(2)$ 束ζ_{k_1,X_1}, ζ_{k_2,X_2}をとる．前の約束に従うとこれらには無限遠の近傍での自明化が与えられていてこの自明化についての相対（第2）チャーン数がk_1, k_2であった．この二つを（与えられた自明化を使って）はり合わせて $X(T)$ 上の $SU(2)$ 束 $\zeta = \zeta_{k_1+k_2}$ができるのであった．

Tが大きいときのモジュライ空間 $\mathcal{M}(X(T), \zeta_{k_1+k_2})$ の様子を与えるのが定理4.3.5である．(定理4.3.5では X_1,X_2上のホモロジー類ないしは曲面も考えているのであるがそれはもう少し後で考える.)

この節でも M上の平坦接続についての仮定をおく．すなわち$\widetilde{R}(M)$ は自明な接続以外は既約な平坦接続からなり，また$\widetilde{R}(M)$ は離散集合で，その元 $[a]$ に対して $H^1(M; Ad\ a) = 0$ が成り立つと仮定する．(Mがホモロジー球面のときはこの仮定は適当な摂動を考えることではずすことができるのだが，面倒なのでもう少しそのままにしておく.）さて，$[a]$ なる$\widetilde{R}(M)$ の元で自明な接続ではないものをとろう．前節で定義したモジュライ空間 $\mathcal{M}(X_i, \zeta_{k_i}; a)$ を考えそのコンパクト部分集合 $Z_i \subseteq \mathcal{M}(X_i, \zeta_{k_i}; a)$ を考える．簡単のため埋め込み写像 $Z_i \to \mathcal{M}(X_i, \zeta_{k_i}; a)$ は$\widehat{\mathcal{M}}(X_i, \zeta_{k_i}; a)$ に持ち上がるとし，Z_iを$\widehat{\mathcal{M}}(X_i, \zeta_{k_i}; a)$ の部分集合とみなす．まず1の分解を使って写像 $Z_1 \times Z_2 \to \mathcal{A}(M(T), \zeta_{k_1+k_2})$ を作ろう．このての構成は式を書くと長くなって何が何だかわからなくなるが，と

りあえずはじめの一回は書いてみよう．χ_1, χ_2なる関数を

$$\chi_1(t) = \begin{cases} 1 & t < -\frac{2T}{3} \\ 0 & t > -\frac{T}{3} \end{cases}$$

$$\chi_2(t) = \begin{cases} 1 & t > +\frac{2T}{3} \\ 0 & t < +\frac{T}{3} \end{cases}$$

とおこう．$\chi_i : [-T, T] \to [0, 1]$ なのであるが，これを $M \times [-T, T] \subseteq X$上の関数とみなす．するとこれは$X$の滑らかな関数にのびる．($X - M \times [-T, T]$ の一方の連結成分で 1，もう一方で 0 でのばす.）これを使って $(A_1, A_2) \in Z_1 \times Z_2$ に対して $A_1 \#_T A_2 \in \mathcal{A}(X(T), \zeta_{k_1+k_2})$ を次の式で定義する．

$$A_1 \#_T A_2(p) = \begin{cases} A_1 & p \in X_1 - [0, \infty) \\ A_2 & p \in X_2 - (-\infty, 0] \\ a + \chi_1(t)(A_1 - a) & p = (x, t), t \in [-T, -T/3] \\ a + \chi_2(t)(A_2 - a) & p = (x, t), t \in [+T/3, +T] \\ a & p = (x, t), t \in [-T/3, T/3] \end{cases} \tag{4.6.1}$$

ごたごたした式だが図 4.6.1 を見ていただきたい．こうして得られた写像を $Pat_0(T) : Z_1 \times Z_2 \to \mathcal{A}(M, \zeta)$ と書こう．

さてここでまず証明するのは次の定理である．

定理 4.6.1　Z_1, Z_2に対応する AHS 複体の 2 次のコホモロジーは 0 と仮定する．任意の $T > T(X_1, X_2, Z_1, Z_2)$ に対して，$Pat_1(T) : Z_1 \times Z_2 \to \mathcal{A}(M, \zeta)$ なる写像が存在して次を満たす．

(1) $Pat_1(T)(A_1, A_2)$ は ASD 接続である．

(2) $||Pat_1(T)(A_1, A_2) - Pat_0(T)(A_1, A_2)||_{L^2_k} < C_k e^{-c_k T}$

(3) $\left|\left|\frac{\partial^{m_1+m_2}}{\partial {A_1}^{m_1} \partial {A_2}^{m_2}} Pat_1(T)(A_1, A_2) - \frac{\partial^{m_1+m_2}}{\partial {A_1}^{m_1} \partial {A_2}^{m_2}} Pat_0(T)(A_1, A_2)\right|\right|_{L^2_k}$
$< C_{k,m_1,m_2} e^{-c_{k,m_1,m_2} T}$

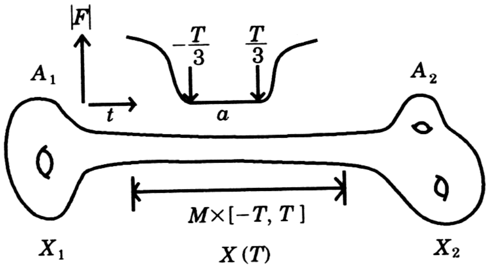


図 4.6.1

(4) $Pat_1(T)$ の構成はゲージ不変である．すなわち Z_iの $\mathcal{B}(X_i,\zeta_{k_i})$ から $\mathcal{A}(X_i,\zeta_{k_i})$ への持ち上げ方を変えても $Pat_1(T)$ のゲージ同値類は変わらない．

平たく言えば $Pat_0(T)$ を少し動かして $\mathcal{M}(X(T),\zeta_{k_1+k_2})$ への写像に変形できることを言っている．

定理の証明の原理は（§2.4 で類似の状況で説明したように）次のとおりである．まず $Pat_0(T)$ がほとんど ASD 方程式を満たすことを示す．これは 1 の分解ではり合わせたところを見てやればよいから直ぐできる．すると，非線形方程式（ASD 方程式）の解を探すには線形化方程式が全射であればよい．そのことを実行する方法として，ニュートン (Newton) 法や連続法があった．

さてこれらの方法を定理 4.6.1 の証明に使いたいわけであるが，それにはまず線形化方程式が全射であることを言う必要がある．これが定理の仮定に関わる．仮定を思い出そう．A_1に対応する AHS 複体とは

$$d^+_{A_1}\oplus d^*_{A_1} : L^2_1\left(X_1; Ad\,\zeta\otimes\Lambda^1\right)\to L^2\left(X_1; Ad\,\zeta\otimes(\Lambda^2_+\oplus\Lambda^0)\right) \tag{4.6.2}$$

のことであった．a は既約であるから A_1は既約である．したがって第 2 成分は全射である．定理の仮定は第 1 成分へも全射，すなわち (4.6.2) が全射であることを主張する．ここで

$$\Delta_{A_1,2.+} = (d^+_{A_1})\circ(d^+_{A_1})^* : L^2_2\left(X_1; Ad\,\zeta\otimes\Lambda^2_+\right)\to L^2\left(X_1; Ad\,\zeta\otimes\Lambda^2_+\right)$$

とおこう．これは全射である．一方§4.4 で示したように 0 はこの作用素の高々離散スペクトルである．したがって

$$||\Delta_{A_1,2.+}(u)||_{L^2} \geq \alpha_1 ||u||_{L^2} \tag{4.6.3.1}$$

なる正の数α_1が存在する．同様に

$$||\Delta_{A_2,2.+}(u)||_{L^2} \geq \alpha_2 ||u||_{L^2} \tag{4.6.3.2}$$

が A_2の方に対して言える．さて次にはり合わせた後の AHS 複体の一部

$$d^+_{Pat_0(T)(A_1,A_2)} : L^2_1\left(X(T); Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1\right) \to L^2\left(X(T); Ad\,\zeta \otimes \Lambda^2_+\right)$$

とそれから決まる自己共役作用素

$$\begin{aligned}\Delta_{Pat_0(T)(A_1,A_2),2.+} = (d^+_{Pat_0(T)(A_1,A_2)}) \circ (d^+_{Pat_0(T)(A_1,A_2)})^* \\ : L^2_2(X(T); Ad\,\zeta \otimes \Lambda^2_+) \to L^2(X(T); Ad\,\zeta \otimes \Lambda^2_+)\end{aligned}$$

を考えよう．次の補題は (4.6.3) から導かれる．

補題 4.6.2 $d^+_{Pat_0(T)(A_1,A_2)}$は十分大きい Tに対して全射である．また

$$||\Delta_{Pat_0(T)(A_1,A_2),2.+}(u)||_{L^2} \geq (\min\{\alpha_1, \alpha_2\} - o(T))||u||_{L^2}$$

ここで $o(T)$ は $T \to \infty$ で 0 に収束する数である．

補題で注目しておいて欲しいのは $\min\{\alpha_1, \alpha_2\} - o(T) > \alpha > 0$ なるαが，十分大きい Tに対して，Tと無関係にとれることである．補題の証明は§4.8 で行う．補題を使うと

$$||\Delta_{Pat_0(T)(A_1,A_2),2.+}(u)||_{L^2_k} \geq \alpha(k)||u||_{L^2_k} \tag{4.6.4}$$

さて補題があると定理 4.6.1 はニュートン法または連続法で証明できる．ここでは連続法でやってみよう．

その前に次の評価に注目しておく．

$$||F^+_{Pat_0(T)(A_1,A_2)}||_{L^2_k} < C_k e^{-c_k T} \tag{4.6.5}$$

これは前節の評価式（定理 4.5.1）から直ちに得られる．さて定理 4.6.1 を証明するために次の方程式を考えよう．

(4.6.6)
$$F_A^+ = tF^+_{Pat_0(T)(A_1,A_2)}$$

(4.6.7)
$$A - Pat_0(T)(A_1,A_2) \in \mathrm{Im}\,(d^*_{Pat_0(T)(A_1,A_2)})$$

2番目の式をつけたのは解を一意にするためである．そうしないとアプリオリ評価が示せない．無論 (4.6.7) はクーロンゲージをとっていることを意味するがもう少し条件が余計である．(クーロンゲージは $d^*_{Pat_0(T)(A_1,A_2)}(A - Pat_0(T)(A_1,A_2)) = 0$ で (4.6.7) とはモジュライ空間の次元分の差がある.）さて次の補題を示したい．

補題 4.6.3　(4.6.6) と (4.6.7) は，$T > T(X_1,X_2,Z_1,Z_2)$ ならば，任意の $t \in [0,1]$ に対して解を持つ．

この補題を示すのに用いられるのが連続法である．補題 4.6.3 から定理 4.6.1 は後半の二つの評価を除いて示される．この二つの評価も補題の証明中同時に示す．

補題の証明は (4.6.6) と (4.6.7) の解があるような $t \in [0,1]$ の集合が開かつ閉であることを示すことによって行なう．まずそのためにアプリオリ評価をしておこう．k_0を十分大きくとり一つ固定しておく．

補助補題 4.6.4　A が (4.6.6) と (4.6.7) を満たし

$$||A - Pat_0(T)(A_1,A_2)||_{L^2_{k_0}} < \varepsilon$$

とすると任意の kに対して

$$||A - Pat_0(T)(A_1,A_2)||_{L^2_k} < C_k e^{-c_k T}$$

が成り立つ．ここでε, C_k, c_kは定数で Tによらない．

証明　A は (4.6.7) を満たすとし

$$A - Pat_0(T)(A_1, A_2) = B = d^*_{Pat_0(T)(A_1,A_2)}(u)$$

とおく．

$$F_A^+ = d^+_{Pat_0(T)(A_1,A_2)}(B) + F^+_{Pat_0(T)(A_1,A_2)} + P_+(B \wedge B)$$

ゆえ，kが十分大ならば命題 3.1.9 より $||P_+(B \wedge B)||_{L^2_k} \le C||B||^2_{L^2_k}$であるから，

$$(4.6.8)\quad ||\Delta_{Pat_0(T)(A_1,A_2),2.+}(u)||_{L^2_k} \le ||F^+_{Pat_0(T)(A_1,A_2)}||_{L^2_k} + C||B||^2_{L^2_k}$$

が成り立つ．これと (4.6.4) より

$$(4.6.9)\qquad ||u||_{L^2_k} \le C\left(||F^+_{Pat_0(T)(A_1,A_2)}||_{L^2_k} + ||B||^2_{L^2_k}\right)$$

(4.6.8),(4.6.9) とゴルディングの不等式より

$$(4.6.10)\quad ||B||_{L^2_{k+1}} \le C||u||_{L^2_{k+2}} \le C\left(||F^+_{Pat_0(T)(A_1,A_2)}||_{L^2_k} + ||B||^2_{L^2_k}\right)$$

よって $k = k_0$とおき $C\varepsilon \le \frac{1}{2}$ととっておけば

$$||B||_{L^2_{k_0+1}} \le \frac{C||F^+_{Pat_0(T)(A_1,A_2)}||_{L^2_{k_0}}}{1 - C||B||_{L^2_{k_0}}} \le 2C||F^+_{Pat_0(T)(A_1,A_2)}||_{L^2_{k_0}}$$

これで求める評価は $k = k_0 + 1$ に対しては示された．$k_0 + 2$ に対して示すには (4.6.10) を $k = k_0 + 1$ に対して使い $k_0 + 1$ に示したばかりの評価式を使って右辺の第 2 項を評価すればよい．以下同様．　証明終わり

さて Tを補助補題の定数について $C_{k_0} e^{-Tc_{k_0}} < \frac{\varepsilon}{100}$ となるように選んでおく．(4.6.6) と (4.6.7) が $||A - Pat_0(T)(A_1, A_2)||_{L^2_{k_0}} < \varepsilon$なる解を持つような t の集合を $S(T)$ とする．

補助補題 4.6.5　(4.6.6) と (4.6.7) の解で $||A - Pat_0(T)(A_1, A_2)||_{L^2_{k_0}} < \varepsilon$ なるものは存在すれば一意である．

証明　二つあったとしてこれに対応する u_1, u_2, B_1, B_2をとると,

$$\Delta_{Pat_0(T)(A_1,A_2),2.+}(u_i) = (t-1)F^+_{Pat_0(T)(A_1,A_2)} - P_+(B_i \wedge B_i)$$

よって，命題 3.1.9 より

$$\begin{aligned}
&||\Delta_{Pat_0(T)(A_1,A_2),2.+}(u_1 - u_2)||_{L^2_k} \\
&\qquad \le C||B_1 \wedge B_1 - B_2 \wedge B_2||_{L^2_k} \\
&\qquad \le C||B_1 \wedge (B_1 - B_2)||_{L^2_k} + C||(B_1 - B_2) \wedge B_2||_{L^2_k} \\
&\qquad \le C||B_1||_{L^2_k}||B_1 - B_2||_{L^2_k} + C||B_2||_{L^2_k}||B_1 - B_2||_{L^2_k}
\end{aligned}$$

これから前の補助補題の証明と同様にして

$$||(u_1 - u_2)||_{L^2_k} \le C\varepsilon||(u_1 - u_2)||_{L^2_k}$$

が証明される．よって $C\varepsilon$ が 1 より小さくなるようにε をとっておけば $u_1 = u_2$.

証明終わり

補助補題 4.6.5 の証明をもう少し精密化すると解が A_1, A_2, t, T について連続であることがわかる（この証明は略す）.

さてこれで $S(T)$ が閉集合であることが証明できる．すなわち $t_i \to t$ とし各々の t_i に対して任意の A_1, A_2 に対して解があるとする．するとこの解は補助補題 4.6.5 により $L^2_{k_0}$ 収束する部分列を持つ．この極限は t に対する解である．また $C_{k_0}e^{-Tc_{k_0}} < \frac{\varepsilon}{100}$ より $||A - Pat_0(T)(A_1, A_2)||_{L^2_{k_0}} < \varepsilon$ も満たされる．したがって $t \in S(T)$.

次に S が開集合であることを示そう．これは陰関数の定理から次のようにして示される．$t \in S(T)$ とする．方程式

$$F^+_{A_0 + d^*_{Pat_0(T)(A_1,A_2)}(u+\delta u)} = (t+\delta t)F^+_{Pat_0(T)(A_1,A_2)}$$

を考え，これが十分に小さい δt に対して解を持つことを示す．仮定は

$$F^+_{A_0 + d^*_{Pat_0(T)(A_1,A_2)}(u)} = tF^+_{Pat_0(T)(A_1,A_2)}$$

である．

それには $u \mapsto F^+_{Pat_0(T)(A_1,A_2) + d^*_{Pat_0(T)(A_1,A_2)}(u)}$ なる写像の微分が可逆ならば

よい．この微分は

$$d^+_{Pat_0(T)(A_1,A_2)+d^*_{Pat_0(T)(A_1,A_2)}(u)} \circ (d^+_{Pat_0(T)(A_1,A_2)})^*$$

で

$$\Delta_{Pat_0(T)(A_1,A_2),2.+} = d^+_{Pat_0(T)(A_1,A_2)} \circ (d^+_{Pat_0(T)(A_1,A_2)})^*$$

に近い．よって補題 4.6.2 よりこれは全射である．以上で補題 4.6.3 の証明が終わった．

定理 4.6.1 の方であるが，示すべき評価のうち (2) はすでに示されている．(3) の証明は同様なので省略する．(4) は構成をじっくり考え直せばできる．

証明終わり

さて定理 4.6.1 の証明が終わったので次の命題 4.6.6 （これは定理 4.3.5 の証明の半分にあたる）を示すことができる．まず定理 4.3.5 の状況を思い出そう．m_i, d_i, k_i を $m_1 = 8k_1 + 3(b_1(X_1) - 1 - b_2^+(X_1)) - 2d_1$ を満たすように選んでおく．すると $\Sigma_{1,1},\cdots,\Sigma_{1,d_1}$ なる X_1 の曲面と$\eta_M(a) = m_1$ なる $a \in \widetilde{R}(M)$ に対して $\mathcal{N}(X_1,\zeta_{d_1},\Sigma_{1,1},\cdots,\Sigma_{1,d_1};a)$ は 0 次元多様体である．次に $m_2 = 8k_2 + 3(b_1(X_2) - 1 - b_2^+(X_2)) - 2d_2$, $\Sigma_{2,1},\cdots,\Sigma_{2,d_2} \subseteq X_2$ として $\mathcal{N}(X_2,\zeta_{d_2},\Sigma_{2,1},\cdots,\Sigma_{2,d_2};b)$ を考えよう．ここでちょっと注意を要するのはこの節の記号では $X_2 - K_2 = M \times (-\infty,1) = (-M) \times (-1,\infty)$ であることで，したがって $\eta_{-M}(b) = m_2$ のときに $\mathcal{N}(X_2,\zeta_{k_2},\Sigma_{2,1},\cdots,\Sigma_{2,d_2};b)$ は 0 次元多様体になる．さて定理 4.3.5 のとおり $2(d_1+d_2) = 8k + 3(b_1(X) - 1 - b_2^+(X))$ と仮定しよう．定理 4.3.4 を書くところで説明したように

$$\eta_M(a) + \eta_{-M}(a) = -3$$

が成り立つから（この式の証明は次節の補題 4.7.16 で与える）$\eta_M(a) = m_1$ と $\eta_{-M}(a) = m_2$ は同値であった．

命題 4.6.6　十分大きい T に対して有限集合

$$\mathcal{N}(X(T),\zeta_{k_1+k_2},\Sigma_{1,1},\cdots,\Sigma_{1,d_1},\Sigma_{2,1},\cdots,\Sigma_{2,d_2})$$

の位数は

$$\mathcal{N}(X_1,\zeta_{k_1},\Sigma_{1,1},\cdots,\Sigma_{1,d_1};a)\times\mathcal{N}(X_2,\zeta_{k_2},\Sigma_{2,1},\cdots,\Sigma_{2,d_2};b)$$

の位数以上である．

命題では位数についてだけ述べたが，証明では後者の集合の元から前者の元を構成する．その証明も定理 4.3.5 の証明には必要である．

証明のためにまず後者のモジュライ空間の作り方を復習しよう．これは $\mathrm{Res}_{\Sigma_{1,i}}:\mathcal{M}(X_1,\zeta_{k_1};a)\to\mathcal{B}(\Sigma_{1,i},\zeta_{k_1})$ なる制限写像をとり $\mathcal{B}(\Sigma_{1,i},\zeta_{k_1})$ 上の直線束 $L_{\Sigma_{1,i}}$ の切断 $s_{1,i}:\mathcal{B}(\Sigma_{1,i},\zeta_{k_1})\to L_{\Sigma_{1,i}}$ を使って

$$\mathcal{N}(X_1,\zeta_{k_1},\Sigma_{1,1},\cdots,\Sigma_{1,d_1};a)=\mathcal{M}(X_1,\zeta_{k_1};a)\cap\bigcap_i(s_{1,i}\circ\mathrm{Res}_{\Sigma_{1,i}})^{-1}(0)$$

とおくのであった．この元 A_1^0 を一つとろう．同様に

$$A_2^0\in\mathcal{N}(X_2,\zeta_{k_2},\Sigma_{2,1},\cdots,\Sigma_{2,d_2};a)=\mathcal{M}(X_2,\zeta_{k_2};a)\cap\bigcap_i(s_{2,i}\circ\mathrm{Res}_{\Sigma_{2,i}})^{-1}(0)$$

をとる．これらの $\mathcal{M}(X_1,\zeta_{k_1};a)$ および $\mathcal{M}(X_2,\zeta_{k_2};a)$ での近傍をそれぞれ Z_1, Z_2 とする．すでに証明した定理 4.6.1 を使うと写像

$$Pat_1(T):Z_1\times Z_2\to\mathcal{M}(X(T),\zeta_{k_1+k_2})$$

が十分大きい T に対して存在し，これはただ 1 の分解ではったただけの写像 $Pat_0(T):Z_1\times Z_2\to\mathcal{B}(X(T),\zeta_{k_1+k_2})$ に（$Z_1\times Z_2$ 方向の微分も込めて）近い．ところで我々が考えている曲面 $\Sigma_{1,i}$ は 1 の分解を使ってはり合わせを行う $X(T)$ の部分集合とは交わらない．したがって定義により

$$\mathrm{Res}_{\Sigma_{i,j}}Pat_0(T)(A_1,A_2)=\mathrm{Res}_{\Sigma_{i,j}}(A_i) \tag{4.6.11}$$

ここで $\Sigma_{i,j}$ はとりあえずは X_i に含まれていたが，これは $M\times[-1,\infty)$ ($i=1$ の場合)，$M\times(-\infty,1]$ ($i=2$ の場合) とは交わらないので$\Sigma_{i,j}\subseteq X(T)$ とも

みなすのであった．(4.6.11) と定理 4.6.1 の (2) より

$$|\mathrm{Res}_{\Sigma_{i,j}} Pat_1(T)(A_1, A_2) - \mathrm{Res}_{\Sigma_{i,j}}(A_i)| \le Ce^{-cT} \tag{4.6.12}$$

ここで次元を勘定すると $\dim Z_1 = 2d_1$, $\dim Z_2 = 2d_2$ である．つまり

$$(s_{1,1} \circ \mathrm{Res}_{\Sigma_{1,1}}, \cdots, s_{1,d_1} \circ \mathrm{Res}_{\Sigma_{1,d_1}}, s_{2,1} \circ \mathrm{Res}_{\Sigma_{2,1}}, \cdots, s_{2,d_2} \circ \mathrm{Res}_{\Sigma_{2,d_2}}) \tag{4.6.13}$$

の $Z_1 \times Z_2$ への制限は $2(d_1+d_2)$ 次元の空間から同じ次元の空間 $\mathbf{C}^{d_1+d_2}$ への写像である．($Z_1 \times Z_2$ は可縮としてよいからここへの直線束 $L_{\Sigma_{i,j}}$ の引き戻しは自明としてよい.) これは一点 (A_1^0, A_2^0) で 0 であった．しかも横断正則性を仮定するとこの点で (4.6.13) の微分は可逆としてよい．したがって (4.6.12) と微分についての同様の評価より，十分に大きい T に対して $s_{i,j}\mathrm{Res}_{\Sigma_{i,j}} Pat_1(T)(A_1, A_2) = 0$ が任意の $i = 1, 2$, $j = 1, \cdots, d_i$ に対して成立するような $(A_1, A_2) \in Z_1 \times Z_2$ が (A_1^0, A_2^0) の近くにただ一つ存在する．これで命題 4.6.6 は証明された．

証明終わり

命題 4.6.6 は（摂動と向き付けを抜きにして）定理 4.3.5 の証明の半分である．残り半分はこのようにして $\mathcal{N}(X(T), \zeta_{k_1+k_2}, \Sigma_{1,1}, \cdots, \Sigma_{1,d_1}, \Sigma_{2,1}, \cdots, \Sigma_{2,d_2})$ の元がすべて得られることを主張する．このことをこれから証明しよう．

今までは，既約な接続を境界条件に持つ ASD 接続から出発しそのはり合わせを論じてきたから，M 上に可約接続例えば自明な接続が存在することや，それが X_i 上の可約 ASD 接続にのびることはあまり気にしなくてよかった．(後者がどういう問題を引き起こすか我々はすでに§3.5 で経験済みである.) 証明の残りの部分ではそうはいかない．しかしこの節ではこの問題は忘れることにする．すなわち M 上の接続はすべて既約であるかのごとくに議論する．可約接続については§4.8 で議論しよう．

さて命題 4.6.6 の証明で作った写像を

$$\begin{aligned} Pat_{2,a}(T) : \mathcal{N}(X_1, \zeta_{k_1}, \Sigma_{1,1}, \cdots, \Sigma_{1,d_1}; a) \times \mathcal{N}(X_2, \zeta_{k_2}, \Sigma_{2,1}, \cdots, \Sigma_{2,d_2}; a) \\ \to \mathcal{N}(X(T), \zeta_{k_1+k_2}, \Sigma_{1,1}, \cdots, \Sigma_{1,d_1}, \Sigma_{2,1}, \cdots, \Sigma_{2,d_2}) \end{aligned}$$

とする．

「命題 4.6.7」　T が十分大きければ$\bigcup_{\eta(a)=m}\mathrm{Im}\ Pat_{2,a}(T)$ は$\mathcal{N}(X(T),\zeta_{k_1+k_2},\Sigma_{1,1},\cdots,\Sigma_{1,d_1},\Sigma_{2,1},\cdots,\Sigma_{2,d_2})$ 全体に一致する．

括弧が付いているのは可約接続を無視しているからである．

さて（可約接続を無視して）この命題を証明しよう．証明には背理法を用いる．すなわち $T_\ell\to\infty$ なる列と $[A_\ell]$ なる$\mathcal{N}(X(T),\zeta_{k_1+k_2},\Sigma_{1,1},\cdots,\Sigma_{1,d_1},\Sigma_{2,1},\cdots,\Sigma_{2,d_2})$ の元で$\bigcup_{\eta(a)=m}\mathrm{Im}\ Pat_{2,a}(T_\ell)$ に含まれないものがあるとして矛盾を導こう．

A_ℓ の $M\times[-T_\ell,T_\ell]\subseteq X(T_\ell)$ への制限を考えよう．T_ℓ は非常に大きい正の数であった．区間 $[-T_\ell,T_\ell]$ を $2T_\ell$ 個にわけて，$M\times[-T_\ell,T_\ell]=\bigcup Y_i$, $Y_i\cong M\times[0,1]$ としよう．ここで補題 4.5.2 を使う．A_ℓ の曲率の L^2 ノルムは（T_ℓ にもよらずに）一定であるから，補題 4.5.2 の仮定が満たされない $Y_i\cong M\times[0,1]$ の個数は有界である．これらの和を S と書きその連結成分を島と呼ぼう．どの島にも含まれない $Y_i\cong M\times[0,1]$ たちの和を U と書きその連結成分を海と呼ぼう．補題 4.5.2 よりどの海 U_j にも平坦接続 a_j があって A_ℓ のゲージ変換と a_j の差はε_0 より小さい．(S, U, a_j 等は T_ℓ による．このことを強調するときは $S(T_\ell)$ 等と書く.）a_j の中に可約接続がある場合は後で扱う．ここでは a_j はすべて既約とする．記号の節約のためはじめからゲージ変換をしておいて A_ℓ は海の上で a_j に近いとする．

上で述べたように島の数は有界であった．したがって簡単のためこの数は T_ℓ によらないとする（$T_\ell\to\infty$ の部分列に移る)．島の数を J とし各々の島 $S_j(T_\ell)$ 上に点 $(x_j,t_j(T_\ell))$ をとる．$t_j(T_\ell)<t_{j+1}(T_\ell)$ となるように順番を打っておく．$\lim_{\ell\to\infty}(t_{j+1}(T_\ell)-t_j(T_\ell))$ は収束する場合も発散する場合もある．$T_\ell\to\infty$ の部分列をとっておけば，これは有界であるか無限大に発散するかどちらかであるとしてよい．$\lim_{\ell\to\infty}(t_{j+1}(T_\ell)-t_j(T_\ell))$ が有界であるとき $S_j(T_\ell)$ と $S_{j+1}(T_\ell)$ は同じ群島に属すると定めることで，群島が定義できる．群島の数は有限でまた群島の直径も有界である．点 $(x_j,t_j(T_\ell))$ のうち各々の群島から一つずつとる．以下めんどうなので各々の群島はただ一つの島しか含まないとしてしまおう．

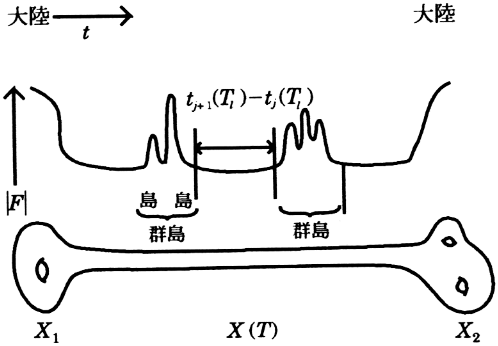


図 4.6.2

さて $-T_\ell \le t_j(T_\ell) \le T_\ell$ であるが，以下

$$\lim_{\ell\to\infty} |t_j(T_\ell)+T_\ell| = \lim_{\ell\to\infty} |t_j(T_\ell)-T_\ell| = \infty \tag{4.6.14}$$

であるような（つまり $\partial(M\times[-T_\ell,T_\ell])$ からの距離が ∞ に発散するような）j についてのみ考える．(最終的にはこのような島は一つもないことが示される．)

埋め込み $I_{j,\ell} : M \times [-t_j(T_\ell)-T_\ell, T_\ell - t_j(T_\ell)] \to X(T_\ell)$ を $I_{j,\ell}(x,t) = (x, t+t_j(T_\ell)) \in M\times[-T_\ell,T_\ell] \subseteq X(T_\ell)$ で定義する．${I_{j,\ell}}^*A_\ell$ を考えよう．この接続が定まっているのは空間 $M \times [-t_j(T_\ell)-T_\ell, T_\ell - t_j(T_\ell)]$ 上であるが式 (4.6.14) により $-t_j(T_\ell)-T_\ell \to -\infty$, $T_\ell - t_j(T_\ell) \to \infty$ であるのでこの空間は $M\times\mathbf{R}$ に近づく．

補題 4.6.8　$M\times\mathbf{R}$ の有限集合 Y と $M\times\mathbf{R}-Y$ で定義されたゲージ変換 $g_{j,\ell}$ が存在して，${g_{j,\ell}}^*{I_{j,\ell}}^*A_\ell$ は $M\times\mathbf{R}-Y$ の任意のコンパクト集合上で C^∞ 収束する部分列を持つ．

補題の証明は閉多様体の場合（定理 2.4.1）と全く同じである．再び記号の節約のためもとの列を部分列でおき換えて ${g_{j,T}}^*{I_{j,T}}^*A_j(T)$ は $M\times\mathbf{R}-Y$ の任意のコンパクト集合上 $A_j(\infty)$ に C^∞ 収束するとしてよい．Y の各点でウーレンベックの定理を用いて $A_j(\infty)$ は $M\times\mathbf{R}$ 上の接続としてよい．

補題 4.6.9　$A_j(\infty) \in \mathcal{M}(M \times \mathbf{R}; a_{j-1}, a_j)$

証明　島と島の間の距離は無限大に発散するとしたから（これは群島がそれぞれ一つの島からなることの言い換えである．そうでなければ島を群島でおき換えて以下の議論をすればよい．）$M \times [t_j(T_\ell) - c(T_\ell), t_j(T_\ell) + c(T_\ell)] \subseteq M \times [-T_\ell, T_\ell]$, $c(T_\ell) \to \infty$ なる $c(T_\ell)$ があって $M \times [t_j(T_\ell) - c(T_\ell), t_j(T_\ell) + c(T_\ell)]$ には島は一つしかないようにできる．

$M \times [t_j(T_\ell) - \frac{c(T_\ell)}{2}, t_j(T_\ell) + \frac{c(T_\ell)}{2}]$ の境界の近くは海で，しかも最寄りの島から $\frac{c(T_\ell)}{2}$ は離れている．補題 4.5.3 を使うと最寄りの島から t 離れている海の点では接続は対応する平坦接続 a_j と Ce^{-ct} しか違わない．したがって $A_j(\infty)$ は $t \to \mp\infty$ で a_{j-1}, a_j に近づく．　証明終わり．

系 4.6.10　$\eta(a_{j-1}) > \eta(a_j)$

これは $\mathcal{M}(M \times \mathbf{R}; a_{j-1}, a_j)$ が空でないことの帰結である．

次に「大陸」X_1, X_2 のところでも同様のことをしよう．すなわち埋め込み $I_{(1),T} : X_1 - M \times [T, \infty) \to X(T)$, $I_{(2),T} : X_2 - M \times (-\infty, -T] \to X(T)$ で引き戻して考える．

補題 4.6.11　X_1 の有限部分集合 Y の外で定義されたゲージ変換 $g_{(1),T}$ が存在して $g_{(1),T}{}^* I_{(1),T}{}^* A_j(T)$ は $X_1 - Y$ の任意のコンパクト集合上で C^∞ 収束する部分列を持つ．X_2 についても同様．

この極限である $A_{(1)}(\infty)$ なる X_1 上の ASD 接続の境界値は何であろうか．それを調べるには $t_j(T) + T$ が有界であるような j を考えに入れる必要がある．このような j が $j = 1, \cdots, J_0$ であるとする．すると

補題 4.6.12　$A_{(1)}(\infty) \in \mathcal{M}(X_1, a_{J_0})$

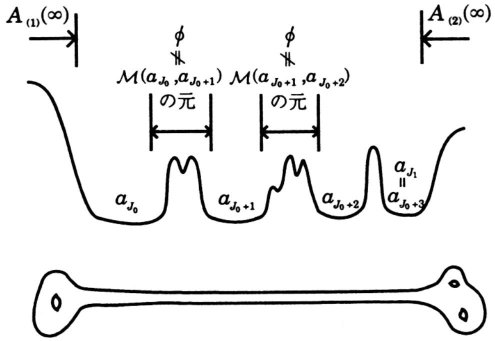


図 4.6.3

この証明は補題 4.6.8 の証明と同じであるので省略する．$X_{(2)}$ に対しても同様である．以上を図示すると図 4.6.3 になる．

さて次の補題の証明は多少微妙である．

補題 4.6.13　ある束 ζ' が存在して，$A_{(1)}(\infty) \in \mathcal{N}(X_1, \zeta', \Sigma_{1,1}, \cdots, \Sigma_{1,d_1}; a_{J_0})$

これを示すには補題 4.6.11 の Y について $Y \cap \Sigma_{1,1} = \cdots = Y \cap \Sigma_{1,d_1} = \emptyset$ が分かればよい．(s_i は接続の $\Sigma_{1,i}$ への制限にしかよらず，Y の外で A_T は $A_{(1)}(\infty)$ に収束し，$s_i(A_T) = 0$ であるから．) $Y \cap \Sigma_{1,1} = \cdots = Y \cap \Sigma_{1,d_1} = \emptyset$ を示すのはやはり次元の勘定である．ここでは可約接続の存在を忘れているのであるから，これは §3.5 でやった勘定より実は易しい．よりデリケートな場合を §4.8 でやるのでここでは省略する．

X_2 に対しても同様に $t_j(T) - T$ が有界な j が，$j = J_1 + 1, \cdots, J$ であるとすると

$$A_{(2)}(\infty) \in \mathcal{N}(X_2, \zeta'', \Sigma_{2,1}, \cdots, \Sigma_{2,d_2}; a_{J_1})$$

さて以上をまとめると：

$$\mathcal{N}(X_1, \zeta', \Sigma_{1,1}, \cdots, \Sigma_{1,d_1}; a_{J_0}) \neq \emptyset$$

$$\eta(a_{J_0}) > \eta(a_{J_0+1}) > \cdots > \eta(a_{J_1-1}) > \eta(a_{J_1})$$

$$\mathcal{N}(X_2, \zeta'', \Sigma_{2,1}, \cdots, \Sigma_{2,d_2}; a_{J_1}) \neq \emptyset$$

先に進むために一つ注意を要する．補題 4.6.13 では $A_{(1)}(\infty)$ の含まれている束のチャーン数を明示しなかった．それはバブルでいくつチャーン数を損しているかわからないからである．しかしチャーン数はバブルによって減るだけで増えはしない．したがって次のことがわかる．

$$c_2(\zeta') + c_2(\zeta'') \le c_2(\zeta)$$
$$\mathcal{N}(X_1, \zeta', \Sigma_{1,1}, \cdots, \Sigma_{1,d_1}; a_{J_0}) \ne \emptyset$$
$$\mathcal{N}(X_2, \zeta'', \Sigma_{2,1}, \cdots, \Sigma_{2,d_2}; a_{J_1}) \ne \emptyset$$

等号が成立するのは A_T の曲率が有界であるとき，すなわちバブルが生じていないときに限る．

さてここで次元の勘定をしよう．$\mathcal{N}(X_1, \zeta', \Sigma_{1,1}, \cdots, \Sigma_{1,d_1}; a_{J_0}) \ne \emptyset$ より

$$8c_2(\zeta') + 3(b_1(X_1) - 1 - b_+(X_1)) - 2d_1 - \eta(a_{J_0}) \ge 0$$

$\mathcal{N}(X_1, \zeta', \Sigma_{1,1}, \cdots, \Sigma_{1,d_1}; a_{J_0}) \ne \emptyset$ より

$$8c_2(\zeta'') + 3(b_1(X_2) - 1 - b_+(X_2)) - 2d_2 - (-3 - \eta(a_{J_1})) \ge 0$$

($\eta_{-M}(a_{J_1}) = -3 - \eta_M(a_{J_1})$ をここで使っている．)

この二つの式を足して $c_2(\zeta') + c_2(\zeta'') \le c_2(\zeta)$ を使うと

$$8c_2(\zeta) + 3(b_1(X) - 1 - b_+(X)) - 2(d_1 + d_2) + \eta(a_{J_1}) - \eta(a_{J_0}) \ge 0$$

ところで

$$8c_2(\zeta) + 3(b_1(X) - 1 - b_+(X)) - 2(d_1 + d_2) = 0$$

であった．また前に示したように

$$\eta(a_{J_0}) > \eta(a_{J_0+1}) > \cdots > \eta(a_{J_1-1}) > \eta(a_{J_1})$$

よって $\eta(a_{J_0}) = \eta(a_{J_1})$ すなわち大陸から離れたところには島はない．また $c_2(\zeta') + c_2(\zeta'') = c_2(\zeta)$ すなわちバブルは生じていない．

以上で次の補題を示したことになる．

補題 4.6.14　$A_{(1)}(\infty) \in \mathcal{N}(X_1, \zeta', \Sigma_{1,1}, \cdots, \Sigma_{1,d_1}; a)$, $A_{(2)}(\infty) \in \mathcal{N}(X_2, \zeta'',$

$\Sigma_{2,1},\cdots,\Sigma_{2,d_2};a)$ が存在して $A_T - Pat_0(T)(A_{(1)}(\infty), A_{(2)}(\infty))$ は各点で ε_0 以下である．

さて証明の最終段階はこの二つ A_T と $Pat_1(T)(A_{(1)}(\infty), A_{(2)}(\infty))$ が実は等しいことを示すことである．これは次のようにする．まず補題 4.6.14 を用いて A_T と $Pat_1(T)(A_{(1)}(\infty), A_{(2)}(\infty))$ を結ぶ．すなわち $A_T(s)$ で $A_T(0) = A_T$, $A_T(1) = Pat_1(T)(A_{(1)}(\infty), A_{(2)}(\infty))$ なるものをとる．(たとえば $A_T(s) = (1-s)A_T + sPat_1(T)(A_{(1)}(\infty), A_{(2)}(\infty))$ とおけばよい.) このとき

$$|A_T(s) - Pat_1(T)(A_{(1)}(\infty), A_{(2)}(\infty))|_{C^k} \le C_k\varepsilon_0$$

が任意の s に対して満たされているようにできる．すると特に評価

$$||F^+_{A_T(s)}||_{L^2_k} < C_k e^{-c_k T}$$

が得られる．ここで補題 4.6.3 の証明を繰り返す．すると $A_T(s)$ が ASD 接続 $A'_T(s)$ で近似できる．$s = 0, 1$ では $A_T(s)$ はもともと ASD 接続であったから $A'_T(0) = A_T(0)$, $A'_T(1) = A_T(1)$．また補題 4.6.3 のところでも注意したように $A'_T(s)$ は s に対して連続にとれる．

以上で A_T と $Pat_1(T)(A_{(1)}(\infty), A_{(2)}(\infty))$ を結ぶ ASD 接続からなる十分短い道がとれたことになる．ここで定理 4.6.1 を思い出そう．そこでの Z_1,Z_2 としては $A_{(1)}(\infty)$,$A_{(2)}(\infty)$ の近傍をとる．次元を勘定すると

$$\dim M(X(T), \zeta) = \dim Z_1 + \dim Z_2$$

一方定理 4.6.1 の (3) より $Pat_1(T)$ の微分は消えない．したがって $Pat_1(T)$ は開集合の上への可微分同相写像である．一方作り方から $[A_T(1)] = [A'_T(1)]$ は $Pat_1(T)$ の像に含まれていた．したがって，写像 $s \mapsto [A'_T(s)]$ は $Z_1 \times Z_2$ への写像に持ち上がる．つまり $\phi; [0,1] \to Z_1 \times Z_2$ で $Pat_1\phi(s) = [A'_T(s)]$ なるものがある．よって $[A_T(0)] = [A'_T(0)]$ は $Pat_1(T)$ の像に含まれている．ここで写像 (4.6.13) の微分の可逆性を使うと $[A_T(0)]$ と $[A_T]$ がともに (4.6.13) の (お互いの距離が非常に近い) 0 点であることよりこの二つは一致しなければな

らない.

以上で「命題 4.6.7」は可約接続についての議論を除いて証明された.

§ 4.7 楕円型作用素の指数の和公式

本節で述べることは前節の内容の線形版にあたる．すなわち前節では二つの多様体 X_1, X_2の上の非線形「楕円型」方程式を考え，X_1上の解と X_2上の解の組から $X(T) = X_1 \# X_2$上の解を作ることを行った．本節では，X_1, X_2上の線形楕円型方程式の解の組と $X(T) = X_1 \# X_2$上の解の関係について述べる．したがって本節の内容は§4.4 とも関係が深い．

まず状況設定を行おう．X_1上のベクトル束 E_1, F_1，および X_2上の E_2, F_2を考える．$P_i : E_i \to F_i$を 1 階（線形）楕円型作用素とする．これらは§4.4 の設定 4.4.4 にしたがっていると仮定しよう．すなわち

$$\begin{gathered} X_1 - K_1 = M \times (0, \infty) \\ E_1|_{X_1 - K_1} \cong F_1|_{X_1 - K_1} \cong p^*(\overline{E}) \\ E_2|_{X_2 - K_2} \cong F_2|_{X_2 - K_2} \cong p^*(\overline{E}) \\ X_2 - K_2 = M \times (-\infty, 0) \end{gathered}$$

とし，また

$$\begin{gathered} P_1|_{X_1 - K_1} \cong -\frac{\partial}{\partial t} + Q_t \\ P_2|_{X_2 - K_2} \cong -\frac{\partial}{\partial t} + \overline{Q}_t \\ \lim_{t \to \infty} Q_t = \lim_{t \to -\infty} \overline{Q}_t = Q_\infty = Q_{-\infty} \end{gathered}$$

とする．さらに $Q_t, \overline{Q}_t$は自己共役で $Q_\infty = Q_{-\infty}$は可逆とする．

この多様体の組から多様体 $X(T) = X_1 \# X_2$を前節のように作る．同型 $E_1|_{X_1 - K_1} \cong E_2|_{X_2 - K_2} \cong p^*(\overline{E})$, $F_1|_{X_1 - K_1} \cong F_2|_{X_2 - K_2} \cong p^*(\overline{E})$ を使って $X(T)$ 上のベクトル束 E,Fを作る．(E,Fは Tによるが混同の恐れはないと思うのでここでは Tを省略する．)

さらに $\lim_{t \to \infty} Q_t = \lim_{t \to -\infty} \overline{Q}_t = Q_\infty = Q_{-\infty}$から十分大きい Tに対して 1 の分解を使って微分作用素 $P_T : E \to F$を構成する．以下でする議論はどの 1 の分解をとっても Tが十分大きい限り成立する．したがって以下 P_T や 1 の分

解の分の不定性については考えない．

さて以下で証明する定理を述べよう．$P_1^*P_1$, $P_2^*P_2$, $P_T^*P_T$の固有値を考えよう．§4.4 で述べたように Q_∞^2の第 1 固有値をλ_0とすると $P_1^*P_1$, $P_2^*P_2$ の連続スペクトルはλ_0以上で始まる．したがって $P_1^*P_1$, $P_2^*P_2$ の固有値は$\lambda_0/2$ までは高々有限個である．これらを重複度も込めて小さい方から並べたもの（有限集合）をそれぞれ$\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}, \cdots$, $\lambda_{2,1}, \lambda_{2,2}, \cdots$ と書く．また $P_T^*P_T$の固有値を重複度も込めて小さい方から並べたものを$\lambda_{T,1}, \lambda_{T,2}, \cdots$と書こう．($P_1^*P_1$, $P_2^*P_2$, $P_T^*P_T$は正値対称作用素であるから固有値はすべて正の実数である．これら有限個の数$\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}, \cdots$, $\lambda_{2,1}, \lambda_{2,2}, \cdots$ を小さい方から（重複度も込めて）順に並べ直したものを$\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ と書く．

定理 4.7.1　$|\lambda_i - \lambda_{i,T}| < Ce^{-c_iT}$

同様のことが固有関数に対しても成立するがちょっと述べづらいので証明中に述べよう．前節の補題 4.6.2 は定理 4.7.1 より直ちに得られる．

一つ注意をしておく．$P_T^*P_T$の固有値の分布の $T \to \infty$ での振舞いを考えると，λ_0より小さいところでは定理がいうようにそれらの数はTによらずに有界である．しかしλ_0より先では様子が異なる．$X(T)$ 自身はコンパクトであるから $P_T^*P_T$自身には（どのTに対しても）連続スペクトルはない．$P_T^*P_T$ の固有値の集合はλ_0より先では $T \to \infty$ になるにつれて段々密になっていって，いわばその極限で連続スペクトルに「収束」する。

前節で使った場合のように我々は 0 に近い固有値にだけ興味を持っているので，この連続スペクトルに収束していく部分についてはあまり気にする必要がない。

さて定理の証明を始めよう。(実は一番本質的な部分はすでに§4.4 ですんでいる.）$\lambda_0/2$ より小さい数を一つ選んでλとしよう．λは $P_1^*P_1$, $P_2^*P_2$の固有値ではないとする．λ以下の固有値に属する $P_1^*P_1$, $P_2^*P_2$ の固有関数全体がはるベクトル空間を $V_{1,\lambda}$, $V_{2,\lambda}$ としよう．また $P_T^*P_T$ の固有値λ以下の固有関数全体がはるベクトル空間を V_λとする．以下同型写像 $I_T : V_{1,\lambda} \oplus V_{2,\lambda} \to V_\lambda$ を構成する.（この構成は「誤差 $C_ke^{-c_kT}$で標準的」である．このことは定理 4.7.1 の

証明には必要ないが，たとえば族の指数のはり合わせを論ずるときには必要になってくる.）u_1を$V_{1,\lambda}$の元としこれは$P_1^*P_1$の固有関数であるとしよう．すると定理4.4.10より評価

$$|u_1(x,t)| \le C||u_1||_{L^2}e^{-ct}$$

が成立する．これから1の分解により元$I_{1,T}(u_1) \in \Gamma(X(T),E)$が定まる．この1の分解の使い方はすでに何回も述べたので，ここでは詳しくは書かない．

この元は作り方より次の性質を持っている．

$$(4.7.1) \qquad ||P_T^*P_T(I_{1,T}(u_1)) - \mu \cdot I_{1,T}(u_1)||_{L^2} < Ce^{-cT}||I_{1,T}(u_1)||_{L^2}$$

（ここでμは$P_1^*P_1(u_1) = \mu u_1$で定める.）これで$I_{1,T} : V_{1,\lambda} \to \Gamma(X(T),E)$が構成できた．同様に$I_{2,T} : V_{2,\lambda} \to \Gamma(X(T),E)$を構成しこの二つをあわせて$I_{3,T} : V_{1,\lambda} \oplus V_{2,\lambda} \to \Gamma(X(T),E)$とする．(4.7.1)と$I_{2,T}$についての同様な式より次のことが示せる．

補題 4.7.2 $\Pi_\lambda : L^2(X(T),E) \to V_\lambda$を（正規直交）射影とすると

$$||\Pi_\lambda(I_{3,T}(u)) - I_{3,T}(u)||_{L^2} < Ce^{-cT}||I_{3,T}(u)||_{L^2}$$

証明 uが固有関数の場合に証明すれば十分である．$w = \Pi_\lambda(I_{3,T}(u)) - I_{3,T}(u)$とすると$w$は$V_\lambda$の直交補空間に属する．したがって

$$(4.7.2) \qquad ||P_T^*P_T(w)||_{L^2} > \lambda||w||_{L^2}$$

$P_1^*P_1$, $P_2^*P_2$ のλ以下の固有値は有限個しかなく，またλは$P_1^*P_1$, $P_2^*P_2$の固有値ではないから，$V_{1,\lambda}$, $V_{2,\lambda}$ の元に対応する$P_1^*P_1$, $P_2^*P_2$の固有値は$\lambda - \delta$以下としてよい．すなわち$P_1^*P_1(u_1) = \mu u_1$とすると$\mu \le \lambda - \delta$である．一方(4.7.2)により

$$||P_T^*P_T(I_{3,T}(u)) - \mu I_{3,T}(u)||_{L^2}$$

$$= ||P_T^*P_T(w) - \mu \cdot w||_{L^2} + ||P_T^*P_T(\Pi_\lambda(I_{3,T}(u))) - \mu \cdot \Pi_\lambda(I_{3,T}(u))||_{L^2}$$
$$\geq (\lambda - \mu)||w||_{L^2}$$

これと (4.7.1) より補題は示される．　　証明終わり

$I_{3,T}$ と Π_λ の合成を I_T と書く．さて I_T が同型写像であることを証明しよう．それには I_T の近似的な逆を上の構成を逆にして定義する．まず $u \in V_\lambda$ としよう．$M \times [-T,T] \subseteq X(T)$ であった．ここで定理 4.4.10 と同様に示される次の補題を使う．

補題 4.7.3　　$$|u(x,t)| \leq Ce^{-c\min\{T+t,T-t\}}||u||_{L^2}$$

略証　u は $P_T^*P_T(u) = \mu u$ なる固有関数としてよい．$f(t) = \int_M |u(p,t)|^2 dt$ とおく．定理 4.4.10 の証明と同様にして

$$-\frac{d^2 f}{dt^2} < (-\lambda_0 + \mu)f + C\delta \int_{t-1}^{t+1} f ds$$

が得られる．したがって補題 4.7.3 は補題 4.4.11（と楕円型方程式の解の正則性の評価）より直ちに得られる．この議論は定理 4.4.10 と同じである．

補題 4.7.3 より u は $M \times [-T,T] \subseteq X(T)$ の中央部ではその値が非常に小さい．したがってここで 1 の分解で切りはりすることで $I_{4,T}(u) \in \Gamma(X_1;E_1)$, $I_{5,T}(u) \in \Gamma(X_2;E_2)$ が得られる．(1 の分解の使い方の細部は省略する.) 作り方より

$$||P_1^*P_1(I_{4,T}(u)) - \mu \cdot I_{4,T}(u_1)||_{L^2} < Ce^{-cT}||I_{4,T}(u)||_{L^2}$$
$$||P_5^*P_5(I_{5,T}(u)) - \mu \cdot I_{5,T}(u_1)||_{L^2} < Ce^{-cT}||I_{5,T}(u)||_{L^2}$$

および

$$(4.7.3)\qquad ||I_{1,T}(I_{4,T}(u)) + I_{2,T}(I_{5,T}(u)) - u||_{L^2} < Ce^{-cT}||u||_{L^2}$$

が成立する．これから補題 4.7.2 と同様にして次のことが証明できる．

補題 4.7.4 $\Pi_{1,\lambda}: L^2(X_1,E_1) \to V_{1,\lambda}$, $\Pi_{2,\lambda}: L^2(X_2,E_2) \to V_{2,\lambda}$ を（正規直交）射影とすると

$$||\Pi_{1,\lambda}(I_{5,T}(u)) - I_{5,T}(u)||_{L^2} < Ce^{-cT}||I_{5,T}(u)||_{L^2}$$
$$||\Pi_{2,\lambda}(I_{6,T}(u)) - I_{6,T}(u)||_{L^2} < Ce^{-cT}||I_{6,T}(u)||_{L^2}$$

証明は補題 4.7.2 の証明と同じである．

$I'_T(u) = (\Pi_{1,\lambda}(I_{5,T}(u)), \Pi_{2,\lambda}(I_{6,T}(u)))$ とおく．$I'_T : V_\lambda \to V_{1,\lambda} \oplus V_{2,\lambda}$である．(4.7.3) 式と補題 4.7.2,4.7.4 より次のことが直ちに従う．

補題 4.7.5

$$||I'_T I_T(u) - u||_{L^2} \le Ce^{-cT}||u||_{L^2}$$
$$||I_T I'_T(u) - u||_{L^2} \le Ce^{-cT}||u||_{L^2}$$

すなわち I_T, I'_Tはお互いのほぼ逆である．この二つの写像が同型写像であることはこれから直ちにわかる．

さて定理 4.7.1 の証明を完成しよう．今まで示したことで $P_1^*P_1$のλ以下の固有値の（重複度を込めた）数と $P_2^*P_2$のλ以下の固有値の（重複度を込めた）数の和は $P_T^*P_T$の固有値の（重複度を込めた）数に等しいことがわかる．あとは前者と後者の和集合をそれぞれ大きさの順番に並べたとき，各々の元の差が $T \to \infty$ で指数関数の速さで 0 に行くことをみればよい．それには上で作った写像 I_Tを考え次の性質を思い出そう．

$$||P_T^*P_T I_T(u,v) - (I_T P_1^*P_1(u) + I_T P_2^*P_2(v))||_{L^2} \le Ce^{-cT}||u||_{L^2} \tag{4.7.4}$$

ここで $u \in V_{1,\lambda}$, $v \in V_{2,\lambda}$で $V_{1,\lambda} \subseteq V_{1,\lambda} \oplus V_{2,\lambda}$, $V_{2,\lambda} \subseteq V_{1,\lambda} \oplus V_{2,\lambda}$ とみなしている．これは I_Tの作り方（ほとんど 0 に近いところで 1 の分解で切りはりした後，ほとんど恒等写像である射影を合成した）を考えれば明らかである．

さて式 (4.7.4) より定理 4.7.1 は直ちに従う．実際λ以下の固有値を比較するには $V_{1,\lambda} \oplus V_{2,\lambda}$への $P_1^*P_1 \oplus P_2^*P_2$ の制限と V_λへの $P_T^*P_T$制限の固有値を比較

すれば十分である．(これらは有限次元の線形空間上の作用素すなわち行列とみなせる.) この二つの線形空間を I_T で同一視すると (4.7.4) はこの二つの作用素の差が Ce^{-cT} で評価できることを主張する．

これで定理 4.7.1 の証明が完成した．

さて定理 4.7.1 を利用して次の定理が証明できる．

定理 4.7.6　定理 4.7.1 の仮定の下で $Index(P_1) + Index(P_2) = Index(P_T)$ が成り立つ．

証明　まず楕円型作用素の指数理論でよく使われる次の事実に注意する．$P : E \to F$ を楕円型作用素とし $P^*P : L^2(E) \to L^2(E)$, $PP^* : L^2(F) \to L^2(F)$ を考える．

補題 4.7.7　λ を P^*P の 0 でない固有値とすると λ は PP^* の固有値でもある．また両者の重複度は一致する．

逆に λ が PP^* の 0 でない固有値とすると λ は P^*P の固有値でもある．両者の重複度は一致する．

証明　$P^*P(u) = \lambda u$ とすると

$$PP^*(P(u)) = P(P^*P(u)) = \lambda Pu$$

よって Pu は PP^* の固有値 λ に属する固有ベクトルである．すなわち P は P^*P の固有値 λ に属する固有空間（以後 $E(P^*P,\lambda)$ と書く）から $E(PP^*,\lambda)$ への準同型写像を与える．

同様にして P^* は $E(PP^*,\lambda)$ から $E(P^*P,\lambda)$ への準同型写像を与える．

この二つを合成すると $E(P^*P,\lambda)$ 上では $P^*P = \lambda$ であるから，$\lambda \neq 0$ ゆえ，$E(P^*P,\lambda)$ から自分自身への同型写像を与える．したがって

$$E(PP^*,\lambda) \cong E(P^*P,\lambda)$$

これから補題 4.7.7 は直ちに得られる．　証明終わり

さて定理 4.7.6 の証明に戻ろう．λを定理 4.7.1 の仮定を満たす正の数とする．(つまり Q_∞の固有値より小さくまた $P_1^*P_1$, $P_2^*P_2$ の固有値と一致しないとする.) すると定理 4.7.1 より

$$P_1^*P_1\text{の}\lambda\text{以下の固有値の数} + P_2^*P_2\text{の}\lambda\text{以下の固有値の数} = P_T^*P_T\text{の}\lambda\text{以下の固有値の数}$$

が成立する．同様に

$$P_1P_1^*\text{の}\lambda\text{以下の固有値の数} + P_2P_2^*\text{の}\lambda\text{以下の固有値の数} = P_TP_T^*\text{の}\lambda\text{以下の固有値の数}$$

一方補題 4.7.7 より

$$P_1^*P_1\text{の}\lambda\text{以下の固有値の数} - P_1P_1^*\text{の}\lambda\text{以下の固有値の数} = Index(P_1)$$
$$P_2^*P_2\text{の}\lambda\text{以下の固有値の数} - P_2P_2^*\text{の}\lambda\text{以下の固有値の数} = Index(P_2)$$
$$P_T^*P_T\text{の}\lambda\text{以下の固有値の数} - P_TP_T^*\text{の}\lambda\text{以下の固有値の数} = Index(P_T)$$

以上の式より定理 4.7.6 は直ちに得られる．　証明終わり

定理 4.7.6 を一般化して族の指数についての同様の結果を示すことができる．これは§4.10 で向き付けを議論するとき少し用いるのであるが，煩雑になるのでここでは省略する．たとえば [深谷 1] §4 参照．

ここで定理 4.2.9 をもう少し正確に定式化してこれを証明してみよう．多様体 $M \times \mathbf{R}$ を考える．M上のすべての既約平坦接続 a に対して

$$H^1(M; Ad\ a) = 0 \tag{4.7.5}$$

が成立すると仮定する．二つの既約平坦接続 a,b があったとき，これを境界条件とする $M \times \mathbf{R}$ 上の ASD 接続のモジュライ空間 $\mathcal{M}(M \times \mathbf{R}; a, b)$ を考えてその次元を調べたいのであった．空間 $\mathcal{M}(M \times \mathbf{R}; a, b)$ の定義は§4.5 の終わりの

定義を $X = M \times \mathbf{R}$ に当てはめればよいから直ぐにできる．ここではその次元を考えよう．まず $[A] \in \mathcal{M}(M \times \mathbf{R}; a, b)$ としてこの近くでのモジュライ空間の次元が計算したかった．閉4次元多様体の場合を思い出せばそのためには AHS 複体の指数を計算すればよかった．すなわち

$$d_A^+ \oplus d_A^* : \Gamma(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes \Lambda^1(M \times \mathbf{R})) \to \Gamma(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes (\Lambda_+^2 \oplus \Lambda^0)(M \times \mathbf{R}))$$

の指数をとればよかった．(むろん AHS 複体の指数とモジュライ空間の次元とが一致するためには横断正則性についての条件が必要である．それについてはもう少し後で議論する．)

非コンパクトな空間上であるから指数を定義するには境界条件についての注意が必要である．しかしこの場合はすでに §4.5 で述べたように単に L^2空間をとれば十分である．この指数を $Index(d_A^+ \oplus d_A^*)$ と書こう．$Index(d_A^+ \oplus d_A^*)$ を定義するのに A が ASD 接続である必要はない．これの性質を調べたい．

補題 4.7.8　$Index(d_A^+ \oplus d_A^*)$ は A の無限遠での境界値 a,b のみで決まり A によらない．

証明　同一の境界値 a,b を持つ2つの接続 A,A'があったとする．一つのベクトル束上の接続全体はアフィン空間をなす．境界条件がある場合でも与えられた境界条件を満たす接続全体はアフィン空間である．したがって A と A'を線分で結んで A_tを得る．すると指数の連続変形不変性より $Index(d_{A_t}^+ \oplus d_{A_t}^*)$ は t によらず一定である．これで補題は証明された．　証明終わり

a,b を境界値に持つ A に対して $Index(d_A^+ \oplus d_A^*)$ を$\eta(a, b)$ とおこう．

補題 4.7.9　$\eta(a, b) + \eta(b, c) = \eta(a, c)$

証明　平坦接続 a,b,c が既約で局所係数1次コホモロジー $H^1(M; Ad\ a)$ などが消えるという条件から，$d_A^+ \oplus d_A^*$が無限遠で可逆になることが示される．これは §4.4 で述べたことと同様である．また補題 4.7.8 より$\eta(a, b)$ を計算する

にはどの A をとってきてもよかった．$A \in \mathcal{M}(a,b)$, $B \in \mathcal{M}(b,c)$ をとると $d_A^+ \oplus d_A^*$と $d_B^+ \oplus d_B^*$をはり合わせて得られる作用素はコンパクト作用素を法として $d_{A\#B}^+ \oplus d_{A\#B}^*$ に一致する．これより補題 4.7.9 は定理 4.7.6 の系である．(定理 4.7.1 でははり合わせた後の空間はコンパクトであるとしていたが，ここではり合わせるエンド（コンパクトではない空間 X のエンドとは X からコンパクト空間をのぞいたものを指す.）以外にもう一つずつエンドがあるので，はり合わせた後でも空間はコンパクトにならない．しかし定理 4.7.6 の証明をみてみるとはり合わせるエンドの近くでだけ議論しているのであるから，他にエンドがあっても全く同じ証明が通用する.)　　証明終わり

さてこれから定理 4.2.9 が（横断正則性についての議論を除いて）次のようにして証明される．まずなんでもいいから既約平坦接続 a_0をとる．そして既約平坦接続 a ($[a] \in \widetilde{R}(M)$) に対して

$$\eta(a) = \eta(a, a_0)$$

とおく．補題 4.7.9 より $\eta(a,b) = \eta(a) - \eta(b)$ であるから，横断正則性が成り立っていれば（つまり AHS 複体が 1 次以外のコホモロジーを持たなければ）

$$\dim \mathcal{M}(a,b) = \eta(a,b) = \eta(a,a_0) - \eta(b,a_0) = \eta(a) - \eta(b)$$

が成り立つ．これが定理 4.2.9 であった．

以上の議論による $\eta(a)$ の決め方には若干の曖昧さがある．すなわち a_0の取り方に $\eta(a)$ はよってしまう．実は a_0として自明な平坦接続をとることで $\eta(a)$ を標準的に定めることができる．しかし自明な接続は既約ではないのでこのとき補題 4.7.9 には修正が必要である．

自明な接続 θ がある場合に対応する $Q_\infty = \mathcal{D}_\theta$が可逆でない場合の非コンパクト多様体上の楕円型作用素の指数とその和公式について述べよう．すなわち設定 4.4.4 で Q_∞の可逆性以外が満たされているとする．§4.4 でも述べたように，この場合はたとえば $A \in M(a,\theta)$ に対して $d_A^+ \oplus d_A^*$は $d_A^+ \oplus d_A^* : L_1^2(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes \Lambda^1(M \times \mathbf{R})) \to L^2(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes (\Lambda_+^2 \oplus \Lambda^0)(M \times \mathbf{R}))$

なる作用素と思ったとき，フレドホルム作用素ではない．したがってこの場合はソボレフ空間の取り方を変えて§4.4の議論に修正を施す必要がある．それを説明するためにここでスペクトル流なる概念を説明しよう．

Aをゲージ変換して同時刻ゲージをとり$A = a_t$としよう．我々が考えている作用素$d_A^+ \oplus d_A^*$は$M \times \mathbf{R}$上の作用素で$d_A^+ \oplus d_A^* = -\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{D}_{a_t}$と書ける．($\mathcal{D}_{a_t}$は§4.4の始めで定義した.）そこで以下コンパクト多様体M，その上のベクトル束$\overline{E}$，1階自己共役楕円型作用素の族$Q_t : \overline{E} \to M$, $M \times \mathbf{R}$上のベクトル束$E = p^*(\overline{E})$，その上の作用素$P : -\frac{\partial}{\partial t} + Q_t : \Gamma(M \times \mathbf{R}; E) \to \Gamma(M \times \mathbf{R}; E)$を考える．各々の$t$に対して$Q_t$は離散的なスペクトルを持つ．これらを全部（重複度も込めて）並べたものを$Spec(Q_t)$と書く．これは$\mathbf{R}$の離散部分集合である．(本当は重複度も考えているので部分集合というのは不正確であるが気にしないことにしよう.）さてこれを使って集合$SF(Q_t) = \bigcup_t \{t\} \times Spec(Q_t) \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$を考える．

補題 4.7.10　$SF(Q_t)$は（可算無限本の）区分的にC^∞級の曲線の和集合である．

証明は省略する．基本的には固有値が作用素をC^∞級に動かしたときC^∞級連続に動くことの帰結である．図4.7.1をみていただきたい．(固有値が重複度をもつ点での滑らかさが微妙な問題であるので，補題では「区分的にC^∞級」を結論とした.）

$SF(Q_t)$のことをスペクトル流 (spectral flow) と呼ぶ．

Q_tは$t < -C$および$t > C$で可逆とする．すると$SF(Q_t)$とx軸 ($\mathbf{R} \times \{0\}$) とはコンパクト集合$[-C, C] \times \{0\}$でしか交わらない．この交点数をスペクトル流の指数$Index(Spec(Q_t))$と呼ぶ．より正確には$Index(Spec(Q_t))$は$SF(Q_t)$を構成する曲線のうちx軸，$\mathbf{R} \times \{0\}$を正の方向から負の方向へ横切るものの数から，負の方向から正の方向へ横切るものの数を引いたものである．(たとえば図4.7.1の場合はこれは-3である.）

補題 4.7.11　$Index(Spec(Q_t)) = Index(P)$

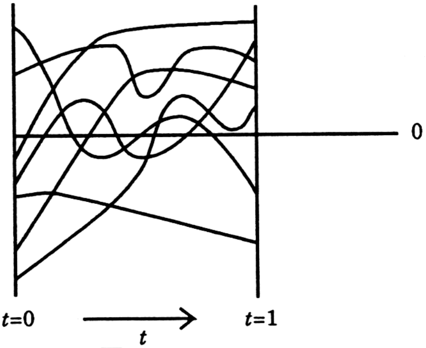


図 4.7.1

証明のアイディア　まず Q_tが $Q_t : L^2(\overline{E}) \to L^2(\overline{E})$ が同時対角化可能な場合を考えよう．すなわち t によらない $u_i \in L^2(\overline{E})$ が存在して $(u_1, \cdots)$ は $L^2(\overline{E})$ の正規直交基かつ $Q_t(u_i) = \lambda_i(t)u_i$とする．

このとき $u(x,t) = \sum f_i(t)u_i(x) \in L^2(M \times \mathbf{R}; E)$ に対して

$$P(u)(x,t) = \sum \left(-\frac{\partial f_i}{\partial t} + \lambda_i(t) f_i(t) \right) u_i(x)$$

が成り立つ．したがって $\dim \mathrm{Ker}\ (P : L^2 \to L^2)$ は常微分方程式

$$-\frac{df}{dt} + \lambda_i(t) f = 0 \tag{4.7.6}$$

が L^2解を持つような i の数に等しい．容易にわかるように (4.7.6) が L^2解を持つための必要十分条件は $\lim_{t\to-\infty} \lambda_i(t) > 0 > \lim_{t\to+\infty} \lambda_i(t)$ である．($\lim_{t\to-\infty} \lambda_i(t) = c_1$, $\lim_{t\to+\infty} \lambda_i(t) = c_2$ ならば，(4.7.6) の解は $t \to -\infty$ で $Ce^{c_1 t}$に $t \to \infty$ で $Ce^{c_2 t}$に近づくから．)

したがって $\dim \mathrm{Ker}\ (P : L^2 \to L^2)$ は $SF(Q_t)$ を構成する曲線のうち x 軸，$\mathbf{R} \times \{0\}$ を正の方向から負の方向へ横切るものの数に等しい．

同様にして $\dim \mathrm{CoKer}\ (P : L^2 \to L^2)$ は $SF(Q_t)$ を構成する曲線のうち x 軸，$\mathbf{R} \times \{0\}$ を負の方向から正の方向へ横切るものの数に等しい．

以上より $Q_t : L^2(\overline{E}) \to L^2(\overline{E})$ が同時対角化可能な場合の補題 4.7.11 は証明された．

一般の場合を示すには $Index(P)$ と $Index(Spec(Q_t))$ がともに作用素の連続変形で不変なことに注意して同時対角化可能な場合に帰着すればよい．(Q_tが微

分作用素である場合に限って考える必要はなく抽象的に関数解析で考えてかまわない.）証明の細部は省略する.

さて補題 4.7.11 を使うと今考えている場合には指数の和公式は直ちに証明できる. Q_tおよび Q'_tを 2 つの族とし $\lim_{t\to\infty} Q_t = \lim_{t\to-\infty} Q'_t$とする. この二つをはり合わせて$\widehat{Q}_t$を作ろう. つまり関数$\chi : \mathbf{R} \to [0,1]$ を $t < -T$で$\chi(t) = 0$, $t > T$で$\chi(t) = 1$ なるようにとり

$$\widehat{Q}_t = \begin{cases} Q_{t-T} & t < -2T \\ (1-\chi(t))Q_{t-T} + \chi(t)Q'_{t+T} & |t| \le 2T \\ Q'_{t+T} & t > 2T \end{cases}$$

とおく. すると定義から明らかに $Index(Spec(\widehat{Q}_t)) = Index(Spec(Q_t)) + Index(Spec(Q'_t))$ がわかる. よって

$$Index(\widehat{P}) = Index(P) + Index(P')$$

ここで$\widehat{P} = -\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{Q}_t$, $P' = -\frac{\partial}{\partial t} + Q'_t$. これが指数の和公式であった.

さて以上は $\lim_{t\to\pm\infty} Q_t$が可逆な場合であった. そうでない場合はどうなるであろうか. たとえば同時対角化可能な場合を考えて, $\lim_{t\to-\infty} \lambda_{i_0}(t) = 0 > \lim_{t\to\infty} \lambda_{i_0}(t)$ としてみよう. このとき常微分方程式

$$-\frac{df}{dt} + \lambda_{i_0}(t) f = 0 \tag{4.7.7}$$

が L^2解を持つかどうかは, はなはだ微妙な問題である. ためしに $t \ll 0$ で $\lambda_0(t) = \alpha t^{-1}$としてみよう. すると (4.7.7) の解は $t \ll 0$ で $f(t) = t^\alpha$の定数倍である. これが L^2関数かどうかはαの値によって変わる.

こういう微妙な問題はさけて通りたいので, 次のように重み付きのソボレフ空間 (weighted Sobolev space) を考える. δを後で決める正の数とし$\tau : \mathbf{R} \to [0,\infty)$ なる C^∞級関数をコンパクト集合の外で$\tau(t) = \delta|t|$ であるようにとる.

$u \in \Gamma(M \times \mathbf{R}; E)$ に対して重み付きソボレフノルムを

$$||u||^p_{L^p_{k,\tau}} = \sum_{0 \le \ell \le k} \int_{M \times \mathbf{R}} e^{\tau(t)} |\nabla^\ell u|^p dxdt$$

で定義する．ここでδは，$(-\delta, \delta) - \{0\}$ に $Q_{\pm\infty}$の固有値がないように選ぶ．ノルム $||\ \ ||^p_{L^p_{k,\tau}}$ に関する完備化を $L^p_{k,\tau}$ と書く．

補題 4.7.12　$P : L^2_{1,\tau}(M \times \mathbf{R}; E) \to L^2_{0,\tau}(M \times \mathbf{R}; E)$ はフレドホルム作用素である．

証明　等長変換 $I : L^2(M \times \mathbf{R}; E) \to L^2_{0,\tau}(M \times \mathbf{R}; E)$ を $I(u)(x,t) = e^{-\tau(t)/2}u(x,t)$ で定義する．すると

$$I^{-1}PI(u)(x,t) = (Pu)(x,t) + \frac{1}{2}\frac{d\tau}{dt}u(x,t)$$

この右辺は$t < -C$で$-\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\delta}{2} + Q_t$，$t > +C$で$-\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\delta}{2} + Q_t$である．

ところが$\pm\frac{\delta}{2} + Q_t$ は $t \to \pm\infty$ で可逆であるから§4.4 の議論が使えて $P : L^2_{1,\tau}(M \times \mathbf{R}; E) \to L^2_{0,\tau}(M \times \mathbf{R}; E)$ はフレドホルム作用素である．証明終わり

さてこのフレドホルム作用素の指数をスペクトル流でみるにはどうすればよいであろうか．上の証明でわかるとおり普通のソボレフノルムを重み付きのソボレフノルムに置き換えた操作は，作用素の族 Q_tを $t < -C$で$-\delta/2 + Q_t$に，$t > C$ で$\delta/2 + Q_t$に置き換えたことに対応する．したがってスペクトル流の言葉で言えば $t < -C$ですべての曲線を少し ($\delta/2$ だけ) 下げ，$t > C$で少し ($\delta/2$ だけ) 上げた操作に対応する（図 4.7.2 参照）．このように変形したスペクトル流の指数を $Index_\tau(Spec(Q_t))$ と書こう．(初めから $Q_{\pm\infty}$が可逆なときは $Index_\tau(Spec(Q_t))$ は $Index(Spec(Q_t))$ に等しい．)

補題 4.7.12 の証明より次の補題が成り立つ．

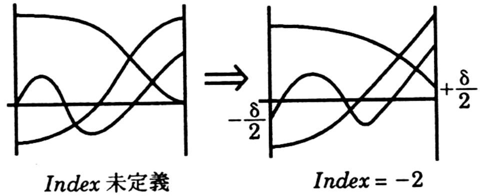


図 4.7.2

補題 4.7.13

$$Index(P : L^2_{1,\tau}(M \times \mathbf{R}; E) \to L^2_{0,\tau}(M \times \mathbf{R}; E)) = Index_\tau(Spec(Q_t))$$

さて次に指数の和公式を考えよう．Q_tおよび Q'_tを M上の自己共役楕円型作用素の族とし $\lim_{t\to\infty} Q_t = \lim_{t\to-\infty} Q'_t$とする．$Q_t$と Q'_tを前と同じように 1 の分解ではり合わせた M上の自己共役楕円型作用素の族を$\widehat{Q}_t$とする．$Q = \lim_{t\to\infty} Q_t = \lim_{t\to-\infty} Q'_t$は必ずしも可逆とは限らないとしよう．このとき次のことが成立する．

補題 4.7.14

$$\begin{aligned} &Index(\widehat{P} : L^2_{1,\tau}(M \times \mathbf{R}; E) \to L^2_{0,\tau}(M \times \mathbf{R}; E)) \\ &\quad = Index(P : L^2_{1,\tau}(M \times \mathbf{R}; E) \to L^2_{0,\tau}(M \times \mathbf{R}; E)) \\ &\qquad + Index(P' : L^2_{1,\tau}(M \times \mathbf{R}; E) \to L^2_{0,\tau}(M \times \mathbf{R}; E)) + \dim \mathrm{Ker}\, Q \end{aligned}$$

証明は補題 4.7.13 と $Index_\tau(Spec(Q_t))$ の定義から明らかである．

さて以上で自明な接続を考えて平坦接続に対する$\eta(a)$ の定数の分の不定性をなくする準備が整った．

$a \in \widetilde{R}(M)$ に対して A を $\lim_{t\to-\infty} A = a$, $\lim_{t\to+\infty} A = 0$ なる任意の接続とする．(ここで 0 とは接続 0 を指す．θと書かなかったのはθは自明な接続つまり 0 とゲージ同値な接続を指すからである.) 同時刻ゲージをとり $A = a_t$は dt 成分を持たないとしてよい．

定義 4.7.15

$$\begin{aligned}\eta(a) = Index(d_A^+ \oplus d_A^* :\ & L^2_{1,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes \Lambda^1) \\ & \to L^2_{0,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0)))\end{aligned}$$

前に述べたように $M \times \mathbf{R}$ 上では $su(2) \otimes \Lambda^1 \cong su(2) \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0) \cong su(2) \otimes p^*((\Lambda^1 \oplus \Lambda^0)(M))$ であるから $E = (\Lambda^1 \oplus \Lambda^0)(M)$ とおけば今まで論じてきた場合になっていて $Q_t = \mathcal{D}_{a_t}$である．

補題 4.7.14 を使えば$\eta(a,b) = \eta(a) - \eta(b)$ がわかるから定理 4.2.9 にはこの $\eta(a)$ を使ってもよい．こうすれば$\eta(a)$ は標準的に定まる．

さてここで前に述べ，そして使った次の公式を証明しておこう．

補題 4.7.16　$\eta_M(a) + \eta_{-M}(a) = -3$

証明　A を $\lim_{t\to-\infty} A = a$, $\lim_{t\to+\infty} A = 0$ なる接続とする．定義より

$$\begin{aligned}\eta_M(a) = Index(d_A^+ \oplus d_A^* :\ & L^2_{1,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes \Lambda^1) \\ & \to L^2_{0,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0)))\end{aligned}$$

であった．

$a'_t = a_{-t}$とおこう．a'_tから同時刻ゲージの接続 A'を作る．向きと計量を保つ可微分同相 $(-M) \times \mathbf{R} \to M \times \mathbf{R}$ を $(x,t) \to (x,-t)$ で定めると A'のこの可微分同相による引き戻しは$-M$上で 0 と a を結んでいる．したがって A'の引き戻しを使って$\eta_{-M}(a)$ が定まる．向きと計量を保つ可微分同相で $d_A^+ \oplus d_A^*$の指数

は保たれるから

$$\eta_{-M}(a) = Index(d^+_{A'} \oplus d^*_{A'} : \quad L^2_{1,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes \Lambda^1) \\ \rightarrow L^2_{0,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0)))$$

がわかる．さてこの A と A'をはり合わせて得られる接続を$\widehat{A}$とする．$\widehat{A}$は a と自分自身を結ぶ接続である．したがって境界条件を変えないまま$\widehat{A}$は a （dt 成分がなく M方向の成分がいつも a である接続）にホモトピックである．よって

$$Index(d^+_{\widehat{A}} \oplus d^*_{\widehat{A}} : L^2_{1,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes \Lambda^1) \\ \rightarrow L^2_{0,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0))) \\ = Index(d^+_a \oplus d^*_a : L^2_{1,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes \Lambda^1) \\ \rightarrow L^2_{0,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0)))$$

ところが $d^+_a \oplus d^*_a = -\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{D}_a$で $\mathcal{D}_a$は可逆であるから

$$Index(d^+_a \oplus d^*_a : \quad L^2_{1,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes \Lambda^1) \\ \rightarrow L^2_{0,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0))) = 0$$

よって

$$Index(d^+_{\widehat{A}} \oplus d^*_{\widehat{A}} : \quad L^2_{1,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes \Lambda^1) \\ \rightarrow L^2_{0,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0))) = 0$$

一方補題 4.7.14 より

$$Index(d^+_{A'} \oplus d^*_{A'} : L^2_{1,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes \Lambda^1) \\ \rightarrow L^2_{0,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0))) \\ + Index(d^+_A \oplus d^*_A : L^2_{1,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes \Lambda^1) \\ \rightarrow L^2_{0,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0))) \\ = Index(d^+_{\widehat{A}} \oplus d^*_{\widehat{A}} : L^2_{1,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes \Lambda^1) \\ \rightarrow L^2_{0,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0))) \\ - \dim \mathrm{Ker}\, \mathcal{D}_0$$

Ker $\mathcal{D}_0 = (H^1(M;\mathbf{R}) \oplus H^0(M;\mathbf{R})) \otimes su(2)$ であるから $\dim \mathrm{Ker}\ \mathcal{D}_0 = 3$（$M$ はホモロジー 3 球面であった）．補題 4.7.16 は証明された．　証明終わり

定理 4.3.1 の証明も同様である．$\mathcal{M}(X,\zeta;a)$ が多様体であることの証明は横断正則性である．これは閉多様体の場合と同様であるので省略する．ここでは次元の式についてだけ述べよう．まず境界値を与える平坦接続 a が自明の場合に考えよう．このとき示すべき式は

$$\dim \mathcal{M}(X,\zeta;0) = 8k + 3(b_1(X) - 1 - b_2^+(X))$$

である．ここで $\mathcal{M}(X,\zeta;0)$ を定義するための（接続およびゲージ変換に対する）境界条件の設定はまだ説明していなかった．これは次節で行う．ここでは $\dim \mathcal{M}(X,\zeta;0)$ のかわりに次のフレドホルム作用素の指数を考える．A を $\zeta_k \to X$ の接続としコンパクト集合の外で $A = 0$（自明な接続）とする．ζ_k の相対第 2 チャーン数は k である．次に重み付きのソボレフノルムを定義するために $\tau : X \to [1,\infty)$ を $[T,\infty) \times M \subseteq X - K$ 上で $\tau(x,t) = \delta|t|$，K では 1，それ以外では正の数とする．たとえば $L^2_{1.\tau}(X; Ad\ \zeta_k \otimes \Lambda^1)$ はノルム

$$||u||_{L^2_{1,\tau}} = \sum_{0\le\ell\le1} \int_X e^{\tau(x)} |\nabla^\ell u|^2 * 1$$

についてのコンパクト台の切断の空間の完備化とする．この関数空間を使って作用素

$$d_A^+ \oplus d_A^* : L^2_{1,\tau}(X; Ad\ \zeta_k \otimes \Lambda^1) \to L^2_{0,\tau}(X; Ad\ \zeta_k \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0))$$

を考えよう．補題 4.7.12 と同様にしてこの作用素がフレドホルム作用素であることが示される．このとき

補題 4.7.17

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{M}(X,\zeta;0) = Index(d_A^+ \oplus d_A^* :\ & L^2_{1,\tau}(X; Ad\ \zeta_k \otimes \Lambda^1) \\ & \to L^2_{0,\tau}(X; Ad\ \zeta_k \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0)))\end{aligned}$$

この補題の証明は次節で説明する．さて次に

補題 4.7.18

$$Index(d_A^+ \oplus d_A^* : L^2_{1,\tau}(X; Ad\ \zeta_k \otimes \Lambda^1) \to L^2_{0,\tau}(X; Ad\ \zeta_k \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0)))$$
$$= 8k + 3(b_1(X) - 1 - b_2^+(X))$$

この補題の証明も次の節にまわす．

定理 4.3.1 の次元の式を証明するにはこの二つの補題と指数の和公式（補題 4.7.19）を用いる．

A を$\zeta_k \to X$の接続としコンパクト集合の外で $A = 0$（自明な接続）とする．また Bを $M \times \mathbf{R}$ の接続で $t \to \mp\infty$ で 0 および a に収束するとする．A と B を 1 の分解ではり合わせると $A\#B$なる$\zeta_k \to X$の接続ができる．

補題 4.7.19

$$Index(d_{A\#B}^+ \oplus d_{A\#B}^* : L^2_{1,\tau}(X; Ad\ \zeta_k \otimes \Lambda^1) \to L^2_{0,\tau}(X; Ad\ \zeta_k \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0)))$$
$$= Index(d_A^+ \oplus d_A^* : L^2_{1,\tau}(X; Ad\ \zeta_k \otimes \Lambda^1) \to L^2_{0,\tau}(X; Ad\ \zeta_k \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0)))$$
$$+ Index(d_B^+ \oplus d_B^* : L^2_{1,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes \Lambda^1)$$
$$\to L^2_{0,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0)))$$
$$+ \dim \mathrm{Ker}\ \mathcal{D}_0$$

補題の証明は 4.7.14 と同様である．といってやめにしてもまんざら嘘ではないが，補題 4.7.14 はスペクトル流で証明したから違うといえば違うので少し論じよう．A を境界値を変えないで取り換えて $A = A_0 \# A_1$, A_0は X上の接続で境界値は b（$\mathcal{D}_b$は可逆），A_1は $M \times \mathbf{R}$ 上の接続で$-\infty$ で b に，$+\infty$ でθになる

ものとする．するとはり合わせるところは b で可逆だから定理 4.7.6 が使えて

$$
\begin{aligned}
&Index(d_A^+ \oplus d_A^* : L^2_{1,\tau}(X; Ad\ \zeta_k \otimes \Lambda^1) \to L^2_{0,\tau}(X; Ad\ \zeta_k \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0))) \\
&\quad = Index(d_{A_0}^+ \oplus d_{A_0}^* : L^2_{1,\tau}(X; Ad\ \zeta_k \otimes \Lambda^1) \to L^2_{0,\tau}(X; Ad\ \zeta_k \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0))) \\
&\quad\quad + Index(d_{A_1}^+ \oplus d_{A_1}^* : L^2_{1,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes \Lambda^1) \\
&\qquad\qquad\qquad \to L^2_{0,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0)))
\end{aligned}
$$

一方補題 4.7.14 より

$$
\begin{aligned}
&Index(d_{A_1\#B}^+ \oplus d_{A_1\#B}^* : L^2_{1,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes \Lambda^1) \\
&\qquad\qquad\qquad \to L^2_{0,\tau}(X; su(2) \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0))) \\
&\quad = Index(d_{A1}^+ \oplus d_{A1}^* : L^2_{1,\tau}(X; su(2) \otimes \Lambda^1) \to L^2_{0,\tau}(X, su(2) \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0))) \\
&\quad\quad + Index(d_B^+ \oplus d_B^* : L^2_{1,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes \Lambda^1) \\
&\qquad\qquad\qquad \to L^2_{0,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0))) \\
&\quad\quad + \dim \mathrm{Ker}\ \mathcal{D}_0
\end{aligned}
$$

さらに A_0 と $A_1\#B$ に定理 4.7.1 をもう一度使うと

$$
\begin{aligned}
&Index(d_{A\#B}^+ \oplus d_{A\#B}^* : L^2_{1,\tau}(X; Ad\ \zeta_k \otimes \Lambda^1) \to L^2_{0,\tau}(X; Ad\ \zeta_k \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0))) \\
&\quad = Index(d_{A_0}^+ \oplus d_{A_0}^* : L^2_{1,\tau}(X; Ad\ \zeta_k \otimes \Lambda^1) \to L^2_{0,\tau}(X; Ad\ \zeta_k \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0))) \\
&\quad\quad + Index(d_{A_1\#B}^+ \oplus d_{A_1\#B}^* : L^2_{1,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes \Lambda^1) \\
&\qquad\qquad\qquad \to L^2_{0,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0)))
\end{aligned}
$$

補題 4.7.19 は以上の式から直ちに得られる．　証明終わり

ところで

$$
\begin{aligned}
&Index(d_B^+ \oplus d_B^* : L^2_{1,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes \Lambda^1) \\
&\qquad\qquad \to L^2_{0,\tau}(M \times \mathbf{R}; su(2) \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0))) \\
&\qquad\qquad\qquad = \eta_{-M}(a) = -\eta_M(a) - 3
\end{aligned}
$$

である．(定義 4.7.15 で $\eta_{-M}(a)$ を定義するのに用いる接続には補題 4.7.19 の B

を写像$-M \times \mathbf{R} \to M \times \mathbf{R}$, $(x,t) \mapsto (x,-t)$ で引き戻して得られた接続をとることができる.)

よって補題 4.7.19 と (4.7.18) より

$$8k + 3(b_1(X) - 1 - b_2^+(X)) - \eta(a) =$$
$$Index(d^+_{A\#B} \oplus d^*_{A\#B} : L^2_{1,\tau}(X; Ad\ \zeta_k \otimes \Lambda^1) \to L^2_{0,\tau}(X; Ad\ \zeta_k \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0))$$

が示される. ここで$\mathcal{D}_a$が可逆であるとすると (つまり a は既約で $H^1(M; Ad\, a) = 0$ とすると) ソボレフ空間として $L^2_{k,\tau}$ をとったときと L^2_kをとったときの $d^+_{A\#B} \oplus d^*_{A\#B}$ の指数は同じである. これは L^2_kで考えた $d^+_{A\#B} \oplus d^*_{A\#B}$の核および余核の元が指数オーダーで 0 に近づくこと (§4.4 で示した) の帰結である. したがって

$$8k + 3(b_1(X) - 1 - b_2^+(X)) - \eta(a) =$$
$$Index(d^+_{A\#B} \oplus d^*_{A\#B} : L^2_1(X; Ad\ \zeta_k \otimes \Lambda^1) \to L^2(X; Ad\ \zeta_k \otimes (\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^0)))$$

右辺の指数は閉多様体の場合と同様の考察によりモジュライ空間 $\mathcal{M}(X, \zeta_k; a)$ の次元に等しかった. これで定理 4.3.1 の次元についての主張が証明された.

§ 4.8 可約接続の扱い

前節まで何度も書いてきたように，3 次元多様体 M にはいつでも可約接続が存在する．M をホモロジー球面としても少なくとも自明な接続がある．これが相対ドナルドソン不変量の定義にはいろいろ悪さをする．そのいったんはすでに §3.5 でも現れた．つまりこの場合すべてがバブルして自明な接続になるときを扱うために仮定 3.5.1.5 をおいたのであった．本節で扱う問題はもう少しデリケートである．まず解析的な問題つまり自明な接続に沿ってのはり合わせについて述べよう．

そのためには境界値に自明な接続を許す場合の，非コンパクト 4 次元多様体の上の ASD 空間のモジュライ空間の作り方を述べる必要がある．

境界値が既約接続である場合にはこれは §4.5 で述べた．そこで述べた評価（定理 4.5.1）と補題 4.5.4 を用いると次のことがわかる．$X - K = M \times (0, \infty)$ とし，a を M 上の既約平坦接続で $H^1(M; Ad\ a) = 0$ と仮定し

$$(4.8.1)\quad \widehat{\mathcal{M}}_{\delta,k}(X,\zeta;a) = \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} F_A = - * F_A \\ \displaystyle\int_{X-K} e^{\delta t}|\nabla^{\ell}(A-a)|^2 dxdt < \infty \quad \ell \le k \end{array} \right\}$$

$$(4.8.2)\quad \mathcal{G}_{\delta,k+1}(X,\zeta) = \left\{ g \;\middle|\; \begin{array}{l} g \in L_{k,loc}(X; Ad\ a) \\ \displaystyle\int_{X-K} e^{\delta t}|\nabla^{\ell}(g-g_0)|^2 dxdt < \infty \quad \ell \le k+1 \\ g_0 = \pm 1 \end{array} \right\}$$

とおくと，商空間 $\mathcal{M}_\delta(X,\zeta;a) = \widehat{\mathcal{M}}_{\delta,k}(X,\zeta;a)/\mathcal{G}_{\delta,k+1}(X,\zeta)$ は $\delta \ge 0$ が十分小さければ δ によらない．ここで十分小さくとは $\mathcal{D}_a$ の第 1 固有値より小さいという意味であった．

$a = \theta$ を自明な接続とゲージ同値な接続とするとき（M はホモロジー球面とする）$\mathcal{D}_0$ には 3 次元分の 0 固有値がある．すなわち $H^0(M; su(2)) \cong su(2)$ で，これは $a = \theta$ に対する等方部分群 $I_\theta = \{g \in \mathcal{G}(M) \mid g^*\theta = \theta\} \cong SU(2)$ のリー (Lie) 環とみなすことができる．そこで $\widehat{\mathcal{M}}_{\delta,k}(X,\zeta;\theta)$ を上の (4.8.1) と同

じ式

$$\widehat{\mathcal{M}}_{\delta,k}(X,\zeta;\theta) = \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} F_A = -*F_A \\ \displaystyle\int_{X-K} e^{\delta t}|\nabla^\ell(A-\theta)|^2 dxdt < \infty \quad \ell \le k \end{array} \right\}$$

で定義しよう．ただしここでは $\delta > 0$ とする．(今度は $\delta = 0$ にすると線形化方程式の扱いがおかしくなる.)

さてこれらの局所理論を少しだけ復習しよう．τ は $X-K$ で $e^{\delta t}$ に一致する重み関数とし前節で考えた重み付きソボレフ空間 $L^2_{k,\tau}(X;Ad\,\zeta\otimes\Lambda^1)$ などを考えよう．AHS 複体をこの重み付きソボレフ空間で考えると，$A \in \widehat{\mathcal{M}}_{\delta,k}(X,\zeta;a)$ に対して

$$(4.8.3)\quad L^2_{k+1,\tau}(X;Ad\,\zeta) \xrightarrow{d_A} L^2_{k,\tau}(X;Ad\,\zeta\otimes\Lambda^1) \xrightarrow{d_A^+} L^2_{k-1,\tau}(X;Ad\,\zeta\otimes\Lambda^2_+)$$

である．

ゲージ変換群 $\mathcal{G}_{\delta,k+1}(X,\zeta)$ のリー環は $L^2_{k+1,\tau}(X;Ad\,\zeta)$ で $d_A : L^2_{k+1,\tau}(X;Ad\,\zeta) \to L^2_{k,\tau}(X;Ad\,\zeta\otimes\Lambda^1)$ は写像：$\mathcal{G}_{\delta,k+1}(X,\zeta) \to \mathcal{A}_{\delta,k}(X,\zeta) : g \mapsto g^*A$ の単位元での微分であった．

また $\mathrm{Ker}\, d_A^+ : L^2_{k,\tau}(X;Ad\,\zeta\otimes\Lambda^1) \to L^2_{k-1,\tau}(X;Ad\,\zeta\otimes\Lambda^2_+)$ は $\widehat{\mathcal{M}}_{\delta,k}(X,\zeta;a)$ の A での接空間である．(これを見るには陰関数定理を写像 $A \mapsto F_A^+$ に対して適用する必要がある．§4.4 の一番最後に述べた $L^2_{k+1} \to L^2_k : u \mapsto u\wedge u$ の連続性により§3.2 の議論が適用できる.)

したがって

補題 4.8.1　$\dim\mathcal{M}_\delta(X,\zeta;a)$ は複体 (4.8.3) の第 1 コホモロジーの次元に一致する．

$d_A : L^2_{k+1,\tau}(X;Ad\,\zeta) \to L^2_{k,\tau}(X;Ad\,\zeta\otimes\Lambda^1)$ の核は（A の境界条件が 0 のとき）定数値の切断からなるが，$\delta > 0$ としていたから定数値の切断は $L^2_{k+1,\tau}(X;Ad\,\zeta)$ の元ではない．したがって A の境界条件がどの場合でも複体 (4.8.3) の第 0 コホモロジーは消える．

また横断正則性の議論により複体 (4.8.3) の第 2 コホモロジーは 0 としてよ

い．したがって $\dim \mathcal{M}_\delta(X,\zeta;a)$ は複体 (4.8.3) の指数に一致する．

次に (4.8.3) を前節で考えた作用素

$$(4.8.4) \quad d_A^+ \oplus d_A^* : L^2_{k+1,\tau}(X; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1) \to L^2_{k,\tau}(X; Ad\,\zeta \otimes (\Lambda^0 \oplus \Lambda^2_+))$$

と比較しよう．これは同じようなものであるが多少異なる．それは (4.8.3) のヒルベルトノルム（$L^2_{0,\tau}$ ノルム）での $d_A : L^2_{1,\tau}(X; Ad\,\zeta) \to L^2_{0,\tau}(X; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1)$ の共役が $d_A^* : L^2_{1,\tau}(X; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1) \to L^2_{0,\tau}(X; Ad\,\zeta)$ ではないせいである．d_A^* が（重みのつかない）L^2 ノルムについての（形式的）共役であったことを思い出すと $d_A : L^2_{1,\tau}(X; Ad\,\zeta) \to L^2_{0,\tau}(X; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1)$ の共役は $e^{-\tau} d_A^* e^{\tau}$ である．したがって

補題 4.8.2　楕円型複体 (4.8.3) の指数は

$$(4.8.5) \quad d_A^+ \oplus e^{-\tau} d_A^* e^{\tau} : L^2_{k+1,\tau}(X; Ad\,\zeta \otimes \Lambda^1) \to L^2_{k,\tau}(X; Ad\,\zeta \otimes (\Lambda^0 \oplus \Lambda^2_+))$$

の指数と一致する．

(4.8.4) と (4.8.5) の指数の違いはいくつであろうか．むろん境界条件が既約のときはどれも同じである．無限遠で $A \to \theta$ となる場合を考えよう．無限遠の近くで $e^{-\tau} d_A^* e^{\tau}$ は$-\frac{\partial}{\partial t} + (d_\theta^*, -\delta)$ に一致する．((4.4.1) の同型を使って表している.)

ここでスペクトル流を思い出そう．A は同時刻ゲージで考え $A|_{M\times\{t\}} = a_t$ としよう．$\mathcal{D}_{a_t}$ のスペクトルを考える．無限遠で $A \to \theta$ ゆえ $a_t \to \theta$，一方 $\mathcal{D}_\theta$ にはちょうど 3 つの 0 固有値が存在しこれらは 0 型式の方にある．したがって $d_A^+ \oplus d_A^*$ を $d_A^+ \oplus e^{-\tau} d_A^* e^{\tau}$ で置き換えると，スペクトル流ではこれらの三つの 0 固有値が $-\delta$ にかわる．

一方補題 4.7.12 の証明により，ソボレフ空間に重みを入れることは $\mathcal{D}_\theta$ の固有値を$\frac{\delta}{2}$ 正の方にずらすことに対応した．したがって (4.8.4) と (4.8.5) の指数の違いはスペクトル流で考えると 3 つの 0 が，(4.8.4) で $\frac{\delta}{2}$ に動き，(4.8.5) では $-\frac{\delta}{2}$ に動いていることに対応する．

よって無限遠で $A \to \theta$ のとき (4.8.4) の指数は (4.8.5) の指数より 3 小さい．

これをもっと幾何学的に言い換えよう．まず δ が正で十分小さければ $\mathcal{M}_\delta(X,\zeta;\theta)$ はδ によらなかった．これを $\mathcal{M}_+(X,\zeta;\theta)$ と書く．次にやはり $\delta>0$ に対して，

$$\mathcal{G}^+_{\delta,k+1}(X,\zeta;\theta)=\left\{ g \;\middle|\; \begin{array}{l} g\in\Gamma(X;Ad\ a) \\ \int_{X-K}e^{\delta t}|\nabla^\ell(g-g_0)|^2dxdt<\infty \quad \ell\le k+1 \\ g_0\in I_\theta\cong SU(2) \end{array} \right\}$$

とおき，

$$\mathcal{M}_{-,\delta}(X,\zeta;\theta)=\widehat{\mathcal{M}}_{\delta,k}(X,\zeta;\theta)/\mathcal{G}^+_{\delta,k+1}(X,\zeta;\theta)$$

と定義する．C^∞ 級接続で考えるのであれば

$$\mathcal{G}(X,\zeta;\theta)=\left\{ g \;\middle|\; \begin{array}{l} g\in\Gamma(X;Ad\ a) \\ g\to g_0 \quad (t\to\infty) \\ g_0\in I_\theta\cong SU(2) \end{array} \right\}$$

$$\widehat{\mathcal{M}}(X,\zeta;\theta)=\left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} F_A=-*F_A \\ A\to\theta \quad (t\to\infty) \end{array} \right\}$$

とおく．この二つの集合の元は C^∞ 級の接続，ゲージ変換である．$A\to\theta\ (t\to\infty)$ の意味は正の δ について $e^{\delta t}|A-\theta|\to 0$ とし $g\to g_0\ (t\to\infty)$ も同様とする．すると商空間$\widehat{\mathcal{M}}(X,\zeta;\theta)/\mathcal{G}(X,\zeta;\theta)$ はこの δ によらない．このとき

$$\widehat{\mathcal{M}}(X,\zeta;\theta)/\mathcal{G}(X,\zeta;\theta)=\mathcal{M}_-(X,\zeta;\theta)$$

が示せる．$\mathcal{M}_+(X,\zeta;\theta)$ の方を構成するには

$$\mathcal{G}_0(X,\zeta;\theta)=\left\{ g \;\middle|\; \begin{array}{l} g\in\Gamma(X;Ad\ a) \\ g\to g_0 \quad (t\to\infty) \\ g_0\in\{\pm1\} \end{array} \right\}$$

とおいて

$$\widehat{\mathcal{M}}(X,\zeta;\theta)/\mathcal{G}_0(X,\zeta;\theta)=\mathcal{M}_+(X,\zeta;\theta)$$

になる．この二つの違いは $\mathcal{G}(X,\zeta;\theta)/\mathcal{G}_0(X,\zeta;\theta) = SU(2)/\pm 1 = SO(3)$ である．

以上より

補題 4.8.3 $\mathcal{M}_-(X,\zeta;\theta) = \mathcal{M}_+(X,\zeta;\theta)/SO(3)$

したがって $\mathcal{M}_{-,\delta}(X,\zeta;\theta)$ の次元は (4.8.4) の指数に一致する．すなわち $\mathcal{M}_-(X,\zeta;\theta)$ を $\mathcal{M}(X,\zeta;\theta)$ とみなせば補題 4.7.17 が示された．

次に補題 4.7.18 を証明しよう．まず $k=0$ の場合であるがこの場合は $A=0$ (自明な接続) ととれる．このとき (4.8.3) のコホモロジーは容易に計算できる．すなわち

$$\mathrm{Ker} : L^2_{k+1,\tau}(X;Ad\ \zeta) \to L^2_{k,\tau}(X;Ad\ \zeta\otimes\Lambda^1) = 0$$

$$\frac{\mathrm{Ker} : L^2_{k,\tau}(X;Ad\ \zeta\otimes\Lambda^1) \xrightarrow{d_A^+} L^2_{k-1,\tau}(X;Ad\ \zeta\otimes\Lambda^2_+)}{\mathrm{CoKer} : L^2_{k+1,\tau}(X;Ad\ \zeta) \xrightarrow{d_A^+} L^2_{k,\tau}(X;Ad\ \zeta\otimes\Lambda^1)} = H^1(X;\mathbf{R})\otimes su(2)$$

$$\mathrm{CoKer} : L^2_{k,\tau}(X;Ad\ \zeta\otimes\Lambda^1) \xrightarrow{d_A} L^2_{k-1,\tau}(X;Ad\ \zeta\otimes\Lambda^2_+) = H^2_+(X;\mathbf{R})\otimes su(2)$$

したがって (4.8.3) の指数すなわち (4.8.5) の指数は $3(b_1-b_2^+)$ である．(4.8.4) の指数はこれから 3 を引けばよいから補題 4.7.18 が成立する．

先に進む前に $SO(3)$ の $\mathcal{M}_+(X,\zeta;\theta)$ への作用を思い出しておこう．これは次のように構成される．$g_0\in SU(2)$, $[A]\in\mathcal{M}_+(X,\zeta;\theta)$ としよう．g_0 にコンパクト集合の外で一致するようなゲージ変換を g とする．g^*A と A は $\mathcal{M}_-(X,\zeta;\theta)$ では同じ元を表すが，$\mathcal{M}_+(X,\zeta;\theta)$ では違う．しかし g^*A の $\mathcal{M}_+(X,\zeta;\theta)$ での同値類は g_0 でのみ決まり，しかも g_0 を $-g_0$ にしても変わらない．g^*A の $\mathcal{M}_+(X,\zeta;\theta)$ での同値類のことを $[g_0]^*[A]$ とすれば $SO(3)$ の $\mathcal{M}_+(X,\zeta;\theta)$ への作用が定まる．

さてこれで境界条件の設定については終わり，はり合わせに移ろう．§4.6 の

記号を用いる．$Z_i \subseteq \mathcal{M}_+(X_i, \zeta_{k_i}; \theta)$ をコンパクト集合とする．(ただし Z_i の元には可約な接続はないとしよう．）これを $\widehat{\mathcal{M}}_+(X_i, \zeta_{k_i}; \theta)$ に持ち上げ 1 の分解ではることで写像 $Pat_0(T): Z_1 \times Z_2 \to \mathcal{A}(M(T), \zeta)$ が得られる．ここで次のことに注意しよう．

補題 4.8.4　任意の $g_0 \in SO(3)$ に対して $Pat_0(T)(g_0[A_1], g_0[A_2])$ と $Pat_0(T)([A_1], [A_2])$ はゲージ同値である．

証明　これを示すには前に述べた $g_0 \in SO(3)$ の $\mathcal{M}_+(X_i, \zeta_{k_i}; \theta)$ への作用を考えればよい．すなわち g_0 をそれぞれ g_i なる X_i 上のゲージ変換に拡張することで $g_0{}^*[A_i] = [g_i{}^* A_i]$ と表された．ところがこの二つのゲージ変換 g_i は M 上で一致していたのだから，はり合って $X(T)$ 上のゲージ変換 g を作る．すると作り方より $Pat_0(T)(g_0[A_1], g_0[A_2]) = g^* Pat_0(T)([A_1], [A_2])$ である．

証明終わり

補題より写像 $Pat_0(T): \frac{Z_1 \times Z_2}{SO(3)} \to \mathcal{B}(M(T), \zeta)$ ができたことになる．ここで§4.6 の定理 4.6.1 のまねをしてこの写像が $Pat_1(T): \frac{Z_1 \times Z_2}{SO(3)} \to \mathcal{M}(M(T), \zeta)$ なる写像に変形される．前節の次元の式を考えるとこの両辺は同一次元である．つまり $\dim \frac{Z_1 \times Z_2}{SO(3)} = \dim \mathcal{M}(M(T), \zeta)$．これを使うと定理 4.3.5 の後半つまり，このようにして 0 ではり合わせた接続がすべて得られることも示せる．

以上により解析的な部分は一応わかったとしよう．証明はだいぶ端折ったが，たとえば [深谷 1] を見て欲しい．

さて以上の解析的な考察をどうやってフレアーホモロジーや相対ドナルドソン不変量の定義および和公式の証明に使うか考えよう．まずフレアーホモロジーの定義を考えよう．そのためにはモジュライ空間$\overline{\mathcal{M}}(M \times \mathbf{R}; a, b)$ が 0 および 1 次元の場合のコンパクト化を考察する必要がある．ここで境界値 a, b はとりあえず既約平坦接続で $H^1(M; Ad\ a) = H^1(M; Ad\ b) = 0$ としてかまわない．(フレアーホモロジーを定めるチェイン複体の定義では自明な接続は生成元に入れない．)

0 および 1 次元の場合を考えていたのだから$\eta(a) = \eta(b) + 1$ または $\eta(a) = \eta(b) + 2$ である．前者が必要になるのは境界作用素を定義するために$\overline{\mathcal{M}}(M \times \mathbf{R}; a, b)$ の（符号付き）位数を使うことができるように$\overline{\mathcal{M}}(M \times \mathbf{R}; a, b)$ が有限集合であることを証明するためであり，後者が必要になるのは$\partial\partial = 0$ を証明するためである．$\eta(a) = \eta(b) + 2$ の場合の議論の方が少し難しい．そちらだけやろう．この場合証明すべきことは

$$\text{(4.8.6)} \quad \partial\mathcal{C}\overline{\mathcal{M}}(M \times \mathbf{R}; a, b) = \bigcup_{\eta(c)=\eta(b)+1} \overline{\mathcal{M}}(M \times \mathbf{R}; a, c) \times \overline{\mathcal{M}}(M \times \mathbf{R}; c, b)$$

である．この証明は可約接続についての議論を除けば§4.6 と同様なのだが，§4.6 では少し違う場合（境界付き多様体二つのはり合わせの場合）を議論したから，もう一度この場合を粗くやってみよう．$[A_j] \in \overline{\mathcal{M}}(M \times \mathbf{R}; a, b)$ を発散列とする．$M \times \mathbf{R}$ を $M \times [0, 1]$ と等長的な部分集合 Y_i の可算和に書いておく．Y_i のうちで補題 4.5.2 の仮定が満たされないものの和集合の連結成分を島，満たされるもの全体の連結成分を海といった．海に対しては平坦接続 a が決まり A_j はその海の上で a に近かった．

島の数は j によらない数で上からおさえられた．島たちの間の距離が $j \to \infty$ で有界であるときそれらの島をまとめて群島と呼んだ．列 $[A_j]$ が (4.8.6) の右辺の$\overline{\mathcal{M}}(M \times \mathbf{R}; a, c) \times \overline{\mathcal{M}}(M \times \mathbf{R}; c, b)$ の元に収束するとは，ちょうど二つの群島があり，その間の海に対応する平坦接続が t （$M \times \mathbf{R}$ の第 2 成分）の小さい方から順に a, c, b になっているときである（図 4.8.1 参照）．これ以外あり得ないこと，また c は既約でなければならないことを証明する．(本当は群島が二つでその間の海に対応する平坦接続が a, c, b で c は既約の場合に，そのような A_j がはり合わせ写像 $Pat_1 : \overline{\mathcal{M}}(M \times \mathbf{R}; a, c) \times \overline{\mathcal{M}}(M \times \mathbf{R}; c, b) \times [T, \infty) \to \overline{\mathcal{M}}(M \times \mathbf{R}; a, b)$ の像に入っていることも証明しなければならない．この証明は§4.6 で可約接続の存在を忘れてやったものと同じであるので省略する．$\overline{\mathcal{M}}(M \times \mathbf{R}; a, c) \times \overline{\mathcal{M}}(M \times \mathbf{R}; c, b) \times [T, \infty)$ の 3 番目のパラメータ $[T, \infty)$ は群島の間の距離に対応する.)

さて群島の数が 2 個であることを示そう．もし群島の数が 1 ならば適当に $\mathbf{R}$ 方向のパラメータをずらすと A_j は収束部分列をもつ．これは $[A_j] \in \overline{\mathcal{M}}(M \times$

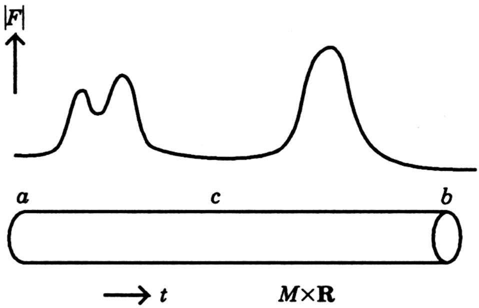


図 4.8.1

$\mathbf{R}; a, b)$ が発散列であったことに反する．したがって群島の数は 2 個以上である．

群島の数が 3 個以上としよう．これらの間の海に対応する平坦接続が t の小さい方から順に $a, c_1, \cdots, c_n, b$ としよう．(最初が a で最後が b であるのは $[A_j] \in \overline{\mathcal{M}}(M \times \mathbf{R}; a, b)$ ゆえ明らか.) 部分列に移って群島の数および平坦接続 c_i は A_j によらず一定としてよい．すると，$j \to \infty$ での各々の群島の極限をとることにより $\overline{\mathcal{M}}(M \times \mathbf{R}; a, c_1)$, $\overline{\mathcal{M}}(M \times \mathbf{R}; c_1, c_2)$, $\cdots$, $\overline{\mathcal{M}}(M \times \mathbf{R}; c_{n-1}, c_n)$, $\overline{\mathcal{M}}(M \times \mathbf{R}; c_n, b)$ の元が得られる．したがってこれらは空集合でない．よって $\eta(a) > \eta(c_1) > \cdots > \eta(c_n) > \eta(b)$　($\eta(c_i)$ のどれかが可約としてもここまでの議論は大丈夫である.)

一方 $\eta(a)+2 = \eta(b)$ であったから，$k=1$ つまり群島は二つである．二つの群島の間の海に対応する平坦接続を c としよう．c が既約であることを証明しよう．c が可約とする．この場合，$\overline{\mathcal{M}}(M \times \mathbf{R}; a, c)$ 等のかわりに $\overline{\mathcal{M}}_-(M \times \mathbf{R}; a, c)$ と書くべきである．(すなわち境界条件を次元が小さくなる方にとっている.) すると $\dim \overline{\mathcal{M}}_-(M \times \mathbf{R}; a, c) = \eta(a) - \eta(c) - 1$, $\dim \overline{\mathcal{M}}_-(M \times \mathbf{R}; c, b) = \eta(c) - \eta(b) - 4$ である．$\eta(a) + 2 = \eta(b)$ によりこのどちらかは必ず負になる．これは $\overline{\mathcal{M}}_-(M \times \mathbf{R}; a, c)$, $\overline{\mathcal{M}}_-(M \times \mathbf{R}; c, b)$ の両方が空でないことに反する．

以上でフレアーホモロジーの定義に関する部分での可約接続の寄与がないことは示した．この場合は比較的単純であった．その理由は島の部分には可約接続（この場合は自明接続）が現れないことである．そのため海のところに現れ

た可約接続は単にモジュライ空間の次元を減らす役目をするから，次元の勘定で海にも自明な接続は現れないことがわかった．このことを念頭において次の場合を考えよう．

次の目標は相対フレアーホモロジーの定義である．これには $\mathcal{M}(X,\zeta_k;a)$ のコンパクト化が必要である．より正確には次の問題である．X を単連結，$2d = 8k - 3(1+b_2^+(X))$ とし，$[\Sigma_1],\cdots,[\Sigma_d]$ なる X の曲面をとる．$X - K = M \times (0,\infty)$ であり，また曲面はすべて K の方に含まれているとする．これから切断 $s_i\mathrm{Res}_{\Sigma_i}$ の 0 点集合 $(s_i\mathrm{Res}_{\Sigma_i})^{-1}(0)$ を考え，これと $\mathcal{M}(X,\zeta_k;a)$ の交わり $\mathcal{N}(X,\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;a) = \mathcal{M}(X,\zeta_k;a) \cap \bigcap_{i=1}^d (s_i\mathrm{Res}_{\Sigma_i})^{-1}(0)$ を考える．これが 1 次元または 0 次元の場合にコンパクト性を調べる必要があった．1 次元の場合つまり $\dim \mathcal{M}(X,\zeta_k;a) = 2d+1$ の場合を考えることにしよう．これが必要になるのは，相対ドナルドソン不変量がフレアーサイクルであることを証明するとき（「定理 4.3.2」）であった．そのとき示すべきであったことは「定理 4.3.3」すなわち

$$\partial C\mathcal{N}(X,\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;a) = \bigcup_{\eta(c)=m+1} \mathcal{N}(X,\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;c) \times \overline{\mathcal{M}}(M;c,a)$$

であった．$[A_j] \in \mathcal{N}(X,\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;a)$ を発散列としよう．この A_j に対しても海，島，群島，などが定義できる．K の部分を大陸と呼ぼう．大陸から $j \to \infty$ で有界の距離にある群島は大陸の一部であるとみなし群島とは考えない．$\mathcal{N}(X,\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;c)\times\overline{\mathcal{M}}(M;c,a)$ に $[A_j]$ が収束するとは，群島がちょうど一つで大陸と群島の間にある海に対応する平坦接続が c であることにあたる．(A_j に対する群島がちょうど一つで大陸と群島の間にある海に対応する平坦接続が c であることを示した後，A_j がはり合わせ写像 $\mathcal{N}(X,\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;c) \times \overline{\mathcal{M}}(M;c,a) \times [T,\infty) \to \mathcal{N}(X,\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;a)$ の像に含まれることを示すのは，§4.6 と同じであるので省略する.）さらに c が既約であることを示さなければならない．以後簡単のためバブルは大陸でだけ起こるとする．そうでなく島でバブルが起これば次元を「損する」だけであるから．

さて群島の数を n とし海に対応する平坦接続を t が小さい方から順に $c_1,\cdots,$

c_n, a としよう．A_j の大陸の近傍への制限の極限を考える．この元から $\mathcal{M}(X, \zeta_{k'}; c_1)$ または $\mathcal{M}_\pm(X, \zeta_{k'}; c_1)$ の元を作ることができる.（後者は c_1 が可約の場合.）（k' は c_1 のゲージ同値類をそれに併せて変えることで好きなようにとれる．この取り方は後で指定する.）この元を $[A_\infty]$ とおく．ここで§3.5 と同様場合分けが生じる．すなわち場合 1 は A_∞ が既約な場合で，場合 2 は A_∞ が可約な場合である．場合 2 では A_∞ が自明な場合とそうでない場合があり得る．しかし $b_2^+ \geq 1$ と仮定すると，自明でない可約接続は大陸には現れない．

場合 1 を調べるのはそれほど難しくない．A_j たちが大陸の近傍でバブルしたのが $k - k'$ 箇所であったとしよう（これで k' を決める）．§3.5 と同様に Σ_i たちの三つが 1 点で交わらないと仮定しよう．するとバブルする点を通る曲面は高々 $2(k - k')$ 個である．したがって $[A_\infty]$ は少なくとも $d - 2(k - k')$ 個の i に対して $(s_i \mathrm{Res}_{\Sigma_i})[A_\infty] = 0$ を満たす．この i が $i = 1, \cdots, d - 2(k - k')$ であるとしよう．すると

$$\dim \mathcal{M}(X, \zeta_{k'}; c_1) = \dim \mathcal{M}(X, \zeta_k; a) - 8(k - k') - \eta(c_1) + \eta(a) \geq 2(d - 2(k - k'))$$

よって $\dim \mathcal{N}(X, \zeta_k, \Sigma_1, \cdots, \Sigma_d; a) = 1$ ゆえ $\eta(a) - \eta(c_1) \geq 4(k - k') - 1$.

次に $j \to \infty$ での A_j の各群島への制限の極限から $\overline{\mathcal{M}}(M; c_1, c_2)$, $\cdots$, $\overline{\mathcal{M}}(M; c_{n-1}, c_n)$, $\overline{\mathcal{M}}(M; c_n, a)$ の元がそれぞれできるから，これらは空でない．したがって $\eta(c_1) > \cdots > \eta(c_n) > \eta(a)$. これと $\eta(a) - \eta(c_1) \geq 4(k - k') - 1$ を考え合わせると，$k = k'$ つまりバブルは起こっていない．さらに $n = 1$ で $\eta(c) = \eta(a) - 1$ になる．これが証明したかったことであった．ここで c_i たちが可約であっても上の議論は問題ない.（そのときは次元を損するだけであるから.）

場合 2 は A_∞ が自明な接続であるときである．これがなぜ問題かというと，この場合に限って AHS 複体の指数が負であっても ASD 接続が存在するからである．

A_∞ が自明であるから c_1 も自明でなければならない．$c_1 = \theta$ とおく．さらに，曲面上の切断 s_i は自明な接続に対しては 0 でないと仮定する．すると $s_i \mathrm{Res}_{\Sigma_i}(A_j) = 0$, $s_i \mathrm{Res}_{\Sigma_i}(A_\infty) = s_i \mathrm{Res}_{\Sigma_i}(0) \neq 0$ より Σ_i 上 A_j は A_∞ に収束しない．つまりどの曲面上もバブルする点がある．3 つの曲面の交わりは空集合としたから，結局バブルする点の数は $d/2$ 以上である．バブルの数を κ と

する．すると $\mathcal{M}(X,\zeta_{k-\kappa};\theta)$ は自明な接続を含む．つまり

$$\eta(\theta)=8(k-\kappa)\le 8k-4d \tag{4.8.7}$$

$\overline{\mathcal{M}}(M\times\mathbf{R};\theta,a)\ne\emptyset$ より

$$\eta(\theta)>\eta(a) \tag{4.8.8}$$

また

$$2d=8k-3(1+b_2^+)-\eta(a)+1 \tag{4.8.9}$$

(4.8.7),(4.8.8),(4.8.9) より $3(1+b_2^+)>2d+1$．したがって $3(1+b_2^+)\le 2d+1$ と仮定すれば，この場合は起こらない．

$\mathcal{N}(X,\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;a)=\mathcal{M}(X,\zeta_k;a)\cap\bigcap_{i=1}^d(s_i\mathrm{Res}_{\Sigma_i})^{-1}(0)$ が 0 次元の場合に同様のコンパクト性を示すには，上の議論を $\dim\mathcal{M}(X,\zeta_k;a)=2d$ の場合にする必要がある．このときは (4.8.9) 式は $2d=8k-3(1+b_2^+)-\eta(a)$ になるから，条件として $3(1+b_2^+)\le 2d$ が必要である．以上をまとめると

定理 4.8.5 X を単連結 4 次元多様体とし，$b_2^+>0$, $3(1+b_2^+)\le 2d$ を仮定する．またすべての既約平坦接続に対して $H^1(X;Ad\ a)=0$ とする．このとき $2d=8k-3(1+b_2^+)-\eta(a)$ なる既約平坦接続 a に対して $\mathcal{N}(X,\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;a)$ はコンパクトである．

また $2d=8k-3(1+b_2^+)-\eta(a)$ とすると $\mathcal{N}(X,\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;a)$ はコンパクト化 $\mathcal{CN}(X,\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;a)$ をもち，

$$\partial\mathcal{CN}(X,\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;a)=\bigcup_{\eta(c)=\eta(a)+1}\mathcal{N}(X,\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;c)\times\overline{\mathcal{M}}(M;c,a)$$

が成立する．

定理 4.8.5 を用いると

$$\partial\sum\#\mathcal{N}(X,\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;c)\cdot[c]=0$$

がわかる．この証明は定理 4.3.2 および定理 4.3.3 で行った．したがって定理 4.8.5 の仮定 $b_2^+>0$, $3(1+b_2^+)\le 2d$ が $\sum\#\mathcal{N}(X,\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;c)\cdot[c]$ がサイ

クルであるための一つの十分条件である．このサイクルの表すフレアーホモロジーの元を相対ドナルドソン多項式と呼んだ．

さらに相対ドナルドソン多項式が（微分）位相不変である（計量，摂動，ホモロジー類を実現する曲面の取り方，切断によらない）ためには，もう少し条件が必要である．g_t $(t \in [0,1])$ を X 上のリーマン計量の族とする．ただし g_t は K の外側では一定とする．(むろん K の外側，言い換えれば3次元多様体 M を取り換えても相対ドナルドソン多項式が変わらないことも示す必要がある．これはフレアーホモロジーが3次元多様体の計量によらないことと同様§4.10で示す.) $\mathcal{N}((X,g_t),\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;a)$ が0次元になる場合を考えよう．このとき $\bigcup_{t\in[0,1]}\mathcal{N}((X,g_t),\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;a)$ の境界を調べる必要がある．示すべきなのは次の主張である．

補題 4.8.6　X を単連結4次元多様体とし，$b_2^+>1$，$3(1+b_2^+)+1\le 2d$ を仮定する．またすべての既約平坦接続に対して $H^1(X;Ad\ a)=0$ とする．$2d=8k-3(1+b_2^+)-\eta(a)$ なる既約平坦接続 a をとる．このとき $\bigcup_{t\in[0,1]}\mathcal{N}((X,g_t),\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;a)$ は1次元多様体でこれはコンパクト化 $\mathcal{C}\bigcup_{t\in[0,1]}\mathcal{N}((X,g_t),\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;a)$ をもちその境界は

$$\left(\bigcup_{\substack{t\in[0,1]\\ \eta(b)=\eta(a)+1}}\mathcal{N}((X,g_t),\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;b)\times\overline{\mathcal{M}}(b,a)\right)$$
$$\cup\mathcal{N}((X,g_0),\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;a)$$
$$\cup-\mathcal{N}((X,g_1),\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;a)$$

で与えられる．

まず補題から相対ドナルドソン多項式であるフレアーサイクル

$$Q((X,g_t),\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d)=\sum\#\mathcal{N}((X,g_t),\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;a)\cdot[a]$$

が $t=0,1$ に対して同じホモロジー類を表すことを見よう．まず補題にでてきた $\mathcal{N}((X,g_t),\zeta,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;b)$ を考えよう．これは（t を一つ止めると）-1 次

元の集合である．すなわち generic な t に対してこれは空集合である．しかし我々は t をパラメータについて動かした集合 $\mathcal{N}((X,g_t),\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;b)$ を考えているのであるから，-1 次元の空間の 1 次元の族すなわち 0 次元の空間を得る．この（符号付き）位数を考えて

$$Z = \# \bigcup_{t\in[0,1]} \mathcal{N}((X,g_t),\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d;b)\cdot[b]$$

なるフレアーチェインを得る．このとき補題 4.8.6 は，次のことを主張する．

$$Q((X,g_0),\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d) - Q((X,g_1),\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d) = \partial Z$$

したがって相対ドナルドソン多項式はリーマン計量の取り方によらない．摂動，ホモロジー類を実現する曲面の取り方，切断に対する不変性の証明も同様である（§3.5 の証明も参照）．

補題 4.8.6 の証明は定理 4.8.5 の証明とほぼ同様である．注意するのは仮定 $b_2^+ > 1$ により，g_t どれに対しても X 上に自明でない可約 ASD 接続がないことである．このことに注意すれば後は定理 4.8.5 の証明の次元の計算をやり直せばよい．これは読者に任せて，ここでは $b_2^+ = 1$ の場合に何が起こるか少し見てみよう．

境界が自明な接続であるような ASD 接続のモジュライ空間 $\mathcal{M}((X,g_t),\zeta;\theta)$ を考えよう．この中に可約であるが自明ではない接続があるかを考えよう．前に閉多様体の場合に述べたのと同様にして，このような接続があると ζ は$\zeta = L\oplus L^*$ なるように直線束の直和に分解する．この直線束は $c^1(L)^2 = -c^2(\zeta)$ を満たしていなければならない．(我々の状況では境界があるが，この場合直線束にも接続を用いて境界での自明化が与えられる．したがって等式 $c^1(L)^2 = -c^2(\zeta)$ は相対コホモロジー $H^4(X,M;\mathbf{Z})$ での等式として意味を持つ.)

さらに ζ 上の可約接続は L 上の接続を引き起こす．もとの接続が ASD であるとこの L 上の接続の曲率は反自己双対調和型式になる．したがって $*u = -u$ なる調和 2 型式で，$u\wedge u = -c^2(\zeta)$, $u\to 0$ $(t\to\infty)$, $[u]\in H^2(X,M;\mathbf{Z})$ なるものの存在が，ζ 上に可約で自明でない ASD 接続が存在するために必要十分であった．§2.2 で述べたようにこのような u が存在するような計量は計量全体

の空間の余次元1の部分空間を成す．したがって g_t のうち有限個の t に対して ζ 上に可約で自明でないASD接続が存在する可能性がある．

そのような t_0 をとると，$t_j \to t_0$ なる列に対して $[A_j] \in \mathcal{M}((X, g_{t_j}), \zeta; \theta)$ で A_j が極限でちぎれて (X, t_0) 上の可約接続と，$\mathcal{M}(M \times \mathbf{R}; \theta, a)$ の元の二つに分かれるものがとれる．この場合には補題4.8.6が成立しなくなる．これは閉多様体の場合と同様な事情である．

ここでちょっと不思議なことに注意しよう．$X = X_1 \cup_M X_2$ とし $b_2^+(X_1) = b_2^+(X_2) = 1$ としよう．今述べたようにこのとき X_i 上の相対ドナルドソン多項式はその計量によって変わってしまう．一方 $b_2^+(X) = 2$ であるから X 上のドナルドソン多項式は計量によらない．これは和公式を考えると一瞬変に見えるであろう．実はこの場合も和公式は成立する．この現象の種明かしは後ですることにして和公式の議論に入ろう．

ここでは§4.6と同じ状況および言葉使いをする．状況を思い出すと X_1, X_2 なる二つの M を境界とする4次元多様体がありこれがはり合わさって $X(T)$ ができていた．(T はパラメータで大体はり合わさる部分の長さの半分だった．) A_ℓ を $X(T_\ell)$ 上の接続の列で $\mathcal{N}(X(T_\ell), \zeta_{k_1+k_2}, \Sigma_{1,1}, \cdots, \Sigma_{1,d_1}, \Sigma_{2,1}, \cdots, \Sigma_{2,d_2})$ の元とする．すなわちASD接続で $s_i \mathrm{Res}_{\Sigma_i}(A_\ell) = 0$ とする．このとき A_ℓ が $\bigcup_{\eta(a)=m} \mathrm{Im}\ Pat_{2,a}(T)$ に含まれることを証明したいのだった（命題4.6.7）．可約接続の存在が引き起こす問題点を除いてこれは§4.6で示されていた．

まず可約接続がどういう悪さをするか考えてみよう．可約接続は2種類考える必要がある．すなわち海に対応する3次元多様体上の平坦接続が可約である場合と，大陸または群島上の（4次元空間上の）接続が可約である場合である．前者だけが起こっている，すなわち海の接続は可約接続に近いが，群島または大陸上の接続はすべて既約である場合は，すでに述べたフレアーホモロジーの定義の場合の問題点と同様に処理できる．すなわちこの場合は次元を損するだけなので，次元の勘定でこれは起こらない．また群島上の接続が可約であることは3次元多様体をホモロジー球面としておけばない．(自明な接続しかあり得ずこれは平坦になってしまい群島の定義に反する．)

したがって問題になるのは大陸の上で可約な接続がある場合だけである．ここで簡単のため大陸（はり合わせている二つの 4 次元多様体 X_1 と X_2）は単連結であるとしよう．するとこの大陸上の可約接続も再び自明な接続しかない．したがって A_ℓ は少なくともどちらかの大陸上で自明な接続に（有限個の点を除いて）収束するとしてよい．この大陸が X_1 としてよいであろう．X_1 上にあった曲面は d_1 個すなわち $\Sigma_{1,1},\cdots,\Sigma_{1,d_1}$ であった．$s_i\mathrm{Res}_{\Sigma_i}(A_\ell)=0$, $s_i\mathrm{Res}_{\Sigma_i}(0)\neq 0$ であるから，どの $\Sigma_{1,j}$ 上でも A_ℓ は自明な接続に収束することはない．すなわちどの $\Sigma_{1,j}$ 上にもバブルする点がある．ここでまず§3.5 にならって

$$d=d_1+d_2>2k$$

を仮定しよう．(この仮定はドナルドソン多項式 $Q(X,\zeta_k,\Sigma_{1,1},\cdots,\Sigma_{1,d_1},\Sigma_{2,1},\cdots,\Sigma_{2,d_2})$ が定義されるために必要であった.）するともう一方の大陸 X_2 では A_ℓ は自明な接続に収束できないことがわかる．なぜなら X_2 では A_ℓ は 0 に収束すると，やはり，どの $\Sigma_{2,j}$ 上にも A_ℓ がバブルする点がなければならないが，バブルする点は高々 k_1+k_2 個であるから不可能である（この議論は§3.5 と同じ）．

簡単のために島が一つもない場合を考えよう．すると一方の大陸 X_1 上では A_ℓ は（有限個の点を除いて）自明な接続に収束し，もう一方の大陸 X_2 では自明でない接続 $A_\infty^{(2)}$ に（有限個の点を除いて）収束し，またその間は海でも自明な接続に（有限個のバブルする点を除いては）収束する．

次元の勘定をしてみよう．まず κ_1 を X_1 または海の上で生じたバブルの数とする．すると $d_1\le 2\kappa_1$．次に $k=\kappa_1+k_2$ なるように k_2 を定め，κ_2'' で X_2 でのバブルの数とする．$A_\infty^{(2)}$ のチャーン数は $k_2'=k_2-\kappa_2''$ である．一方 X_2 上の曲面たち $\Sigma_{2,j}$ は高々 $2\kappa_2''$ 個を除いてバブルする点と交わらない．したがって順番を付け換えて $s_{2,j}\mathrm{Res}_{\Sigma_{2,j}}(A_\infty^{(2)})=0$ が $j=1,\cdots,d_2-2\kappa_2''$ に対して成立するとしてよい．すなわち $[A_\infty^{(2)}]\in\mathcal{N}(X_2,\zeta_{k_2'},\Sigma_{2,1},\cdots,\Sigma_{2,d_2-2\kappa_2''};0)$ である．

$\mathcal{N}(X_2,\zeta_{k_2'},\Sigma_{2,1},\cdots,\Sigma_{2,d_2-2\kappa_2''};0)$ の次元を数えてみよう．まず

$$\dim\mathcal{N}(X(T_\ell),\zeta_{k_1+k_2},\Sigma_{1,1},\cdots,\Sigma_{1,d_1},\Sigma_{2,1},\cdots,\Sigma_{2,d_2})=0$$

ゆえ $8(k_1+k_2)-3(1+b_2^+(X_1)+b_2^+(X_2))=2(d_1+d_2)$ である．これと $d_1\le 2\kappa_1$

より

$$8k_2 - 3(1 + b_2^+(X_2)) - 2d_2 = 3b_2^+(X_2) + 2d_1 - 8k_1 \le 3b_2^+(X_1) + 4k_1$$

である．(この不等号は $d_1 = 2\kappa_1$ のとき，つまり X_1 または海の上で「無駄な」バブルがないときには等号になる．) 一方

$$\dim \mathcal{N}(X_2, \zeta_{k_2'}, \Sigma_{2,1}, \cdots, \Sigma_{2,d_2-2\kappa_2''}; 0) = 8k_2' - 3(1 + b_2^+(X_2)) - 2(d_2 - 2\kappa_2'')$$

である．よって

$$\begin{aligned} &\dim \mathcal{N}(X_2, \zeta_{k_2'}, \Sigma_{2,1}, \cdots, \Sigma_{2,d_2-2\kappa_2''}; 0) \\ &= 8k_2' - 3(1 + b_2^+(X_2)) - 2(d_2 - 2\kappa_2'') \\ &\le \quad 3b_2^+(X_1) - 4k_1 - 4\kappa_2'' \\ &\le \quad 3b_2^+(X_1) - 4d_1 - 4\kappa_2'' \end{aligned} \tag{4.8.10}$$

が成り立つ．ここで定理 4.8.5 と同じ条件すなわち $3(b_2^+(X_1) + 1) \le 2d_1$ を仮定する．すると (4.8.10) の右辺は負になる．すなわちこういうことは起きない．

以上は島がない場合の議論であったが島があっても次元は「損をする」だけである．したがって，§4.6 の議論と併せて，次のことが証明されたことになる．

補題 4.8.7　$X = X_1 \cup_M X_2$, $0 < b_2^+(X_i)$, $3(1 + b_2^+(X_i)) \le 2d_i$ とし X_i は単連結と仮定する．このとき T が十分大きければ$\bigcup_{\eta(a)=m} \mathrm{Im}\ Pat_{2,a}\ (T)$ は $\mathcal{N}(X(T), \zeta_{k_1+k_2}, \Sigma_{1,1}, \cdots, \Sigma_{1,d_1}, \Sigma_{2,1}, \cdots, \Sigma_{2,d_2})$ 全体に一致する．

これから直ちに得られるのが

定理 4.8.8　$X = X_1 \cup_M X_2$, $0 < b_2^+(X_i)$, $3(1 + b_2^+(X_i)) \le 2d_i$ とし X_i は単連結と仮定すると，

$$\begin{aligned} &Q(X, [\Sigma_{1,1}], \cdots, [\Sigma_{1,d_1}], [\Sigma_{2,1}], \cdots, [\Sigma_{2,d_2}]) \\ &\qquad = \langle Q(X_1, [\Sigma_{1,1}], \cdots, [\Sigma_{1,d_1}]), Q(X_2, [\Sigma_{2,1}], \cdots, [\Sigma_{2,d_2}]) \rangle \end{aligned}$$

この式は (4.1.1.3) あるいは「定理 4.3.4」である．

実は定理 4.8.8 ではまだ不十分である．というのはドナルドソンによる特別な(しかし非常に大事な) 場合，すなわち $M = S^3$ の場合がこの結果からは十分には示されないからである．つまりドナルドソンは $X = X_1 \# X_2$ なる連結和の場合(これは $M = S^3$ と同じことであるが) $0 < b_2^+(X_i)$, $3(1 + b_2^+(X_1) + b_2^+(X_2)) \le 2(d_1 + d_2)$ の仮定だけで，つまり $3(1 + b_2^+(X_i)) \le 2d_i$ を仮定せず，定理 4.8.8 を証明した．(この場合の結論は，$M = S^3$ のフレアーホモロジーは 0 だから，$Q(X, [\Sigma_{1,1}], \cdots, [\Sigma_{1,d_1}], [\Sigma_{2,1}], \cdots, [\Sigma_{2,d_2}]) = 0$ である．)

そのためにドナルドソンはもう一つ別の議論を使った．(これは§3.3 で少し述べた倉西族の考え方に関わる．) ドナルドソンの記述 ([D6],[DK]) によれば連結和のドナルドソン多項式が 0 になるのは二つのメカニズムによる．第 1 のメカニズムは S^3 上のはり合わせで両側が既約とすると，はり合った後のモジュライ空間の次元は両側のモジュライ空間の次元の和足す 3 になる．したがってはり合った後 0 次元になる場合を考えると両側は次元が 3 つ足らないから少なくともどちらかが空になる．これは，フレアーホモロジーが定義できること (すなわち (4.8.6)) の証明で使った議論であった．(これはもちろん定理 4.8.5 および定理 4.8.8 の証明でも用いた．)

もう一つのメカニズムとドナルドソンが呼んでいるものは，どちらか一方で自明な接続が現れる場合に対応する．この場合のドナルドソンの議論を我々は使っていないので，余分な仮定 $3(1 + b_2^+(X_i)) \le 2d_i$ が必要になった．しかしこの点は§4.9 で述べるフリードマン–モーガンのやり方，つまり $\overline{\mathbf{C}P^2}$ との連結和をとって安定化する，で回避することができる．これについては後で述べることにして，ここでは定理 4.8.8 で満足することにしたい．(しかし§4.9 の議論を使うと $\mathbf{Z}_2$ ねじれの分の情報が消えてしまう．)

最後に前に述べた不思議な点，すなわち $b_2^+(X_1) = b_2^+(X_2) = 1$ の場合の不定性が，はり合わせたとたん消えてしまうことについて述べよう．

$b_2^+(X_1) = 1$ である場合，計量の族 g_t をとると，0 次元のモジュライ空間の族 $\bigcup_{t\in[0,1]} \mathcal{N}((X_1, g_t), \zeta_{k_1}, \Sigma_1, \cdots, \Sigma_{d_1}; a)$ は 1 次元多様体で，そのコンパクト化には $\mathcal{N}((X_1, g_t), \zeta_{k_1}, \Sigma_{1,1}, \cdots, \Sigma_{1,d_1}; 0) \times_{SO(3)} \overline{\mathcal{M}}(M \times \mathbf{R}; 0, a)$ が現れる可能性がある．ただし補題 4.8.6 の証明の中でした次元の計算により $\mathcal{N}((X_1, g_t), \zeta_{k_1},$

$\Sigma_{1,1},\cdots,\Sigma_{1,d_1};0)$ には既約接続が含まれることはない．(この書き方は不正確である．なぜなら可約接続に対しては，$s_j\mathrm{Res}_{\Sigma_{1,j}}$ は定義されないから $\mathcal{N}((X_1,g_t),\zeta_{k_1},\Sigma_{1,1},\cdots,\Sigma_{1,d_1};0)$ なる記号そのものが意味をなさない．）より正確には次のように考える．

まずモジュライ空間 $\mathcal{M}_+((X_1,g_t),\zeta_{k_1};0)$, $\overline{\mathcal{M}}_+(M\times\mathbf{R};0,a)$ を考える．すると $\bigcup_{t\in[0,1]}\mathcal{M}((X_1,g_t),\zeta_{k_1};0)\times_{SO(3)}\mathcal{M}_+(M\times\mathbf{R};0,a)\times[T,\infty)$ と同相な $\bigcup_{t\in[0,1]}\mathcal{M}((X_1,g_t),\zeta_{k_1};a)$ のエンドがある．$\bigcup_{t\in[0,1]}\mathcal{M}((X_1,g_t),\zeta_{k_1};a)$ には可約接続に対応する $SO(3)$ の軌道が有限個あり，それを除いては $SO(3)$ の作用は不動点を持たない．$\bigcup_{t\in[0,1]}\mathcal{M}_{irr}((X_1,g_t),\zeta_{k_1};0)$ で既約な元全体を表す．すると $\bigcup_{t\in[0,1]}\mathcal{M}_{irr}((X_1,g_t),\zeta_{k_1},\Sigma_{1,1},\cdots,\Sigma_{1,d_1};0)\times_{SO(3)}\overline{\mathcal{M}}_+(M\times\mathbf{R};0,a)$ は C^∞ 級多様体になり，その上では $s_j\mathrm{Res}_{\Sigma_{1,j}}$ は定義される．その0点の共通部分を $\mathcal{N}_{irr}((X_1,g_t),\zeta_{k_1},\Sigma_{1,1},\cdots,\Sigma_{1,d_1};0)$ とおく．この次元を勘定すると

$$\bigcup_{t\in[0,1]}\mathcal{N}_{irr}((X_1,g_t),\zeta_{k_1},\Sigma_{1,1},\cdots,\Sigma_{1,d_1};0)\times_{SO(3)}\mathcal{M}_+(M\times\mathbf{R};0,a)=\emptyset.$$

が示せる．

一方，可約な元はゲージ変換群の作用で S^1 を等方部分群にもつ．したがって $\bigcup_{t\in[0,1]}\mathcal{M}_-((X_1,g_t),\zeta_{k_1};0)$ の可約接続に対して $\bigcup_{t\in[0,1]}\mathcal{M}((X_1,g_t),\zeta_{k_1};a)$ は対応するエンドを持ちそれは $\frac{\mathbf{C}^\ell\times\mathcal{M}_-(M\times\mathbf{R};0,a)}{S^1}$ である．$\frac{\{\vec{0}\}\times\mathcal{M}_-(M\times\mathbf{R};0,a)}{S^1}$ には $s_j\mathrm{Res}_{\Sigma_{1,j}}$ は拡張されない．$\mathcal{M}_-(M\times\mathbf{R};0,a)$ への S^1 の作用は不動点を持たず，また $s_j\mathrm{Res}_{\Sigma_{1,j}}$ はこの成分にはよらない．したがって次元の勘定から $s_j\mathrm{Res}_{\Sigma_{1,j}}$ の共通零点がこのエンドと交わるのは $\mathcal{M}_-(M\times\mathbf{R};0,a)$ が0次元のときであることが証明できる．このときは $\frac{\mathbf{C}^\ell\times\mathcal{M}_-(M\times\mathbf{R};0,a)}{S^1}$ は複素射影空間の錘の有限個の和になる．この複素射影空間の錘の $s_j\mathrm{Res}_{\Sigma_{1,j}}$ の共通零点は有限本の原点を通る半直線とみなせる．この半直線の数は複素射影空間 $\frac{\mathbf{C}^\ell}{S^1}$ への直線束の制限のチャーン数と $\mathcal{M}_-(M\times\mathbf{R};\,0,a)$ の位数の積である．このチャーン数は筆者にはいくつかよくわからない．(コッチック (Kotchik)–モーガン (Morgan)[KoM] はこのへんの議論に関係がある．）しかし一つわかることは，この数が平坦接続 a に無関係なことである．したがって，計量による相対不変量の不定性はフレ

アーサイクル

$$\sum_{\eta(a)=-1} \#\overline{\mathcal{M}}_-(M \times \mathbf{R}; 0, a) \cdot [a]$$

の定数倍である．一方

$$\left\langle \sum_{\eta(a)=-1} \#\overline{\mathcal{M}}_-(M \times \mathbf{R}; 0, a) \cdot [a], Q(X_2, [\Sigma_{2,1}], \cdots, [\Sigma_{2,d_2}]) \right\rangle = 0 \tag{4.8.11}$$

が証明できる．これにはモジュライ空間 $\mathcal{N}_-(X_2, \zeta_{k_2}, [\Sigma_{2,1}], \cdots, [\Sigma_{2,d_2}]; 0)$ を考えればよい．このモジュライ空間は 1 次元で（境界条件は次元が小さくなる方にとった.）その境界がちょうど (4.8.11) の左辺を与える．

すなわち，相対不変量の不定性は積をとると消えてしまう．証明はだいぶ端折ったがこれが前に述べた不思議な現象の種明かしである．

さて以上で大体フレアーホモロジーと相対ドナルドソン多項式についての議論は終わった．残っているのは，平坦束に対する条件 $H^1(M; Ad\ a) = 0$ が満たされていないときの摂動のしかた，およびフリードマン (Friedman)–モーガンによる$\overline{\mathbf{C}P^2}$ の和による安定化 (stabilization) である．

§ 4.9　フリードマン–モーガンの爆発公式

この節では $X\#\overline{\mathbf{C}P^2}$ 上のドナルドソン多項式および相対ドナルドソン多項式に対するフリードマン–モーガンの公式を証明する．これを示すことでドナルドソン多項式の定義についていた制限 $4k > 3(1+b_2^+)$ を取り除くことができる．

$b_2^+(X\#\overline{\mathbf{C}P^2}) = b_2^+(X)$ であるから，モジュライ空間の次元の等式 $\dim \mathcal{M}(X\#\overline{\mathbf{C}P^2}, \zeta_k) = \dim \mathcal{M}(X, \zeta_k)$ が成り立つ．$e = [\mathbf{C}P^1] \in H^2(\mathbf{C}P^2; \mathbf{Z})$ を生成元とする．このとき d, k を $2d = 8k - 3(1+b_2^+(X)) = \dim \mathcal{M}(X, \zeta_k)$ なるように選び，Σ_i $(i = 1, \cdots, d)$ を X に含まれる曲面とする．これに対するドナルドソン多項式が定義されるように，$b_2^+(X) > 1$, $d > 2k$ を仮定する．

定理 4.9.1（フリードマン–モーガン [FM1]**）**

$$Q(X\#\overline{\mathbf{C}P^2}, \zeta_{k+1}; [\Sigma_1], \cdots, [\Sigma_d], e, e, e, e) = -2Q(X, \zeta_k; [\Sigma_1], \cdots, [\Sigma_d])$$

同様のことが相対ドナルドソン不変量でも成立する．すなわち $\partial X = M$ はホモロジー球面とし，$1 < b_2^+(X_i)$, $3(1+b_2^+(X)) + 1 \leq 2d$ とする．このとき

定理 4.9.2

$$Q(X\#\overline{\mathbf{C}P^2}, \zeta_{k+1}; [\Sigma_1], \cdots, [\Sigma_d], e, e, e, e) = -2Q(X, \zeta_k; [\Sigma_1], \cdots, [\Sigma_d])$$

がフレアーホモロジー $HF_*(M)$ の元の間の等式として成り立つ．

定理 4.9.1，定理 4.9.2 を使うとドナルドソン多項式の定義を拡張することができる．すなわち

定義 4.9.3　X を単連結な閉 4 次元多様体で $b_2^+(X) > 1$ とする．$2d = 8k -$

$3(1+b_2^+(X))$ なる d, k と，$[\Sigma_i] \in H^2(X;\mathbf{Z})\,(i=1,\cdots,d)$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&Q(X,\zeta_k;[\Sigma_1],\cdots,[\Sigma_d]) \\
&= (-2)^{-\ell}Q(X\#\ell\overline{\mathbf{C}P^2},\zeta_{k-\ell};[\Sigma_1],\cdots,[\Sigma_d],e_1,e_1,e_1,e_1,\cdots,e_\ell,e_\ell,e_\ell,e_\ell)
\end{aligned}
$$

と定義する．ここで右辺の ℓ は $4\ell+d>2(k-\ell)$ となるように選び，e_i は連結和をとる ℓ 個の $\overline{\mathbf{C}P^2}$ のなかで i 番目のものに対応している $H^2(\overline{\mathbf{C}P^2};\mathbf{Z})$ の生成元とする．

同様に相対ドナルドソン多項式も

$$
\begin{aligned}
&Q(X,\zeta_k;[\Sigma_1],\cdots,[\Sigma_d]) \\
&= (-2)^{-\ell}Q(X\#\ell\overline{\mathbf{C}P^2},\zeta_{k-\ell};[\Sigma_1],\cdots,[\Sigma_d],e_1,e_1,e_1,e_1,\cdots,e_\ell,e_\ell,e_\ell,e_\ell) \\
&\in HF_k(\partial X,\mathbf{Z}[1/2])
\end{aligned}
$$

で一般の $b_2^+(X)>1$ で単連結かつ境界がホモロジー球面である 4 次元多様体 X に対して定義できる．

定義 4.9.3 の右辺が ℓ によらないことが定理 4.9.1，定理 4.9.2 の帰結である．ここで注意するのは定義 4.9.3 の右辺には分母があり，したがってこのように定義するとドナルドソン多項式は有理数（分母は 2 べきだけ）で整数かどうかはわからない．相対ドナルドソン多項式でもフレアーホモロジーは $\mathbf{Z}[1/2]$ 上で考えなければならない．しかし本当に $\mathbf{Z}$ 上では定義できないのかは筆者にはわからない．

定理 4.9.2 を使って相対ドナルドソン不変量を定義すると，定理 4.8.8 は仮定 $3(1+b_2^+(X_i)) \le 2d_i$ 抜きで成立する．(これが成り立つように両側で $\overline{\mathbf{C}P^2}$ との連結和をとってしまえばよい.）もう一度書いておくと

定理 4.9.4 $X = X_1 \cup_M X_2$, $b_2^+(X_i)>0$ とし X_i は単連結と仮定すると，

$$
\begin{aligned}
&Q(X,[\Sigma_{1,1}],\cdots,[\Sigma_{1,d_1}],[\Sigma_{2,1}],\cdots,[\Sigma_{2,d_2}]) \\
&\qquad = \langle Q(X_1,[\Sigma_{1,1}],\cdots,[\Sigma_{1,d_1}]),Q(X_2,[\Sigma_{2,1}],\cdots,[\Sigma_{2,d_2}])\rangle
\end{aligned}
$$

特に $M = S^3$ のときドナルドソンの消滅定理，$b_2^+(X_i) > 0$ ならば $Q(X_1 \# X_2) = 0$，が得られる．

フィントゥシェル (Fintsell)–スターン (Stern) は $\mathbf{Z}_2$ に値を持つコホモロジー類を用いてドナルドソン不変量の類似物を定義しこれに対しては消滅定理が正しくないことを見いだした（[FS5]）．この場合には定理 4.9.1 の類似物が知られていない（[FFO] も参照）．

さて定理 4.9.1，定理 4.9.2 の証明に入ろう．簡単のため定理 4.9.1 のみを証明する．まず $\overline{\mathbf{C}P^2}$ 上の ASD 接続のモジュライ空間 $\mathcal{M}(\overline{\mathbf{C}P^2}, \zeta_1)$ を考えよう．これは 5 次元の空間である．実は $\mathcal{M}(\overline{\mathbf{C}P^2}, \zeta_1)$ は（標準的な計量の場合）具体的に求められていて ([古田 4]) $\mathbf{C}P^2$ の錘になるが，これはここの目的では必要ない．$\mathcal{M}(\overline{\mathbf{C}P^2}, \zeta_1)$ に対して横断正則性の議論を使おうとすると，$b_2^+(\overline{\mathbf{C}P^2}) = 0$ が問題になる．すなわち $\overline{\mathbf{C}P^2}$ の場合には可約 ASD 接続がなくなるような摂動をとることができない．しかし可約接続がどれだけあるかは直ぐにわかる．すなわち $[u]^2 = -[\overline{\mathbf{C}P^2}]$ なるコホモロジー類 $[u] \in H^2(\overline{\mathbf{C}P^2}; \mathbf{Z})$ を考えればよい．実際 $b_2^+(\overline{\mathbf{C}P^2}) = 0$ により調和 2 型式に対して $* = -1$ であるから，そのような $[u]$ を調和 2 型式で実現すると，これは複素直線束の曲率型式になり，また ASD である．このようなコホモロジー類 $[u] \in H^2(\overline{\mathbf{C}P^2}; \mathbf{Z})$ は二つある．しかしこれは $\zeta_1 = L \oplus L^{-1}$ なる分解の $c^1(L)$ と $c^1(L^{-1})$ にあたっているから，分解はちょうど一つ，すなわち $\mathcal{M}(\overline{\mathbf{C}P^2}, \zeta_1)$ の元である可約 ASD 接続のゲージ同値類はちょうど一つである．したがって，$\mathcal{M}(\overline{\mathbf{C}P^2}, \zeta_1)$ にはただ一つの特異点 z_0 があり，z_0 の近傍は $\mathbf{C}P^2$ の錘の形である．このモジュライ空間をもう少しよくみてみるために，$\widehat{\mathcal{M}}(\overline{\mathbf{C}P^2}, \zeta_1)$（ゲージ変換群で同一視する前の，ASD 接続全体の集合）を $\mathcal{G}_0(\overline{\mathbf{C}P^2}, \zeta_1)$（固定した一点 p_0 で恒等写像であるゲージ変換全体）で割った空間 $\widetilde{\mathcal{M}}(\overline{\mathbf{C}P^2}, \zeta_1) = \widehat{\mathcal{M}}(\overline{\mathbf{C}P^2}, \zeta_1)/\mathcal{G}_0(\overline{\mathbf{C}P^2}, \zeta_1)$ を考えよう．これは 8 次元で特異点はない．この上には $SU(2) = \mathcal{G}(\overline{\mathbf{C}P^2}, \zeta_1)/\mathcal{G}_0(\overline{\mathbf{C}P^2}, \zeta_1)$ が作用している．($-1 \in SU(2)$ の作用は自明であるから，$SO(3) = SU(2)/\pm 1$ が作用していると思ってもよい．）この商空間が $\mathcal{M}(\overline{\mathbf{C}P^2}, \zeta_1) = \widetilde{\mathcal{M}}(\overline{\mathbf{C}P^2}, \zeta_1)/SO(3)$ である．

次に $\mathbf{C}P^1 \subseteq \overline{\mathbf{C}P^2}$ を考え，$\mathcal{B}_{*,+}(\mathbf{C}P^1)$ の上の直線束 $L_{\mathbf{C}P^1} \to \mathcal{B}_{*,+}(\mathbf{C}P^1)$

を考えよう．$\mathcal{M}(\overline{\mathbf{C}P^2},\zeta_1)-\{z_0\}$ からは，写像 $\mathrm{Res}:\mathcal{M}(\overline{\mathbf{C}P^2},\zeta_1)-\{z_0\}\to\mathcal{B}_{*,+}(\mathbf{C}P^1)$ が定まる．(ホントはもう少し正確に言わなければならない，§3.5 参照.）この写像 $L_{\mathbf{C}P^1}\to\mathcal{B}_{*,+}(\mathbf{C}P^1)$ での generic な切断 $u_i\,(i=1,\cdots,4)$ を引き戻す．こうして得られる切断を $u_i\mathrm{Res}:\mathcal{M}(\overline{\mathbf{C}P^2},\zeta_1)\to\mathrm{Res}^+L_{\mathbf{C}P^1}$ とする．簡単な次元の計算により $\bigcap_{i=1}^4(u_i\mathrm{Res})^{-1}(0)=\emptyset$ であるようにできることがわかる．

次に $\mathcal{M}(X,\zeta_k)$ の方を考えよう．$2d=8k-3(1+b_2^+(X))=\dim\mathcal{M}(X,\zeta_k)$ であったから $\mathcal{N}(X,\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d)$ は有限集合である．

さてこの二つをはり合わせよう．これには次のように考える．まず X および $\overline{\mathbf{C}P^2}$ から D^4 を除いて境界が S^3 の非コンパクト多様体にしよう．(面倒なので同じ記号で書く.）このときモジュライ空間 $\mathcal{M}_-(X,\zeta_k;0)$ を考えると，これは実は $\frac{\widehat{\mathcal{M}}(X,\zeta)}{\mathcal{G}_0(X,\zeta_k)}$ と同じである．(ここで $\mathcal{G}_0(X,\zeta_k)$ は決まった一点で恒等写像になるゲージ変換全体であった.）同様に $\widetilde{\mathcal{M}}(\overline{\mathbf{C}P^2},\zeta_1)$ も $\mathcal{M}_+(\overline{\mathbf{C}P^2},\zeta_1;0)$ とみなせる．したがって前の節で述べたようにはり合わせ写像 $Pat:\frac{\widetilde{\mathcal{M}}(X,\zeta_k)\times\widetilde{\mathcal{M}}(\overline{\mathbf{C}P^2},\zeta_1)}{SO(3)}\to\mathcal{M}(X,\zeta_{k+1})$ が存在する．

次に直線束の引き戻し $(\mathrm{Res}_{\Sigma_i})^*L_{\Sigma_i}$ と $(\mathrm{Res}_{\mathbf{C}P^1})^*L_{\mathbf{C}P^1}$ を考えよう．(これらはともに $\frac{\widetilde{\mathcal{M}}(X,\zeta_k)\times\widetilde{\mathcal{M}}(\overline{\mathbf{C}P^2},\zeta_1)}{SO(3)}$ 上の直線束とみなす.）$(\mathrm{Res}_{\Sigma_i})^*L_{\Sigma_i}$ は $\widetilde{\mathcal{M}}(X,\zeta_k)$ 上の $SO(3)$ 不変な直線束から商をとって得られたものとみなせる．このとき $\widetilde{\mathcal{M}}(X,\zeta_k)$ への $SO(3)$ の作用は不動点を持たないから，$(\mathrm{Res}_{\Sigma_i})^*L_{\Sigma_i}$ の切断として $SO(3)$ 不変かつ $\widetilde{\mathcal{M}}(X,\zeta_k)$ 成分のみによるものをとることができる．以下 s_i をそのような切断としよう．するとこれらの共通 0 点は $\frac{\widetilde{\mathcal{N}}(X,\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d)\times\widetilde{\mathcal{M}}(\overline{\mathbf{C}P^2},\zeta_1)}{SO(3)}$ と表せる．ここで $\widetilde{\mathcal{N}}(X,\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d)$ は $\mathcal{N}(X,\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d)$ の持ち上げで，空間としては有限個の $SO(3)$ の和である．

次に $(\mathrm{Res}_{\mathbf{C}P^1})^*L_{\mathbf{C}P^1}$ の方を考えよう．するとこれはやはり $\widetilde{\mathcal{M}}(\overline{\mathbf{C}P^2},\zeta_1)$ 上の $SO(3)$ 不変な直線束から誘導される．しかし $\widetilde{\mathcal{M}}(\overline{\mathbf{C}P^2},\zeta_1)$ 上の $SO(3)$ の作用には不動点があるから，generic な $\frac{\widetilde{\mathcal{N}}(X,\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d)\times\widetilde{\mathcal{M}}(\overline{\mathbf{C}P^2},\zeta_1)}{SO(3)}$ 上の切断を第 2 成分 $\widetilde{\mathcal{M}}(\overline{\mathbf{C}P^2},\zeta_1)$ にのみよるようにはとることはできない．

このことをもう少し考えてみよう．まず $\widetilde{\mathcal{M}}(\overline{\mathbf{C}P^2},\zeta_1)$ の可約接続は一つの $SO(3)$ 軌道を作りまたその等方部分群は $S^1\subseteq SO(3)$ である．したがって $\widetilde{\mathcal{M}}(\overline{\mathbf{C}P^2},\zeta_1)$ の可約接続全体は $S^2=SO(3)/S^1$ と同一視される．これの $SO(3)$

不変な小近傍をとり V とおく．$\widetilde{\mathcal{M}}(\overline{\mathbf{C}P^2},\zeta_1)-V$ 上の $SO(3)$ の作用には不動点がない．したがって $(\mathrm{Res}_{\mathbf{C}P^1})^*L_{\mathbf{C}P^1}$ の $\frac{\widetilde{\mathcal{M}}(X,\zeta_k)\times(\widetilde{\mathcal{M}}(\overline{\mathbf{C}P^2},\zeta_1)-V)}{SO(3)}$ への制限の generic な切断の4つの組を $\widetilde{\mathcal{M}}(X,\zeta_k)$ 成分によらないようにとることができる．これらの切断は $L_{\mathbf{C}P^1}\to\mathcal{B}_{*,+}(\mathbf{C}P^1)$ の generic な切断 $u_i\,(i=1,\cdots,4)$ を引き戻して得られたものと思ってよい．これを $v_i\,(i=1,\cdots,4)$ と書こう．すると前に述べたことから $\bigcap_{i=1}^4(v_i)^{-1}(0)$ は空集合である．(これは単なる次元の計算である.) したがって s_i および v_i （を $\frac{\widetilde{\mathcal{M}}(X,\zeta_k)\times V}{SO(3)}$ 上に拡張したもの）を使って $Q(X\#\mathbf{C}P^2,\zeta_{k+1};[\Sigma_1],\cdots,[\Sigma_d],e,e,e,e)$ を計算すると，数えるべき点はすべて $\frac{\widetilde{\mathcal{M}}(X,\zeta_k)\times V}{SO(3)}$ に含まれる．

あるいは次のように言ってもよい．$\frac{\widetilde{\mathcal{M}}(X,\zeta_k)\times V}{SO(3)}$ 上の $L_{\mathbf{C}P^1}\to\mathcal{B}_{*,+}(\mathbf{C}P^1)$ の引き戻しの generic な切断の4つの組 v_i をとり，それが $\frac{\widetilde{\mathcal{M}}(X,\zeta_k)\times V}{SO(3)}$ の境界の近傍で $\widetilde{\mathcal{M}}(X,\zeta_k)$ 成分によらないようにとれているとする．するとこれを $\frac{\widetilde{\mathcal{M}}(X,\zeta_k)\times V}{SO(3)}$ の外では $\widetilde{\mathcal{M}}(X,\zeta_k)$ 成分によらないようにしたままで拡張することができる．すると単純な次元の計算から，これらは $\frac{\widetilde{\mathcal{M}}(X,\zeta_k)\times V}{SO(3)}$ の外では共通0点を持たない．すなわち $Q(X\#\mathbf{C}P^2,\zeta_{k+1};[\Sigma_1],\cdots,[\Sigma_d],e,e,e,e)$ を計算するには $\frac{\widetilde{\mathcal{M}}(X,\zeta_k)\times V}{SO(3)}$ で考えてよい．ところで s_i の方の共通0点を考えるとこれは $\widetilde{\mathcal{M}}(X,\zeta_k)$ 成分で決まり，$\widetilde{\mathcal{N}}(X,\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d)=\mathcal{N}(X,\zeta_k,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_d)\times SO(3)$ である．この連結成分の（符号を込めた）数が $Q(X,\zeta_k;[\Sigma_1],\cdots,[\Sigma_d])$ であった．結局 $\frac{SO(3)\times V}{SO(3)}$ の generic な切断の4つの組 v_i で $\frac{SO(3)\times\partial V}{SO(3)}$ 上第2成分だけによるものを構成し，それらの共通0点の符号付きの位数を α とすると

$$Q(X\#\overline{\mathbf{C}P^2},\zeta_{k+1};[\Sigma_1],\cdots,[\Sigma_d],e,e,e,e)=\alpha Q(X,\zeta_k;[\Sigma_1],\cdots,[\Sigma_d])$$

がわかったことになる．したがって定理の証明にはこの α が -2 であることを示せばよいことになる．

α を求めるために，まず V の形を思い出してみよう．V は S^2 の8次元空間 $\widetilde{\mathcal{M}}(\overline{\mathbf{C}P^2},\zeta_1)$ での管状近傍であった．

補題 4.9.5　V は $SO(3)$ の作用も込めて $\frac{SO(3)\times\mathbf{C}^3}{S^1}$ に一致する．(ここで S^1 は絶対値1の複素数のかけ算として $\mathbf{C}^3$ に作用し，$SO(3)$ には右からのかけ算と

して作用する.）また $SO(3)$ の$\frac{SO(3)\times\mathbf{C}^3}{S^1}$ への作用は第 1 成分への左からのかけ算である.

証明 $\widetilde{\mathcal{M}}(X,\zeta_k)$ の可約接続 $[A_0]$ をとるとそこへの $SO(3)$ の作用の等方部分群は S^1 であった. これは S^2 $([A_0]\in S^2)$ の$\widetilde{\mathcal{M}}(X,\zeta_k)$ での法束に作用する. この作用を見るには AHS 複体への等方部分群 S^1 の作用を見ればよい. A_0 により $\zeta_1=\gamma\oplus\gamma^{-1}$ と分解する. このとき $Ad\,\zeta_1=\mathbf{R}\oplus\gamma^{\otimes 2}$ になる. これに伴い AHS 複体も分解する. このうち $\gamma^{\otimes 2}$ に対応する H^1 が法束 (normal bundle) にあたる. S^1 の $\gamma^{\otimes 2}$ のファイバーへの作用は $\mathbf{C}$ への複素数のかけ算とみなせる. これは§1.3 で見たがもう一度念のために述べておくと次のとおり.

$SU(2)$ は $SO(3)$ の 2 重被覆だが $SO(3)=SU(2)/\pm 1$ の ± 1 は $SU(2)$ の中心でしたがって共役表現 $SU(2)\to Aut(su(2))$ は $SO(3)\to Aut(su(2))$ なる表現を導く. これは $SO(3)$ の 3 次表現だが実は一番普通の 3×3 行列としての表現に他ならない（このことは§1.3 参照）. したがって, 等方部分群 S^1 の作用は $SO(3)$ の行列としての表現の制限でこう見たとき $su(2)=\mathbf{R}\oplus\mathbf{C}$.

よって法束の $[A_0]$ でのファイバーは S^1 の作用を込めて $\mathbf{C}^3$ である. 一方 $SO(3)$ で法束の $[A_0]$ でのファイバーを移すと V 全体になる. したがって $SO(3)\times\mathbf{C}^3\to V$ なる $SO(3)$ 不変な全射が得られる. これから補題は直ちにわかる.

さてこの上の直線束 $(\mathrm{Res}_{\mathbf{C}P^1})^*L_{\mathbf{C}P^1}$ を考えよう.

補題 4.9.6 $(\mathrm{Res}_{\mathbf{C}P^1})^*L_{\mathbf{C}P^1}$ は V 上$\frac{SO(3)\times\mathbf{C}^3\times\mathbf{C}}{S^1}\to\frac{SO(3)\times\mathbf{C}^3}{S^1}$ と $SO(3)$ の作用も込めて同型である.

証明 $\widetilde{\mathcal{M}}(X,\zeta_k)$ の可約接続 $[A_0]$ をとる. これにより $\zeta_1=\gamma\oplus\gamma^{-1}$ と分解する. A_0 の γ への制限を A_1 とし, γ^{-1} への制限を A_2 とする. さて $(\mathrm{Res}_{\mathbf{C}P^1})^*L_{\mathbf{C}P^1}$ のこの可約接続に対応する点の上での様子を調べるには, $\overline{\partial}_{A_1}:\Gamma(\mathbf{C}P^1;\gamma)\to\Gamma(\mathbf{C}P^1;\gamma\otimes\Lambda^{0,1})$, $\overline{\partial}_{A_2}:\Gamma(\mathbf{C}P^1;\gamma^{-1})\to\Gamma(\mathbf{C}P^1;\gamma^{-1}\otimes\Lambda^{0,1})$ の指数を調べる必要がある. $c^1(\gamma|_{\mathbf{C}P^1})=-1$ よりこれは次のようにわかる.

補助補題 4.9.7

$$\mathrm{Ker}\ (\overline{\partial}_{A_1} : \Gamma(\mathbf{C}P^1;\gamma) \to \Gamma(\mathbf{C}P^1;\gamma\otimes\Lambda^{0,1})) \cong \mathbf{C}^2$$
$$\mathrm{CoKer}\ (\overline{\partial}_{A_1} : \Gamma(\mathbf{C}P^1;\gamma) \to \Gamma(\mathbf{C}P^1;\gamma\otimes\Lambda^{0,1})) \cong 0$$
$$\mathrm{Ker}\ (\overline{\partial}_{A_2} : \Gamma(\mathbf{C}P^1;\gamma^{-1}) \to \Gamma(\mathbf{C}P^1;\gamma^{-1}\otimes\Lambda^{0,1})) \cong 0$$
$$\mathrm{CoKer}\ (\overline{\partial}_{A_2} : \Gamma(\mathbf{C}P^1;\gamma^{-1}) \to \Gamma(\mathbf{C}P^1;\gamma^{-1}\otimes\Lambda^{0,1})) \cong 0$$

ここで $\mathbf{C}^2$ は $S^1 \subseteq SU(2)$ の $S^1 \cong U(1)$ としての表現である．証明は省略する．($\mathbf{C}P^1$ 上の標準束のコホモロジーの計算であり多くの教科書で述べられている.) ここで注意を要するのは $S^1 \subseteq SU(2)$ は今考えている $S^1 \subseteq SO(3)$ の2重被覆であることで，したがって $S^1 \subseteq SO(3)$ は補題 4.9.7 の空間には作用しない．しかし $\det\mathrm{Index}(\overline{\partial}_{A_0}) = \det\mathrm{Index}(\overline{\partial}_{A_1}) \otimes \det\mathrm{Index}(\overline{\partial}_{A_2}) \cong \mathbf{C}$ を考えると，ここには $S^1 \subseteq SU(2)$ は $z \mapsto z^2$ で作用する．したがってこの作用は $S^1 \subseteq SO(3)$ の作用を導く．(これは $\mu[\Sigma]$ の定義のところ (§2.3) で見た閉曲面上のコーシー–リーマン (Riemann) 複体の指数が偶数であることから等方部分群 $\{\pm 1\}$ があるにもかかわらず $\det\mathrm{Index}(\overline{\partial}_{A|_\Sigma})$ が定義できることの具体例である.)

この $S^1 \subseteq SO(3)$ の $\det\mathrm{Index}(\overline{\partial}_{A_0}) = \det\mathrm{Index}(\overline{\partial}_{A_1}) \otimes \det\mathrm{Index}(\overline{\partial}_{A_2}) \cong \mathbf{C}$ への作用は $z \mapsto z$ つまり絶対値1の複素数の普通のかけ算である．

さてここで $S^2 \subseteq V$ の法束の $[A_0]$ でのファイバー $\mathbf{C}^3$ を考えよう．この上への $(\mathrm{Res}_{\mathbf{C}P^1})^* L_{\mathbf{C}P^1}$ の制限も考えると，これは以上の考察により $\mathbf{C}^3 \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ と $S^1 \subseteq SO(3)$ の作用も込めて同型である．このことと補題 4.9.5 の証明より補題 4.9.6 は直ちに得られる．　証明終わり

さて $\frac{SO(3)\times\mathbf{C}^3\times\mathbf{C}}{S^1} \to \frac{SO(3)\times\mathbf{C}^3}{S^1}$ の切断 v_i を構成しよう．$\mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}$ なる4つの互いに一般の位置にある $\mathbf{C}$ 線形写像 $\varphi_1,\cdots,\varphi_4$ をとる．とりあえず $v_i'([g,x]) = [g,x,\varphi_i(x)]$ とおいてみよう．$\varphi_1,\cdots,\varphi_4$ が $\mathbf{C}$ 線形だから $(g,x) \mapsto (g,x,\varphi_i(x))$ は S^1 不変で，したがって $\frac{SO(3)\times\mathbf{C}^3\times\mathbf{C}}{S^1} \to \frac{SO(3)\times\mathbf{C}^3}{S^1}$ の切断 v_i が得られる．すると $\bigcap_{i=1}^4 {v_i}^{-1}(0) = \frac{SO(3)\times\{(0,0,0)\}}{S^1} = S^2$ である．これは2次元であり

$8-4\times 2=0$ より大きい．これは当然である．つまり v_i' は $SO(3)$ 成分にはよらないようにとったが generic な切断はそうはとれない．

そこで v_i' を $\frac{SO(3)\times\{(0,0,0)\}}{S^1}=S^2$ の近傍で取り換えよう．これには次のようにする．まず直線束 $\frac{SO(3)\times\mathbf{C}^3\times\mathbf{C}}{S^1}\to\frac{SO(3)\times\mathbf{C}^3}{S^1}$ を $\frac{SO(3)\times\{(0,0,0)\}}{S^1}=S^2$ に制限する．これは 2 次元多様体上の複素直線束であるから，その第 1 チャーン類は $H^2(S^2;\mathbf{Z})$ の元つまり数と思える．この場合その数は -2 である．(証明省略．易しいので読者に任せる.) したがって切断でその 0 点の符号付きの数が -2 であるものが存在する．この切断は $SO(3)\to\mathbf{C}$ なる S^1 不変な写像を導く．これを w とおく．これを使って v_i' を変えよう．$\chi:[0,\infty)\to[0,1]$ を 0 の近傍で 1，コンパクト集合の外で 0 である C^∞ 級関数とする．

$$v_i([g,x])=[g,x,\varphi_i(x)+\varepsilon\chi(|x|)w(g)]$$

とおこう．すると

$$\bigcap_{i=1}^{4}{v_i}^{-1}(0)=\{[g,x]\mid x=0,w(g)=0\}$$

よって，w の取り方よりこの数は (符号も込めて) -2 である．これで定理 4.9.1 の証明は完成した．

§4.10 相対ドナルドソン多項式のまとめ

さて前節までで，相対ドナルドソン多項式の定義と和公式について必要なことはほぼ全て述べた．残されたのは，既約平坦接続で $H^1(M; Ad\ a) \neq 0$ なるものが存在する場合の扱いと，非コンパクトな空間上の ASD 接続の空間の向き付け，そしてフレアーホモロジーおよび相対ドナルドソン多項式が 3 次元多様体上の計量および摂動によらないことの証明である．

第一点から始めよう．この場合にはやはり摂動をとればよい．しかし直積 $M \times \mathbf{R}$ 上で摂動を行う場合 $\mathbf{R}$ の作用（第 2 成分のずらし）を保った摂動をとらなければならないので§3.4 で考えたコンパクト集合上に台をもつ摂動そのものは都合が悪い．ここでは次のようにする．

3 次元多様体 M を考えその上に十分多くの閉曲線 $\ell_i\ (i = 1, \cdots, K)$ をとろう．これらは同一の基点 $p_0 \in M$ を通るとする．これらに§3.4 と同様に厚みをつけ，そのホロノミーを使って写像 $I : \mathcal{B}(M, \zeta) \to \frac{SU(2)^K}{SU(2)}$ を定めよう．(§3.4 ではこれを 4 次元多様体上で行ったがここでは 3 次元多様体上で行っている.)

この写像に対して補題 3.4.4 がやはり成立する．

次に $C^{\vec{\beta}}\left(\frac{SU(2)^K}{SU(2)}\right)$ なる§3.4 で使った関数空間を考えよう．この空間の任意の元 f に対して合成 $f \circ I : \mathcal{B}(M, \zeta) \to \mathbf{R}$ をとる．これは C^∞ 級写像である．

補題 4.10.1　M をホモロジー 3 球面とすると，ほとんど全ての $f \in C^{\vec{\beta}}\left(\frac{SU(2)^K}{SU(2)}\right)$ に対して $cs+f\circ I$ はモース関数である．すなわち $\mathrm{grad}_{[a]}(cs+f\circ I) = 0$ なる $[a] \in \mathcal{B}(M, \zeta)$ の集合は有限集合で，それらに対してヘッセ行列 $\mathrm{Hess}_{[a]}(cs + f\circ I) = 0$ は可逆である．

§4.2 で述べたように $\mathrm{Hess}_{[a]}(cs) = \mathcal{D}_a$ であった．一方 $f \circ I : \mathcal{B}(M, \zeta) \to \mathbf{R}$ の定義では積分を使って平均をしていることを考えると，$\mathrm{Hess}_{[a]}(f \circ I) : \Gamma(M; Ad\ a \otimes (\Lambda^0 \oplus \Lambda^1)) \to \Gamma(M; Ad\ a \otimes (\Lambda^0 \oplus \Lambda^1))$ はコンパクト作用素になる．補題が主張するのはこの二つの和が generic には可逆であることである．

証明のあらましを述べよう．§3.4 のように無限次元の横断正則性定理を使っ

て一般にやってもよいのだが，様子が見やすいようにここでは直接証明をしてみよう．まず $[a] \in \mathcal{B}(M,\zeta)$ を既約平坦接続とする．$H^1(M;Ad\ a) = 0$ ならこの近傍では $\mathrm{Hess}_{[a]}(cs) = \mathcal{D}_a$ が可逆であるからよい．$H^1(M;Ad\ a) \neq 0$ としよう．すると

$$\mathcal{D}_{[a]} : \Gamma(M;Ad\ a \otimes (\Lambda^0 \oplus \Lambda^1)) \to \Gamma(M;Ad\ a \otimes (\Lambda^0 \oplus \Lambda^1))$$

は可逆でなく，その核および余核は $H^1(M;Ad\ a)$ に一致する．特に有限次元である．

そこで $\mathrm{Hess}_{[a]}(f \circ I) : \Gamma(M;Ad\ a \otimes (\Lambda^0 \oplus \Lambda^1)) \to \Gamma(M;Ad\ a \otimes (\Lambda^0 \oplus \Lambda^1))$ を考えよう．これは十分多くの閉曲線をとりまた f を適当にとることで有限次元ぶんはどうでも好きなようにとれる．もう少し正確に言うと，まず $L^2(M;Ad\ a \otimes (\Lambda^0 \oplus \Lambda^1)) = H^1(M;Ad\ a) \oplus H$ と直交直和分解する．すると任意の $A : L^2(M;Ad\ a \otimes (\Lambda^0 \oplus \Lambda^1)) \to L^2(M;Ad\ a \otimes (\Lambda^0 \oplus \Lambda^1))$ は $\overline{A} : H^1(M;Ad\ a) \to H^1(M;Ad\ a)$ を導く.（すなわち $H^1(M;Ad\ a)$ を調和型式の作る部分線形空間とみなして合成 $H^1(M;Ad\ a) \subseteq L^2(M;Ad\ a \otimes (\Lambda^0 \oplus \Lambda^1)) \xrightarrow{A} L^2(M;Ad\ a \otimes (\Lambda^0 \oplus \Lambda^1)) \xrightarrow{\mathrm{proj}} H^1(M;Ad\ a)$ を $\overline{A}$ とおく.）

$\overline{\mathrm{Hess}_{[a]}(f \circ I)} : H^1(M;Ad\ a) \to H^1(M;Ad\ a)$ が可逆であれば，$\mathcal{D}_{[a]} + \varepsilon\mathrm{Hess}_{[a]}(f \circ I)$ は十分小さい ε に対して可逆である．ところが I の微分を $H^1(M;Ad\ a) \subseteq T_{[a]}\mathcal{B}(M,\zeta)$ 上単射であるようにとっておけば $\overline{\mathrm{Hess}_{[a]}(f \circ I)}$ が可逆であるような f が存在する．この f をとり εf を考えれば補題の主張が満たされる．なぜなら分解 $L^2(M;Ad\ a \otimes (\Lambda^0 \oplus \Lambda^1)) = H^1(M;Ad\ a)^{\perp} \oplus H^1(M;Ad\ a)$ により

$$\mathcal{D}_{[a]} + \varepsilon\mathrm{Hess}_{[a]}(f \circ I) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{[a]} & \varepsilon * \\ \varepsilon * & \overline{\varepsilon\mathrm{Hess}_{[a]}(f \circ I)} \end{pmatrix}$$

と表されるから．そこで以下 $cs + f \circ I$ を cs のかわりに考える.（εf のことを f と書き直した.）考える方程式は

$$\frac{da}{dt} = -\mathrm{grad}_{[a]}(cs + f \circ I)$$

である．この方程式は ASD 方程式ではないが，その違いはコンパクト作用素であるから前節までに述べたことはそのまま通用する．また $R(M)$ を $\mathrm{grad}_{[a]}(cs+$

$f \circ I) = 0$ なる $[a] \in \mathcal{B}(M,\zeta)$ 全体の集合とする．$\widetilde{R}(M)$ も同様に定義する．

もう一点，摂動を必要とする箇所がある．$[a],[b] \in \widetilde{R}(M)$ に対して

$$\mathcal{M}([a],[b]) = \left\{ [a_t] \;\middle|\; \begin{array}{l} \dfrac{da_t}{dt} = -\mathrm{grad}_{[a]}(cs + f \circ I) \\ \lim\limits_{t\to-\infty} a_t = a \\ \lim\limits_{t\to+\infty} a_t = b \end{array} \right\}$$

とおいたわけだが，これが $\eta(a) - \eta(b)$ 次元の多様体になることを示すためには，横断正則性の議論が必要だった．つまり AHS 複体の第 2 コホモロジーが 0 でなければならなかった．これは有限次元のアナロジーでは $cs + f \circ I$ の安定多様体と不安定多様体が横断的に交わることにあたる．これは $cs + f \circ I$ がモース関数であるというよりもう少し強い条件である．

このことも f, I をうまくとることにより満たされるようにできる．つまり

補題 4.10.2　generic な f に対して $\mathcal{M}([a],[b])$ は$\eta(a) - \eta(b)$ 次元の多様体である．

証明のあらまし　$[a_t] \in \mathcal{M}([a],[b])$ とすると，これの AHS 複体は

$$-\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{D}_{a_t} + \mathrm{Hess}_{a_t}(f \circ I)$$

なる微分作用素である．$\mathcal{D}_a + \mathrm{Hess}_a(f \circ I)$ および $\mathcal{D}_b + \mathrm{Hess}_b(f \circ I)$ は可逆であったから$-\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{D}_{a_t} + \mathrm{Hess}_{a_t}(f \circ I)$ は

$$L^2_1(M \times \mathbf{R}; Ad\,\zeta \otimes (\Lambda^0(M) \oplus \Lambda^1(M))) \to L^2(M \times \mathbf{R}; Ad\,\zeta \otimes (\Lambda^0(M) \oplus \Lambda^1(M)))$$

なる（非有界）作用素としてフレドホルム作用素である．この指数が $\eta(a) - \eta(b)$ であった．(これが $\eta(a)$ の定義そのものである.) 指数は正としてよい．このとき作用素の余核が 0 であることを示さなければならない．

$$\mathrm{Ker}\left(-\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{D}_{a_t} + \mathrm{Hess}_{a_t}(f \circ I)\right) = H_1$$
$$\mathrm{CoKer}\left(-\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{D}_{a_t} + \mathrm{Hess}_{a_t}(f \circ I)\right) = H_2$$

とおこう．$g \in C^{\vec{\beta}}\left(\frac{SU(2)^K}{SU(2)}\right)$ を次の条件が満たされるようにとる．

(4.10.1.1) $$g(I(a_t)) = 0 \text{ が任意の } t \text{ で成立.}$$

(4.10.1.2) $$\begin{aligned}\mathrm{Hess}_{[a_t]}(g \circ I) : \Gamma(M \times \mathbf{R}; Ad\,\zeta \otimes (\Lambda^0(M) \oplus \Lambda^1(M))) \\ \to \Gamma(M \times \mathbf{R}; Ad\,\zeta \otimes (\Lambda^0(M) \oplus \Lambda^1(M)))\end{aligned}$$

から導かれる，$\overline{\mathrm{Hess}_{[a_t]}(g \circ I)} : H_1 \to H_2$ は全射である．

このような $g \in C^{\vec{\beta}}\left(\frac{SU(2)^K}{SU(2)}\right)$ がとれることの証明は省略する．補題 3.4.2 の 3 次元版が成り立つことがその理由である．したがって $-\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{D}_{a_t} + \mathrm{Hess}_{a_t}((f+\varepsilon g)\circ I)$ が十分小さい ε に対して全射になる．これで $\mathcal{M}([a],[b])$ は $[a_t] \in \mathcal{M}([a],[b])$ の近傍では多様体になることがわかる．

この構成を $\mathcal{M}([a],[b])$ の各点で行う．このとき方程式の楕円性を用いると（摂動する前の）$\mathcal{M}([a],[b])$ がパラコンパクト有限次元であることがわかるから，可算個の点で行えば十分である．これから補題は証明される．

以上でフレアーホモロジーの定義に必要な摂動についての議論はすんだ．次に相対不変量であるが，これは次のようにする．$X - K = M \times (0,\infty)$ とする．M 上のフレアーホモロジーを定義するのに，$I : \mathcal{B}(M;\zeta) \to \frac{SU(2)^K}{SU(2)}$，$f \in C^{\vec{\beta}}\left(\frac{SU(2)^K}{SU(2)}\right)$ を使って摂動を行っているとする．このとき $[a] \in \widetilde{R}(M)$ に対してモジュライ空間 $\mathcal{M}(X,\zeta_k;a)$ を構成しなければならない．このモジュライ空間は ASD 方程式を $X - K = M \times (0,\infty)$ で M 上の摂動と適合するように摂動して構成する．これには次のようにする．$\chi : (0,\infty) \to [0,1]$ を 0 の近傍では 0，コンパクト集合の外では 1 であるような C^∞ 級関数とする．これを使って X 上の接続 A に対する次の方程式を考える．ここで A は $X - K = M \times (0,\infty)$ では同時刻ゲージをとっているとする．すなわちそこでは $A = a_t$ と表せるとする．

(4.10.2) $$\begin{cases} F_A = -*_X F_A & \text{on } K \\ \dfrac{da_t}{dt} = *_M F_{a_t} + \chi(t)\mathrm{grad}_{a_t} f & \text{on } X - K \end{cases}$$

第2式の第2項は $t=0$ の近傍で0であるからこの二つの方程式は $t=0$ の近傍で整合的である．また第2式は t が十分大きいとき $\frac{da_t}{dt} = *_M F_{a_t} + \chi(t)\mathrm{grad}_{a_t} f$ になり，これは M 上でフレアーホモロジーを考えるのに使った方程式と一致する．したがってモジュライ空間 $\mathcal{M}(X, \zeta_k; a)$ は (4.10.2) の解を $t \to \infty$ で $a_t \to a$（指数オーダーで）なる境界条件で考え，ゲージ変換群で割ったものとして定義できる．

こう定義すると相対ドナルドソン不変量が定義できる．そのための諸定理の証明は M で摂動がいらなかった場合の証明（これはすでにすんでいる）と同様である．

最後に和公式を考える．$X_i\,(i=1,2)$ で (4.10.2) のように摂動した方程式をとる．この解のモジュライ空間に対してはり合わせを行うと $X(T)$（$X_i\,(i=1,2)$ をはり合わせた空間）上の方程式

$$
(4.10.3)\quad \begin{cases} F_A = -*_X F_A & \text{on } X(T) - M \times [-T, T] \\ \dfrac{da_t}{dt} = *_M F_{a_t} + \chi(t)\mathrm{grad}_{a_t} f & \text{on } M \times [-T, T] \end{cases}
$$

の解のモジュライ空間になる．ここで $\chi : [-T, T] \to [0, 1]$ で，これは両側 $\pm T$ で0真ん中の辺で1である C^∞ 級関数である．

したがって ASD 方程式のかわりに (4.10.3) を使っても同じドナルドソン多項式が得られることを証明すれば和公式が示される．これはドナルドソン多項式が摂動によらないことの証明と全く同じである．

以上で3次元多様体上の摂動についての議論は終わった．

次に向き付けについて論じよう．閉多様体の場合の向き付けについては，すでに（結論だけは）論じた．すなわち閉4次元多様体 X に対して，$H^0(X;\mathbf{R})^* \oplus H^2_+(X;\mathbf{R})^* \oplus H^1(X;\mathbf{R})$ の向き付けを与えると，これに対応してモジュライ空間 $\mathcal{M}(X, \zeta_k)$ の向きが決まるのであった．ここでは $\mathcal{M}(M \times \mathbf{R}; a, b)$ および X が境界 M を持つ場合の $\mathcal{M}(X, \zeta_k; a)$ の向きを構成しなければならない．後者から始めよう．

$\mathcal{B}(X, \zeta_k; a)$ の任意のコンパクト部分集合を $\mathcal{K}$ とする．$\mathcal{B}(X, \zeta_k; a)$ 上には AHS 複体から決まる元 $det(AHS_{(X,a)}) \in KO(\mathcal{B}(X, \zeta_k; a))$ があった．X と

$-X$ を M に沿ってはり合わせた多様体を XII と書こう．写像 $Pat_0 : \mathcal{K}\times\mathcal{K} \to \mathcal{B}(XII,\zeta_{2k})$ が（単純な 1 の分解で）構成できる．$\mathcal{B}(XII,\zeta_{2k})$ 上にも同様な元 $det(AHS_{XII}) \in KO(\mathcal{B}(XII,\zeta_{2k};a))$ が存在する．そして $w^1(det(AHS_{XII})) = 0 \in H^1(\mathcal{B}(XII,\zeta_{2k};a),\mathbf{Z}_2)$ である．

一方で§4.7 の定理 4.7.6 を族の指数に対するものに一般化することにより（たとえば [深谷 1] §4 参照）$Pat_0{}^*(det(AHS_{XII})) = det(AHS_{(X,a)}) \otimes det(AHS_{(X,a)}) \in KO(\mathcal{K}\times\mathcal{K})$ が成り立つ．したがってキュネス (Künneth) の公式より $w^1(det(AHS_{(X,a)})) = 0$．これで $\mathcal{B}(X,\zeta_k;a)$ に向きが入ることはわかった．同様に $w^1(det(AHS_{(M\times\mathbf{R};a,b)})) = 0$ もわかる．$M\times\mathbf{R}$ を二つはり $M\times S^1$ にして考えればよい．

さてこうやって入ることはわかった向きを，どうやって標準的に定義するかを考えよう．まず $\mathcal{M}(M\times\mathbf{R};0,a)$ の向きは $w^1(det(AHS_{(M\times\mathbf{R};0,a)})) = 0$ から 2 通りのどちらかである．これは選んでおく．

この不定性がいやなら次のように考えてもいい．フレアーホモロジーを定義するウィッテン複体の生成元は $R(M)$ の元としたが，それはやめて $[a] \in R(M)$ と $\mathcal{M}(M\times\mathbf{R};0,a)$ の向き ε の組とする．そうして $-([a],\varepsilon) = ([a],-\varepsilon)$ なる関係式を入れる．どちらでも同じことである．

ただし選ぶとき注意するのは $\mathbf{Z} = \pi_1(\mathcal{B}(M;\zeta))$ との関係である．これは次のようにする．ある点にバブルをつけ加えることで $\mathcal{B}(M\times\mathbf{R};0,a) \to \mathcal{B}(M\times\mathbf{R};0,1\cdot a)$ なる写像が定義される．(ここで 1 は $\mathbf{Z} = \pi_1(\mathcal{B}(M;\zeta))$ の生成元)．これを使って $\mathcal{M}(S^4,\zeta_1)$ の向きを選んでおけば，$\mathcal{B}(M\times\mathbf{R};0,1\cdot a)$ の向きから $\mathcal{B}(M\times\mathbf{R};0,a)$ の向きが決まる（[D4] 参照）．この決め方について整合的であるように選ぶ．

それでとにかく $\mathcal{M}(M\times\mathbf{R};0,a)$ には向きが決まった．次に $\mathcal{M}(M\times\mathbf{R};a,b)$ の向きを考えよう．これは 2 通りのどちらかである．これを固定するには $\mathcal{B}(M\times\mathbf{R};a,b)$ のコンパクト部分集合 $\mathcal{K}_1$ と $\mathcal{B}(M\times\mathbf{R};0,a)$ のコンパクト部分集合 $\mathcal{K}_2$ を考え，写像 $Pat_0 : \mathcal{K}_2\times\mathcal{K}_1 \to \mathcal{B}(M\times\mathbf{R};0,b)$ を考えよう．すると再び定理 4.7.6 の族の指数への一般化より $Pat_0{}^*(det(AHS_{(M\times\mathbf{R};0,b)})) = det(AHS_{(M\times\mathbf{R};a,b)}) \otimes det(AHS_{(M\times\mathbf{R};0,a)}) \in KO(\mathcal{K}_2\times\mathcal{K}_1)$ である．この式の三つの登場人物のうちで二つに対してはもう向きが定まっていた．したがって

三番目つまり $det(AHS_{(M\times\mathbf{R};a,b)})$ の向きはこれから定まる．

次に $\mathcal{M}(X,\zeta_k;a)$ の向きに戻ろう．まず $\mathcal{B}(X,\zeta_0;0)$ の AHS 複体の向きは (閉多様体のときと同じように) $H^0(X;\mathbf{R})^*\oplus H^2_+(X;\mathbf{R})^*\oplus H^1(X;\mathbf{R})$ の向きから標準的に決まる．するとやはり閉多様体のときと同じように議論して $\mathcal{M}(X,\zeta_k;0)$ の向きも決まる．するとこの向きと $\mathcal{M}(M\times\mathbf{R};0,a)$ の向きを使ってはり合わせをすれば $\mathcal{M}(X,\zeta_k;a)$ の向きが決まる．

$\mathcal{M}(M\times\mathbf{R};0,a)$ の向きとバブルとの関係が整合的になるように選んでおいたから上の定義には矛盾がない．

さてこのように向きを選ぶとこれがはり合わせ写像と整合的であることは定義より明らかである．これで向きについての議論が終わった．

最後に3次元多様体 M 上の計量および摂動の取り換えでフレアーホモロジーおよび相対ドナルドソン不変量が不変であることを示そう．摂動を書くと方程式が長くなるから摂動がいらない場合，$H^2(M;Ad\ a)$ が0になる場合，だけを扱い，計量についての不変性だけを示す．摂動についても議論は同じである．

さて M 上に二つの計量 g,g' があるとしよう．これをつなぐ計量を $M\times\mathbf{R}$ 上に構成する．すなわち g_t を，十分小さい t に対して $g_t=g$，十分大きい t に対して $g_t=g'$ であるような M 上の計量の族とする．これを使って $M\times\mathbf{R}$ 上の計量 $dt^2\oplus g_t$ を構成する．$[a],[b]\in\widetilde{R}(M)$ に対して計量 $dt^2\oplus g_t$ についての ASD 接続で $[a],[b]\in\widetilde{R}(M)$ を境界値に持つもののゲージ同値類全体を $\mathcal{M}(M\times\mathbf{R},dt^2\oplus g_t;[a],[b])$ とおこう．(この空間には $\mathbf{R}$ は作用しない．計量が $\mathbf{R}$ 不変でないからである.) もし必要なら $M\times\mathbf{R}$ のコンパクト部分集合上で摂動を加える．これによって次のことが示せる．

補題 4.10.3　$\mathcal{M}(M\times\mathbf{R},dt^2\oplus g_t;[a],[b])$ は$\eta(a)-\eta(b)$ 次元の多様体である．

このコンパクト化については

補題 4.10.4　$\eta(a)-\eta(b)=0$ のとき $\mathcal{M}(M\times\mathbf{R},dt^2\oplus g_t;[a],[b])$ は有限集合である．$\eta(a)-\eta(b)=1$ のとき1次元多様体 $\mathcal{M}(M\times\mathbf{R},dt^2\oplus g_t;[a],[b])$ はコ

ンパクト化 $\mathcal{CM}(M \times \mathbf{R}, dt^2 \oplus g_t; [a], [b])$ をもちその境界は，

$$\bigcup_{\substack{[c] \\ \eta(c)=\eta(a)}} \mathcal{M}(M \times \mathbf{R}, dt^2 \oplus g; [a], [c]) \times \mathcal{M}(M \times \mathbf{R}, dt^2 \oplus g_t; [c], [b])$$
$$\cup \bigcup_{\substack{[c] \\ \eta(c)=\eta(b)}} \mathcal{M}(M \times \mathbf{R}, dt^2 \oplus g_t; [a], [c]) \times \mathcal{M}(M \times \mathbf{R}, dt^2 \oplus g'; [c], [b])$$

に一致する．

補題のそれぞれの直積因子のモジュライ空間に使われる計量に注意して欲しい．

補題の証明は今まで述べた様々な補題とほぼ同じであるから，粗く述べる．$\mathcal{M}(M \times \mathbf{R}, dt^2 \oplus g_t; [a], [b])$ の境界はいずれも群島が二つの場合にあたる．

第 1 項 $\mathcal{M}(M \times \mathbf{R}, dt^2 \oplus g; [a], [c]) \times \mathcal{M}(M \times \mathbf{R}, dt^2 \oplus g_t; [c], [b])$ に対応するエンドの元は，一つの群島が t が非常に小さい方にあり，もう一つの群島が t が有界なところにある場合である．またこのとき二つの群島の間にある海に対応する平坦接続が c である．

第 2 項 $\mathcal{M}(M \times \mathbf{R}, dt^2 \oplus g_t; [a], [c]) \times \mathcal{M}(M \times \mathbf{R}, dt^2 \oplus g'; [c], [b])$ に対応するのは，一つの群島が t が有界なところ，もう一つの群島が t が非常に大きいところにある場合である．二つの群島の間にある海に対応する平坦接続はやはり c である．

一つの群島が t が非常に小さい方にあり，もう一つの群島が t が非常に大きいところにある場合はなぜないのだろうか．これは読者への演習問題とする（それほど難しくない）．

補題を使って，$I_{g_t} : CF(M, g) \to CF(M, g')$ を

$$I_{g_t}([a]) = \sum_{\eta(b)=\eta(a)} \#\mathcal{M}(M \times \mathbf{R}, dt^2 \oplus g_t; [a], [b]) \cdot [b]$$

と定義する．これがチェイン写像であることが補題 4.10.4 の $\eta(a) - \eta(b) = 1$

の場合の帰結である．すなわちこれから

$$\begin{aligned}&\sum_{\eta(c)=\eta(a)} \#\mathcal{M}(M\times\mathbf{R}, dt^2\oplus g;[a],[c])\times\#\mathcal{M}(M\times\mathbf{R}, dt^2\oplus g_t;[c],[b])\\&=\sum_{\eta(c)=\eta(b)} \#\mathcal{M}(M\times\mathbf{R}, dt^2\oplus g_t;[a],[c])\times\#\mathcal{M}(M\times\mathbf{R}, dt^2\oplus g';[c],[b])\end{aligned}$$

が示され，これを書き直すと $I_{g_t}\partial_{(M,g)}=\partial_{(M,g')}I_{g_t}$ である．これでチェイン写像が定義された．

次にこれがホモロジー群に同型を導くことを示そう．まず g_t を g と g' を結ぶ計量の族，g'_t を g' と g'' を結ぶ計量の族とする．この合成族 $g_t\#g'_t$ をこの二つのつなぎ合わせで定義する．すなわち十分大きい T をとり，

$$(g_t\#g'_t)_t=\begin{cases} g_{t+2T} & t<-T\\ g'_{t-2T} & t>+T\\ g' & t\in[-T,T]\end{cases}$$

で定める．これは g と g'' を結ぶ計量の族である．

補題 4.10.5　$I_{g_t\#g'_t}=I_{g'_t}\circ I_{g_t}$

これはモジュライ空間の一致すなわち $\eta(a)-\eta(b)=0$ のときの

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}(M\times\mathbf{R}, dt^2\oplus g_t\#g'_t;[a],[b])\\&=\bigcup_{\eta(c)=\eta(a)}\mathcal{M}(M\times\mathbf{R}, dt^2\oplus g_t;[a],[c])\\&\qquad\times\mathcal{M}(M\times\mathbf{R}, dt^2\oplus g'_t;[c],[b])\end{aligned}\tag{4.10.4}$$

から従う．この (4.10.4) 式の証明は今までいろいろしてきたものと同様である．

さてこれを使って $I_{g_t}:CF(M,g)\to CF(M,g')$ がチェインホモトピー同値であることを証明しよう．この写像のチェインホモトピー逆の候補としては $I_{g_{-t}}:CF(M,g')\to CF(M,g)$ がある．これが本当にチェインホモトピー逆であることを証明するには，次の補題を示せばよい．

補題 4.10.6　$I_{g_t} : CF(M,g) \to CF(M,g')$ はチェインホモトピーを除いて g と g' で決まり族 g_t にはよらない.

補題 4.10.6 を使った $I_{g_{-t\varphi}} \circ I_{g_t}$ が恒等写像とチェインホモトピックであることの証明　補題 4.10.5 より $I_{g'_{-t}} \circ I_{g_t}$ は $I_{g_t \# g'_{-t}}$ と同じである.

一方, $g_t \# g_{-t}$ は g と g を結ぶ計量の族である. g と g を結ぶ計量の族としてはもう一つ $g_t = g$ がある. この族に対しては容易にわかるように $I_g = id$ である. 実際 $\eta(a) - \eta(b) = 0$ のとき $\mathcal{M}(M \times \mathbf{R}, dt^2 \oplus g; [a], [b])$ が空でないのは $[a] = [b]$ のときでそのときこの空間は 1 点である. (このことは $g_t = g$ が t によらないから $\mathcal{M}(M \times \mathbf{R}, dt^2 \oplus g; [a], [b])$ 上に $\mathbf{R}$ 作用があることからわかる.)

したがって補題 4.10.5 より $I_{g'_{-t}} \circ I_{g_t}$ は $I_g = id$ にチェインホモトッピック.

証明終わり

以上で補題 4.10.6 を除いて次の定理が証明された.

定理 4.10.7　フレアーホモロジー $HF(M)$ は標準的な同型を除いて計量によらない.

補題 4.10.6 の証明をしよう. $s = 0, 1$ に対して g_t^sが g と g' を結ぶ計量の族とする. この二つの族を族の族 g_t^s $(s \in [0,1])$ でつなぐ. モジュライ空間

$$\bigcup_{s \in [0,1]} \mathcal{M}(M \times \mathbf{R}, dt^2 \oplus g_t^s; [a], [b])$$

を考えよう.

補助補題 4.10.8　$\eta(a) - \eta(b) = -1$ のとき$\bigcup_{s \in [0,1]} \mathcal{M}(M \times \mathbf{R}, dt^2 \oplus g_t^s; [a], [b])$ は有限個の点である.

これは要するに -1 次元のものの一つのパラメータの族は 0 次元である, ということである. これの数を数えて

$$\Phi_{g_t^s} : CF_k(M,g) \to CF_{k+1}(M,g')$$

を

$$\Phi_{g_t^s}([a]) = \sum_{\eta(b)=\eta(a)+1} \# \bigcup_{s\in[0,1]} \mathcal{M}(M\times\mathbf{R}, dt^2\oplus g_t^s; [a],[b])\cdot[b]$$

で定義する．これが $I_{g_t^0}$ と $I_{g_t^1}$ の間のチェインホモトピーを与えることを証明したい．つまり，

補助補題 4.10.9　$I_{g_t^0} - I_{g_t^1} = \partial_{(M,g')}\Phi_{g_t^s} + \Phi_{g_t^s}\partial_{(M,g)}$

これを示すには $\eta(a)-\eta(b)=0$ の場合の$\bigcup_{s\in[0,1]}\mathcal{M}(M\times\mathbf{R}, dt^2\oplus g_t^s;[a],[b])$ を使う．すなわちこの境界が

$$\begin{aligned}&\bigcup_{\eta(c)=\eta(a)+1}\left(\bigcup_{s\in[0,1]}\mathcal{M}(M\times\mathbf{R}, dt^2\oplus g_t^s;[a],[c])\right.\\&\qquad\qquad\left.\times\overline{\mathcal{M}}(M\times\mathbf{R}, dt^2\oplus g';[c],[b])\right)\\&\cup\bigcup_{\eta(c)=\eta(a)-1}\left(\bigcup_{s\in[0,1]}\overline{\mathcal{M}}(M\times\mathbf{R}, dt^2\oplus g;[a],[c])\right.\\&\qquad\qquad\left.\times\mathcal{M}(M\times\mathbf{R}, dt^2\oplus g_t^s;[c],[b])\right)\\&\cup\ \mathcal{M}(M\times\mathbf{R}, dt^2\oplus g_t^0;[a],[b])\\&\cup\ -\mathcal{M}(M\times\mathbf{R}, dt^2\oplus g_t^1;[a],[b])\end{aligned}$$

であることを示せばよい．これはやはり前と同様ですむ，と思うであろうが，ところがどっこい，この証明は今までやってきたことからはでない．問題は $\eta(a)-\eta(c)=-1$ のとき$\bigcup_{s\in[0,1]}\mathcal{M}(M\times\mathbf{R}, dt^2\oplus g_t^s;[a],[c])$ の元に対して AHS 複体の第 2 コホモロジーが消えない点にある．これは当然で s を止めたときのモジュライ空間の次元は -1 であるから．そこで倉西写像の概念を使って議論する必要がある．この議論は省略して [深谷 1] §10 にゆずる．

今までの議論はある意味では $M\times\mathbf{R}$ の相対ドナルドソン不変量が計量によらないことを示していたことにあたる．しかし $b_2^+(M\times\mathbf{R})=0$ であるから，前の議論はそのままでは使えなかった．

さて一カ所証明を省略してしまったが，以上でフレアーホモロジーが計量によらないことが証明された．

次に相対ドナルドソン多項式の不変性を考えよう．これは今までやったこととほぼ同じ議論で直ぐでる．状況を思い出そう．$X - K = M \times (0, \infty)$ なる4次元多様体を考えその上の $SU(2)$ 束 ζ をとりこれを使って相対ドナルドソン多項式 $Q(X, \zeta; [\Sigma_1], \cdots, [\Sigma_d]) \in HF(M)$ を定義したのだった．これには X 上の計量やコホモロジー類を実現する曲面 Σ_i および曲面 Σ_i から決まるモジュライ空間上の直線束の切断 s_i を決める必要があった．

今までの議論で相対ドナルドソン多項式がこのような選び方によらないことは大体示した．ただしまだ（$X - K = M \times (0, \infty)$ が計量を込めて成り立つ）M 上の計量やフレアーホモロジーを定義するのに必要な摂動によらないことは示していない．このことを示そう．再び記号が煩雑になるので M 上の計量によらないことだけを示し，摂動によらないことの証明は省略する．

M 上に二つの計量 g, g' をとる．このあいだを結ぶ計量の族 g_t をとる．X 上の計量で $X - K = M \times (0, \infty)$ 上 $dt^2 \oplus g$ になるもの g_X をとる．これを使ってモジュライ空間 $\mathcal{M}((X, g_X), \zeta; a)$ が $[a] \in R(M)$ に対して定義される．このモジュライ空間が相対ドナルドソン不変量の定義に使われたのだった．この相対ドナルドソン不変量はウィッテン複体 $CF(M, g)$ のサイクルであった．このサイクルを $Q((X, g_X), \zeta, [\Sigma_1], \cdots, [\Sigma_d]) \in HF(M)$ と書こう．

次に計量 g_X に g_t を張り合わせて，X 上の計量 $g_X \# g_t$ でコンパクト集合の外で $dt^2 \oplus g'$ に一致するものを作ろう．これを使ってモジュライ空間 $\mathcal{M}((X, g_X \# g_t), \zeta; a)$ を作る．これからも相対ドナルドソン不変量が決まる．これはウィッテン複体 $CF(M, g')$ のサイクルである．このサイクルを $Q((X, g_X), \zeta, [\Sigma_1], \cdots, [\Sigma_d]) \in HF(M)$ と書く．示すべきなのは次の命題である．

定理 4.10.10

$$Q((X, g_X \# g_t), \zeta, [\Sigma_1], \cdots, [\Sigma_d]) = I_{g_t}(Q((X, g_X), \zeta, [\Sigma_1], \cdots, [\Sigma_d]))$$

これは実は，書いてしまえば，今まで述べたことからほとんど明らかである．

すなわちモジュライ空間の同相

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}((X, g_X \# g_t), \zeta, [\Sigma_1], \cdots, [\Sigma_d], [a]) \\ &= \textstyle\bigcup_{\eta(c)=\eta(a)} \mathcal{N}((X, g_X), \zeta, [\Sigma_1], \cdots, [\Sigma_d]; c) \times \mathcal{M}((M \times \mathbf{R}, g_t); c, a)\end{aligned}$$

と定義から得られる．この同相ははり合わせについていろいろ述べてきたことから直ちに従う．

定理 4.10.10 は定理 4.10.7 の標準同型をへて相対ドナルドソン不変量が 3 次元多様体 M の計量によらないことを示している．

以上でフレアーホモロジーと相対ドナルドソン不変量についての議論を終わる．ここでつけた制限，たとえば 3 次元多様体がホモロジー球面であること，をはずすための努力はいろいろされている．また $b_2^+(X) = 1$ の場合の考察も閉多様体の場合には成されている．これらについては触れない．

フレアーホモロジーや相対ドナルドソン不変量を具体的に計算することは大変難しい．本書ではそれについてはまだ全然触れていない．次章では少し趣を変えて一般論はやめてここで述べたような方法の応用例としてエキゾチック $K3$ 曲面の存在を示そう．

第5章　エキゾチック $K3$ 曲面

§ 5.1　$SO(3)$ 不変量

さて今まで長々と ASD 接続のモジュライ空間について論じてきたが，具体例や応用は述べていなかった．そのひとつの理由は，ドナルドソン (Donaldson) 不変量を応用しようとするとこれを計算しなければならないが，ドナルドソン不変量を具体的に計算するのは大変難しい，ということである．多くの計算がなされているのは，ケーラー (Kähler) 多様体上の ASD 接続のモジュライ空間は（代数幾何の）安定ベクトル束のモジュライ空間と一致するという，ドナルドソンの定理（あるいは小林–ヒッチン (Hitchin) 予想 [DK] 6 章，[Si] 参照）を用いている．これを証明しようとするとまた多くの定義や道具が必要である．また安定ベクトル束のモジュライ空間を決定するのも難しい問題である．このやり方による計算は本 [FM1] で詳細に述べられている．

そこで本章ではクロンハイマー (Kronheimer) が [K3] で行ったやり方に基づき，代数幾何を使わないで計算できる例を述べる．これにより小平が出した問い，すなわち $K3$ 曲面の対数変換で得られる複素曲面は $K3$ 曲面と可微分同相か，に否定的な解答を与えることができる．

クロンハイマーの方法では今まで考えてきた $SU(2)$ 束を用いた多項式不変量ではなく，$SO(3)$ 束を用いた不変量を使う．これは実はいろいろな意味で $SU(2)$ 束の場合より扱いが易しい．その辺は後に述べるが，まずここで§1.3 の続きに

戻って，4次元多様体上の $SO(3)$ 束の特性類についてもう少し述べよう．

$SO(3)$ 束 E（3次の実ベクトル束）が $SU(2)$ 束に簡約化されるときは2次の複素ベクトル束ζができる．実はそうでなくてもこの複素ベクトル束は構成できる．まずそのことに注意する．本節は一般論は目標ではないので以下簡単のため4次元多様体は単連結とする．

話を逆にして2次の複素ベクトル束ζから出発しよう．これにはエルミート(Hermite)内積がいつも入るから構造群は $U(2)$ としてよい．群 $U(2)$ の中心は対角ユニタリ行列全体でこれは S^1と同型である．このとき $S^1 \cap SU(2) = \pm 1$ で $S^1 \cdot SU(2) = U(2)$ ゆえ $U(2)/S^1 = SO(3)$ である．したがって $U(2)$ 束ζから $SO(3)$ 束 Eができる．(ζがたまたま $SU(2)$ 束であればこれは§1.3で述べた $SU(2)$ 束から $SO(3)$ 束を作る構成に一致する.）この逆が実は成立する．

補題 5.1.1　任意の $SO(3)$ 束 Eはある $U(2)$ 束ζから上記のやり方で作られる．このとき $c^1(\zeta) \equiv w^1(E) \pmod 2$ で Eを導くζは $w^1(E)$ の $H^2(X;\mathbf{Z})$ への持ち上げと1対1に対応する．

証明　$w^1(E)$ の $H^2(X;\mathbf{Z})$ への持ち上げ c を一つ決める．$f : \vee_b S^2 \to X$を H_2上に同型を導くようにとる(§1.3)．まず f^*Eを $U(2)$ 束に持ち上げよう．これには各々の S^2上で持ち上げればよい．S^2上の $SO(3)$ 束および $U(2)$ は写像 $S^1 \to SO(3)$，$S^1 \to U(2)$ のホモトピー類で決まる．(これも§1.3で述べた.）一方$\pi_1(SO(3)) = \mathbf{Z}_2$，$\pi_1(U(2)) = \mathbf{Z}$ で $U(2) \to U(2)/S^1$は全射：$\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_2$を導く．ここでさらに，$SO(3)$ 束および $U(2)$ に対応する写像（変換系の）を$\pi_1(SO(3)) = \mathbf{Z}_2$，$\pi_1(U(2)) = \mathbf{Z}$ の元と思うと，これはそれぞれ $w^2(E) \cdot [S^2]$，$c^1(\zeta) \cdot [S^2]$ である．以上により，f^*Eが $U(2)$ 束に持ち上がり，$c^1(\zeta) \equiv w^1(E) \pmod 2$ かつ f^*Eの持ち上げは $c^1(\zeta) = c$ で決まることがわかる．

§1.3で述べたように $f : \vee_b S^2 \to X$は$\vee_b S^2$と Xから1点を除いたものの間のホモトピー同値を引き起こす．したがって後はこの残った一点のところでの持ち上げを考えればよい．すなわち $S^3 \to SO(3)$ の持ち上げ $S^3 \to U(2)$ を考えればよい．しかし $U(2)/S^1 = SO(3)$ を使うと，このような持ち上げはホモトピーの意味で一意に存在することがわかる．(ファイバー束のホモトピー完全列

を使えばよい.）（補題 5.1.1 の後半は任意の空間に対して成立する.）

証明終わり

これで補題 1.3.9（の一般化）が証明できる．$SO(3)$ 束 E と $U(2)$ 束ζを補題 5.1.1 のようにとろう．$Hom(\zeta,\zeta)$ は $U(2)$ のリー (Lie) 環 $u(2)$ の複素化である．$u(2)$ は $u(2)=u(1)\oplus su(2)$ と $U(2)$ の作用も込めて分解する．($u(1)$ は $S^1=U(1)\subset U(2)$ のリー環で $su(2)$ は $SU(2)\subset U(2)$ のリー環.）このうち $su(2)$ の方から生じるのが Eで，$u(1)$ の方はそこへの $U(2)$ の作用が自明であるから自明なベクトル束を導く．したがって p^1の定義より

$$p^1(E)=-c^2(Hom(\zeta,\zeta))$$

ここで $c^2(Hom(\zeta,\zeta))$ を $c^2(\zeta)$ と $c^1(\zeta)$ から計算しよう．微分型式としてチャーン (Chern) 型式を計算するので 1 点で計算してよい．$F_\zeta=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}$ とおくと，

$$F_{\zeta\otimes\zeta''}=\begin{pmatrix} a-b & & & 0 \\ & b-a & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}$$

よって，$c^1(\zeta)=-\frac{1}{2\pi}(a+b)$，$c^2(\zeta)=\frac{1}{4\pi^2}a\wedge b$，$c^2(\zeta\otimes\zeta^*)=-\frac{1}{4\pi^2}(a-b)\wedge(a-b)$. これから

$$p^1(E)=-c^2(\zeta\otimes\zeta^*)=(c^1(\zeta))^2-4c^2(\zeta) \tag{5.1.1}$$

が得られる．これから補題 1.3.9 は得られる．

命題 1.3.11 であるが，これはやはり上の考察と 4 次元多様体の上の複素ベクトル束が，c^1,c^2で決まることから次のようにして証明される．

まず $w\in H^2(X;\mathbf{Z}_2)$，$p\in H^4(X;\mathbf{Z})$ が $w^2\equiv p \pmod 4$ なるようなコホモロジー類とする．wの $H^2(X;\mathbf{Z})$ への持ち上げを c^1とする．すると $4c^2=(c^1)^2-p$ なる $c^2\in H^4(X;\mathbf{Z})$ が一意に決まる．これを第 1 および第 2 チャーン類であるような $U(2)$ 束をζとする．これから $SO(3)$ 束 Eを作ると，$w^2(E)=w$，$p^1(E)=p$

が (5.1.1) から示される．一意性は補題 5.1.1 の一意性からでる．　証明終わり

さて Eを $SO(3)$ 束とする．この上の接続 A に対してやはり ASD 方程式 $F_A = - * F_A$を考えることができる．これのモジュライ空間を $\mathcal{M}(X, E)$ と書く．あるいは Eの第 2 スティーフェル (Stiefel)–ホイットニー (Whitney) 類を wと，ポントリャーギン (Pontryagin) 数を$-m$ としたとき $\mathcal{M}(X; w, m)$ とも書く．これに対して前章までの考察はほとんど同じにできる．まず次元は，

$$\dim \mathcal{M}(X; w, m) = 2m - 3(1 + b_2^+)$$

で与えられる．(本章では 4 次元多様体は単連結としていた.) この式はやはりアティヤ (Atiyah)–シンガー (Singer) の指数定理から得られる．補題 1.3.9 により Eが $SU(2)$ 束から得られているときこの次元公式は定理 2.2.3 のものと一致する．

次に可約接続について述べよう．$SO(3)$ は $S^1 \cong U(1)$ を含む．$SO(3)$ の普通の 3 次表現を $S^1 \cong U(1)$ に制限すると $\mathbf{C} \oplus \mathbf{R}$ と分解する．したがってもし E の接続 A が $S^1 \cong U(1)$ 接続に簡約化されるとすると Eは $U(1)$ 束として $L \oplus \mathbf{R}$ と分解する．ここで L は複素直線束で $\mathbf{R}$ は自明な実直線束である．このとき

$$p^1(E) = -c^2(E \otimes \mathbf{C}) = -c^2(L \otimes \mathbf{C}) = -c^2(L \oplus L^*) = (c^1(L))^2$$

である．また $L \oplus \mathbf{R}$ と $L^* \oplus \mathbf{R}$ は $SO(3)$ 束としてはゲージ同値である．これは $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ なる元によるゲージ変換で移り合う．$L \oplus \mathbf{R}$ なる分解を保つ $SO(3)$ の元全体は $O(2)$ でしたがって $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ と $U(1)$ で生成される．すなわち L と同じ可約接続を与えるのは L^*だけである．以上より

補題 5.1.2　$p^1(E) = c^2$なる閉型式 c で，$[c] \in H^2(X; \mathbf{Z})$，$*c = -c$ なるものと Eの可約接続は 2 対 1 に対応する．

ところで $SU(2)$ の場合には自明な接続（あるいは可約平坦接続）がいろいろなところで問題を複雑にしていた．幸いなことに自明な接続は $SU(2)$ に簡約化可能でない $SO(3)$ 束上は存在しない（明らか）．これが話を易しくする．

以下では $w^2(E)$ を $w^2(E)^2 \not\equiv 0 \pmod 4$ となるように選ぶ．するとバブルした後でも可約平坦接続がでてきて困ることはない．(バブルした後でもスティーフェル–ホイットニー類は変わらない．なぜなら任意の $H_2(X;\mathbf{Z})$ の元はバブルする点と交わらない曲面Σで実現されるから，EのΣへの制限が自明かどうか，つまり $w^2(E) \cap [\Sigma] = 0$ かどうか，はバブルした後と前で同じであるから.）したがって，ドナルドソン不変量の定義で一番微妙だったところは忘れてよい．また平坦でない可約接続をさけるには，$b_2^+ > 1$ と仮定するのだった．($b_2^+ = 1$ でもできる場合がある．コチック (Kotchik) がバーロー (Barlow) 曲面（これは $b_2^+ = 1$ であった）が有理曲面と可微分同相でないことを示したのは，$SO(3)$ 不変量に基づく．ここではそれは論じない.)

以上のように微妙な点がなくなるので 0 次元のモジュライ空間を使っても不変量が定義できる．これが [DK] で単純な不変量 (simple invariant) と呼ばれているものである．

以後それだけを扱う．特に本章では $K3$ 曲面とエキゾチック $K3$ 曲面を考えるので $b_2^+(X) = 3$ である．この場合モジュライ空間の次元 $2m - 3(1 + b_2^+) = 0$ となるのは $m = 6$ である．そこで $w^2 \equiv 2 \pmod 4$ なる任意の $w^2 \in H^2(X;\mathbf{Z}_2)$ に対して

$$\Phi_{w,6}(X) = \#\mathcal{M}(X;w,6)$$

と定義する．

この定義のために述べなければならないもう一点は向き付けである．これについては結論だけ書いておく ([DK] p.203-206 および p.281-283 を参照).

補題 5.1.3　$c \equiv w^2 \pmod 2$ なる $c \in H^2(X;\mathbf{Z})$ および $H^2_+(X;\mathbf{R})$ の向きを決めるとモジュライ空間 $\mathcal{M}(X;w,m)$ の向きが定まる．

以上をあわせて，

定理 5.1.4　$\Phi_{w,6}(X)$ は単連結4次元多様体 X で $b_2^+ = 3c \equiv w^2 \pmod 2$ なるものの不変量である．より正確には，$c \in H^2(X;\mathbf{Z})$ および $H_+^2(X;\mathbf{R})$ の向きを保つ可微分同相で不変である．

$SO(3)$ 不変量はコチック [Ko] で最初に導入された．この不変量が $SU(2)$ ドナルドソン不変量より単純なのは，0次元のモジュライ空間を使っているので，単なる数で X 上のホモロジー類を使わなくてもいいことである．

次の節では下の二つの定理を示す．([K3] のやり方を用いる.)

定理 5.1.5　X を $K3$ 曲面とする．ある $w^2 \equiv 2 \pmod 4$ なる w に対して，$\Phi_{w,6}(X) = \pm 1$.

定理 5.1.6　X_p を $K3$ 曲面の1点での指数 p の対数変換とする．このときある $w^2 \equiv 2 \pmod 4$ なる w に対して $\Phi_{w,6}(X_p) = \pm p$.

$w^2 \equiv 2 \pmod 4$ なる w の集合は有限集合であるから，$K3$ 曲面と可微分同相でない X_p で指数 p が奇数であるものがある．一方そのような X_p は小平–フリードマン (Freedman) より $K3$ 曲面と同相であった．

§ 5.2　ホモトピー $K3$ 曲面の不変量

定理 5.1.5 と定理 5.1.6 の証明の基本的な原理は次のようなものである．ASD 方程式の解を見つけることは難しい．今まで我々はそれをほとんど作っていない．(唯一 4 次元球面上のチャーン数 1 の束のとき一つ作っただけだ.) しかし簡単に作れる例が 2 種類ある．一つは平坦接続で，もう一つは可約接続である．そこで以下では平坦だが既約な接続と，可約だが平坦でない接続を取り，これをはり合わせて平坦でなく既約な ASD 接続を作ることにする．

まず $K3$ 曲面の場合を考えよう．$K3$ 曲面 X は§0.4 で構成したように，$\widehat{X} = T^4/\mathbf{Z}_2$ を考え，これの 16 個の特異点を爆発させたものであった．これは次のように言い換えられる．Y から 16 個の特異点の近傍を除いたものを X_1 と書く．X_1 の境界は 16 個の $\mathbf{R}P^3 = S^3/\mathbf{Z}_2$ の和である．一方，$\mathbf{C}P^2/\mathbf{Z}_2$ を考える．($\mathbf{Z}_2$ の自明でない元 τ は $[x,y,z] \mapsto [x,y,-z]$ で $\mathbf{C}P^2$ に作用していた.) この作用の不動点は二つの連結成分を持つ．つまり $p_0 = [0,0,1]$ なる一点と，$\mathbf{C}P^1 = \{[x,y,0] | x,y \in \mathbf{R}\}$ である．$p_0 = [0,0,1]$ の接空間 $\mathbf{C}^2$ 上 τ は -1 倍で作用する．したがって，$\mathbf{C}P^2/\mathbf{Z}_2$ で $p_0 = [0,0,1]$ の同値類 $\overline{p}_0$ の近傍は $\mathbf{R}P^3$ の錘である．そこで $\mathbf{C}P^2/\mathbf{Z}_2 - \{\overline{p}_0\}$ の向きを変えたものを Y とおく．(あるいは $\overline{p}_0$ の近傍を除く．したがって Y は境界付き多様体でその境界は $\mathbf{R}P^3$ である．Y は境界付きであったり，コンパクトでなく境界がなかったりするが，同じ記号にしてかまわないだろう．解析的考察を行うときはいつも完備非コンパクトの方である.) Y と同じものを 16 個用意する．これらを境界に沿って X_1 とはり合わせるとできるのは $K3$ 曲面 X である (§0.4 参照)．

さて我々は X_1 上の平坦接続，Y のうち 12 個の上では可約で自明でない接続，残りの 4 個の上では自明な接続，をはり合わせて ASD 接続を作る．まず Y 上の可約接続について考えよう．

Y の境界 $\mathbf{R}P^3$ の基本群は $\mathbf{Z}_2$ である．したがってこの上の平坦な複素直線束はちょうど二つあって，一つは自明もう一つは自明でない．後者を a と書こう．(対応する可約 $SO(3)$ 接続も同じ記号で書く.)

さて自明な接続 0 は明らかに自明なまま Y へつながる．a の方はどうだろう

か．それを調べる前に Y の計量について述べよう．$\mathbf{C}P^2$ の普通の計量（フビニ (Fubini)－スタディー (Study) 計量，たとえば [小野] IX 参照）を考えると，これは $\mathbf{Z}_2$ の作用で保たれる．したがって特異点の外では $\mathbf{C}P^2/\mathbf{Z}_2$ の計量を定める．この計量をまず $\mathbf{C}P^1$ の近傍では適当に変えて滑らかな計量にする．(変え方はどちらでもよい．) $\overline{p}_0$ の近傍では次のように考える．$D^4 - \{0\}$ と $S^3 \times [0, \infty)$ は共形的に等しかった．したがって，$\overline{p}_0$ の近傍から $\overline{p}_0$ を除いたものは $\mathbf{R}P^3 \times [0, \infty)$ の直積計量とほとんど共形的である．(すなわち可微分同相で $\overline{p}_0$ の近傍の計量を $\mathbf{R}P^3 \times [0, \infty)$ 上に移したものを g すると

$$|hg - g_{\mathbf{R}P^3} \oplus dt^2| \le Ce^{-Ct}$$

なるスカラー値関数 h がある．) そこで共形類をほとんど変えないまま計量を動かして $\mathbf{R}P^3 \times [0, \infty)$ （$\overline{p}_0$ の近傍から $\overline{p}_0$ を除いたものと同一視する）上の計量が直積計量になるようにする．

補題 5.2.1　直線束 L とその上の接続 B で，B は $\mathbf{R}P^3 \times [0, \infty)$ 上 $t \to \infty$ で a に収束し，F_B は調和型式かつ $\frac{1}{4\pi^2} \int F_B \wedge F_B = -1/2$ であるものが同型を除いてただ一つ存在する．

証明　これは基本的にはホモロジー論（調和積分論）で易しい．まずそのような接続を構成しよう．それには $\mathbf{C}P^2$ 上の標準束 ξ をまず取る．すなわち

$$\xi = \left\{(p, (x, y, z)) \in \mathbf{C}P^2 \times \mathbf{C}^3 \middle| (x, y, z) \in p\right\}$$

($\mathbf{C}P^2$ の元とは $\mathbf{C}^3$ の 1 次元線形部分空間のことであった．) この上に $\mathbf{Z}_2$ の作用が $(p, (x, y, z)) \mapsto (\tau(p), (x, y, -z))$ で持ち上がる．この作用によって $\mathbf{C}P^1$ の各点のファイバーは動かないから，これから Y 上のベクトル束ができる．このベクトル束を L とする．L 上に接続を次のようにして入れる．L の任意の接続を取りこれを ξ の p_0 の外での $\mathbf{Z}_2$ 不変な接続に持ち上げる．これと p_0 の近傍の任意の $\mathbf{Z}_2$ 不変な接続とを 1 の分解でつなぐ．これで $\mathbf{C}P^2$ 上の ξ の $\mathbf{Z}_2$ 不変な接続ができた．これを下に落とすと L の接続が得られる．$\mathbf{Z}_2$ の作用 p_0 では -1 であるから，この接続は $\mathbf{R}P^3 \times [0, \infty)$ 上 $t \to \infty$ で a に収束する．

これを B_0と書こう．まず

$$\frac{1}{4\pi^2}\int F_{B_0}\wedge F_{B_0} = -1/2 \tag{5.2.1}$$

である．これを見るには B_0の持ち上げである $\mathbf{C}P^2$上の接続のチャーン類が $[\mathbf{C}P^1]$ で $[\mathbf{C}P^1]\cdot[\mathbf{C}P^1] = 1$ であることに注意すればよい．(1/2 になっているのは積分する領域が半分になっているから，マイナスがついているのは Yを定義するのに向きをひっくり返したからである.）次に汎関数

$$\int |F_{B_0} + du|^2 * 1_Y \tag{5.2.2}$$

を考えよう．ここで u は $t\to\infty$ で 0 に（指数オーダーで）近づく 1 型式である．B_0+u は接続でその曲率の L^2ノルムがこの汎関数であるから，(5.2.1) より汎関数の値は $2\pi^2$以上である．この汎関数の最小値を与える u の存在が示せる.（証明略．要するに調和積分論である.）この u に対して (5.2.2) の微分を計算すれば $F_{B_0}+du$ が調和 2 型式であることがわかる.（非線形の場合に§2.2 でやった計算参照．今は線形だからもっと易しい.）$H^2(Y,\partial Y;\mathbf{R})$ は負定値だから（$F_{B_0}+du$ が 0 に境界で収束することを使って）$F_{B_0}+du$ は反自己双対である．よって $B=B_0+u$ とおくと，$\frac{1}{4\pi^2}\int|F_B|^2 * 1_Y = \frac{1}{4\pi^2}\int F_B\wedge F_B = -1/2$. これが求めるものである．

一意性は積分が 0 の調和 2 型式が 0 であることと $H^2(Y,\partial Y;\mathbf{R})$ が負定値であることから明らか． 証明終わり

この接続から Y上の $SO(3)$ 束 E_1とその上の可約 ASD 接続 Bが得られる. ($E=L\oplus\mathbf{R}$ である.）これは $t\to\infty$ で $\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}$ をτに対応させる平坦接続に近づく.（これも a と書こう.）a を保つゲージ変換全体（等方部分群）I_aは $O(2)\cong\left\{\begin{pmatrix}A&\\&\det A\end{pmatrix}\middle| A\in O(2)\right\}\subseteq SO(3)$ である．一方 Bを保つゲージ変換全体（ここでは境界条件はつけない）I_Bは $SO(2)\cong\left\{\begin{pmatrix}A&\\&1\end{pmatrix}\middle| A\in SO(2)\right\}\subseteq$

$SO(3)$ である．$O(2) - SO(2)$ の元，たとえば $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ を考えよう．これを B に作用させる．$L \oplus \mathbf{R}$ なる分解に対応して，ゲージ変換 g は第2成分には自明に，第1成分には複素共役として作用する．したがって，B は L^* 上の接続から決まる接続 $\overline{B}$ に移る．

B に対応する AHS 複体を考えよう．境界値 a が可約なので注意が必要である．

$$(5.2.3)\qquad \begin{aligned} e^{-\tau} d_B^* e^{\tau} \oplus d_B^+ : L^2_{1,\tau}(Y; Ad\ E_1 \otimes \Lambda^1(Y)) \\ \to L^2_\tau(Y; Ad\ E_1 \otimes (\Lambda^0(Y) \oplus \Lambda^2_+(Y))) \end{aligned}$$

を考えよう（§4.8 参照）．ここで τ はコンパクト集合の外で $e^{t\delta}(\delta \neq 0)$ なる重みである．(言い換えれば $t \to \infty$ で指数的に 0 に近づく切断を考えている．)

補題 5.2.2　$\delta > 0$ ならば $e^{-\tau} d_B^* e^{\tau} \oplus d_B^+$ の核，余核は 0 である．

証明　$I_B = U(1)$ の作用も込めて $Ad\ E = \mathbf{R} \oplus \mathbf{C}$ と分解する．(可換群にゲージが簡約化されているから $Ad\ E$ に引き起こす接続は 0 である.) これらは普通の Y のコンパクト台のコホモロジーでこれは明らかに 0.　　　証明終わり

補題 5.2.3　Y の generic な計量について，E_1 上の ASD 接続で $t \to \infty$ で a になるものはゲージ変換を除いて B に限る．

証明の前にゲージ変換を除いてという言葉の意味をはっきりさせよう．§4.10 にならって $\mathcal{G}(Y, E; a)$ を無限遠で $I_a = O(2)$ の元に近づくゲージ変換全体とし，$\widehat{\mathcal{M}}(Y, E; a)$ で $t \to \infty$ で a に近づく ASD 接続全体とする．この商を $\mathcal{M}(Y, E; a)$ と書く．補題はこの空間が1点であることを主張する．

証明　まず可約接続を考えよう．E 上の可約接続は $E = F \oplus \mathbf{R}$ なる複素直線束 F とその上の反自己双対な曲率を持つ接続の組を決める．このような複素直線束は特性類の議論から補題 5.2.1 の L またはその複素共役 L^* のどちらかであ

る．また補題 5.2.1 より L，L^*上には反自己双対な曲率を持つ接続は一つしかない．すでに述べたように，L から決まる E上の可約接続と L^*から決まる E 上の可約接続はゲージ変換で移り合う．したがって可約接続は一つである．

既約接続がないことを言うために，ここで§4.8 の記述を思い出そう．平坦束 a に対して，等方部分群は

$$I_a = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix} \middle| A \in O(2) \right\}$$

で与えられこれは Bの等方部分群でもある．モジュライ空間 $\mathcal{M}_{\pm}(Y, E_1; a)$ を§4.8 にしたがって定義する．$\mathcal{M}_+(Y, E_1; a)$ に既約な元があれば，その点の近傍での $\mathcal{M}_+(Y, E_1; a)$ の次元は (5.2.3) の指数に等しかった．補題 5.2.2 により $\delta > 0$ でこの指数は 0 である．一方 a の等方部分群の次元が 1 であるから $\mathcal{D}_a$ の核は 1 次元で，したがってδが正から負に変わるとき (5.2.3) の指数は 1 減る．すなわち既約な元の近傍では$\delta < 0$ に対する $\mathcal{M}_-(Y, E_1; a)$ の次元は-1 である．これは $\mathcal{M}_-(Y, E_1; a)$ が既約な元を含まないことを意味する．一方

$$\mathcal{M}_-(Y, E_1; a) = \mathcal{M}_+(Y, E_1; a)/I_a$$

ゆえ，$\mathcal{M}_+(Y, E_1; a)$ も既約な元を含まない．　証明終わり

以上で Y 上の接続は構成した．次に X_1上の平坦接続を作ろう．これには基本群の表現を作ればよい．$\mathbf{R}^4$の合同変換で $\mathbf{Z}^4$（平行移動）と-1（全部の成分を-1 倍する）で生成される群Γを考えよう．$\mathbf{R}^4/\Gamma = T^4/\mathbf{Z}_2$であるから，$Hom(\Gamma, SO(3))$ の元は X_1の平坦接続を作る．逆も成り立つ．$\gamma_i \in \Gamma$を第 i 成分（$i = 1, \cdots, 4$）についての（1 の）平行移動，ρを-1 倍としよう．

$$\begin{aligned} &\gamma_1 \mapsto 1, \quad \gamma_2 \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ &\gamma_4 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \rho \mapsto 1 \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

とおく．これがΓの表現を定めることは直ぐ確かめられる．

この表現をφとしそれから定まる接続も同じ記号で書く．φ は $SO(3)$ 束 E_0 上の接続とする．φ の像の中心化群 $\{g \in SO(3) | \forall\gamma\ g\varphi(\gamma) = \varphi(\gamma)g\}$ は対角行列である $SO(3)$ の元全体に一致し，したがってその位数は 8 である（φ の像そのもの）．よって，$H^0(X_1; Ad\ \varphi) = 0$. この記号は局所系のコホモロジーであるから定義に計量はいらない．

次に X_1に計量を入れよう．まず T^4上の平坦計量から $T^4/\mathbf{Z}^2$から特異点を除いた部分の上の計量ができる．元々が平坦計量だったからこれは平坦で，しかも特異点の近傍では $\mathbf{R}P^3 \times (0, \infty)$ と本当に共形的である．そこで共形構造を変えずに $T^4/\mathbf{Z}^2$の計量を取り換えて特異点の近傍では $\mathbf{R}P^3 \times (0, \infty)$ と等長的にする．以後この計量で考える．

補題 5.2.4　$H^2_+(X_1; Ad\ \varphi) = 0$

この補題の証明はもう少し後に回す．

さて 16 個の $\mathbf{R}P^3 \times (0, \infty)$ のところで，φ はどうなっているだろうか．これはそれぞれの$\pi_1(\mathbf{R}P^3) = \mathbf{Z}_2$の$\Gamma$への像が$\varphi$ でどう表現されるか見ればよい．16 個の$\pi_1(\mathbf{R}P^3) = \mathbf{Z}_2$の自明でない元は，$\rho$，$\rho\gamma_i$，$\rho\gamma_i\gamma_j$，$\rho\gamma_i\gamma_j\gamma_k$で表される．するとそのうちの 4 個$\rho$，$\rho\gamma_1$，$\rho\gamma_2\gamma_3\gamma_4$，$\rho\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$が$\varphi$ で自明な元に移され，残りがそうでない元に移される．これら 12 個から生じる平坦接続は a とゲージ同値である．したがって 16 個の $\mathbf{R}P^3 \times (0, \infty)$ に Yをはるとき，4ヶ所では自明な束を，12ヶ所では E_1をはることで X上の $SO(3)$ 束 Eができる．

この上にφ，0，Bをはって接続 $Pat_0(\varphi, 12B, 4\theta)$ を作ることができる．この接続はほとんど ASD である．またポントリャーギン数は $12 \times -\frac{1}{2} = -6$ である．したがって前節で述べたように $\mathcal{M}(X, E)$ は 0 次元である．

ところで，補題 5.2.2 と補題 5.2.4 より $Pat_0(\varphi, 12B, 4\theta)$ に対応する AHS 複体の第 2 コホモロジーが消えることが示せる．B，a，0 が可約接続であるのでちょっと注意する．$\Delta_A^+ = (d_A^+)(d_A^+)^*$ なる自己双対 2 型式に作用する作用素を考える．これは $\mathbf{R}P^3$上で $A = a$ を考えると$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta_a$と見なせる（ここで$\Delta_a$は 1 型式に対するラプラシアン）．$H^1(\mathbf{R}P^3, Ad\ a) = 0$ ゆえΔ_aで可逆である．したがって，a ではり合わせると，はり合った後の接続に対する AHS 複体の第 2

コホモロジーははる前の接続に対する AHS 複体の第 2 コホモロジーの和である．第 0 コホモロジーの方も同様である．

よって $Pat_0(\varphi, 12B, 4\theta)$ の近傍に ASD 接続が見つかる．$\mathcal{M}(X, E)$ の元はこれに限ることを示そう．はり合わせるところの $\mathbf{R}P^3 \times [-T, T]$ の Tを変えることで Xの計量が変わった．これを $X(T)$ と書こう．示すのは十分大きい Tに対して $\mathcal{M}(X(T), E)$ の任意の元 $A(T)$ は $Pat_0(\varphi, 12B, 4\theta)$ に近いことである．

まず $w^2(E) \cap \mathbf{C}P^1$をそれぞれの $\mathbf{C}P^1 \subseteq Y$で考えよう．

補題 5.2.5　φ が自明にならない 12 個の $\mathbf{R}P^3 \times (0, \infty)$ に対応する Yに対して，$w^2(E) \cap [\mathbf{R}P^2]$ は 0 でない．

証明　これは平坦接続 a からできる $SO(3)$ 束が自明でないことを言えばよい．スティーフェル–ホイットニー類の定義（§1.3 で与えたものでよい）のよい演習問題である．読者に任せる．　証明終わり

さて $T \to \infty$ で $Pat_0(\varphi, 12B, 4\theta)$ に近づかない $\mathcal{M}(X(T), E)$ の元の列 A_T があったとする．すると前章と同じようにして A_Tは 16 個の Yおよび X_1上の ASD 接続にちぎれる．これらは 16ヶ所の $\mathbf{R}P^3 \times (0, \infty)$ で平坦接続でつながっている．

この平坦接続はφが自明にならない 12ヶ所で a でなければならない．$H^2(Y; \mathbf{Z}_2) \to H^2(\partial Y; \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2$は同型であるから補題 5.2.5 より，$\partial Y = \mathbf{R}P^3$で Eは自明でない．

したがってこれら 12 個の Yに残る ASD 接続のポントリャーギン数は半整数である．反自己共役性よりそれらは$-1/2$ 以下である．これらは 12 個あったから，全部$-1/2$ だとしてさらに外にどこにも曲率が残らないとしてやっと勘定が合う．

すなわち $A(T)$ は 16ヶ所の Yで $Pat_0(\varphi, 12B, 4\theta)$ に近く，X_1上で平坦である．この平坦接続がφ であることがわかればよい．これは次のことから示される．

補題 5.2.6　φ と同じ 12ヶ所の$\pi_1(\mathbf{R}P^3)$ を自明でなく，4ヶ所の$\pi_1(\mathbf{R}P^3)$ を自

明に移すような $\psi:\Gamma\to SO(3)$ は φ に一致する．

証明　ρ，$\rho\gamma_1$，$\rho\gamma_2\gamma_3\gamma_4$，$\rho\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ は ψ で自明な元に移る．これで生成される正規部分群で Γ を割ると，$\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_2$ になる．($\rho^{-1}\gamma_i\rho(\gamma_i)^{-1}=(\gamma_i)^{-2}$ より $(\gamma_i)^2$ はどの i に対してもこの正規部分群に入ることに注意すれば直ぐわかる．) $\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_2$ から $SO(3)$ への単射準同型がすべてお互いに共役であることの証明は読者に任せる．　証明終わり

実は上の議論はゲージ変換のはり合わせについての扱いがいい加減である．これは応用を書いた後で述べる．　定理 5.1.5 の証明とりあえず終わり

以上で補題 5.2.4 の証明を除いて，定理 5.1.5 の証明ができた．ここで定理 5.1.5 の応用を一つ書いておこう．

定理 5.2.7　$K3$ 曲面 X が $X=X'\#X''$ と連結和になるならば，X' または X'' はホモトピー球面である．

証明　定理 5.2.7 は定理 2.4.13 を使えばそれからも示される．(というより定理 2.4.13 は定理 5.2.7 よりかなり強い．) 我々は定理 2.4.13 は証明しなかったのでかわりに定理 5.2.7 を使おう．$X=X'\#X''$ とする．

$$H^2(X;\mathbf{Z})\cong -E_8\oplus -E_8\oplus\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

であった．ロホリン (Rokhlin) の定理により二つの E_8 は離ればなれになれない．つまり $H^2(X';\mathbf{Z})\supseteq -E_8\oplus -E_8$ または $H^2(X'';\mathbf{Z})\supseteq -E_8\oplus -E_8$ である．前者としてよいであろう．すると X'' がホモトピー球面でなければ $H^2(X'';\mathbf{Z})$ は不定値である．一方ドナルドソンの定理 2.4.12 より，$H^2(X';\mathbf{Z})$ は負定値であり得ない．

したがって，X'' がホモトピー球面でなければ，X は交叉型式がともに不定値な二つの多様体の連結和になったことになる．すると定理 4.9.4 より X のドナルドソン不変量はすべて 0 である．その証明をまねると $SO(3)$ 不変量も 0 であ

ることがわかる．これは定理 5.1.5 に反する．　証明終わり

さて定理 5.1.5 の証明の中でゲージ変換についてごまかしている部分をはっきりさせよう．まずゲージ変換の境界条件の取り方について注意する．$\mathcal{G}(Y, E_0; a)$ や $\mathcal{G}(X_1, E; \underbrace{a, \cdots, a}_{12}, \underbrace{0, \cdots, 0}_{4})$ を今までゲージ変換群に使っていた．たとえば $\mathcal{G}(Y, E_0; a)$ は無限遠で $I_a = O(2)$ の元に近づくゲージ変換全体であった．これより少し小さい群 $\mathcal{G}'(Y, E_1; a)$ を無限遠で $SO(2)$ の元に近づくゲージ変換全体であると定義する．また $\mathcal{G}'(X_1, E_1; a, \cdots, a, 0, \cdots, 0)$ を a に対応する 12ヶ所では $SO(2)$ に近づき，外の 4ヶ所では $I_0 = SO(3)$ に近づくゲージ変換全体とする．$\frac{\mathcal{G}(Y,E_1;a)}{\mathcal{G}'(Y,E_1;a)} = \mathbf{Z}_2$．$\frac{\mathcal{G}(X_1,E_1;a,\cdots,a,0,\cdots,0)}{\mathcal{G}'(X_1,E_1;a,\cdots,a,0,\cdots,0)} = (\mathbf{Z}_2)^{12}$である．

これらで割った ASD 接続のモジュライ空間を $\mathcal{M}'(Y, E_0; a), \mathcal{M}'(X_1, E_1; a, \cdots, a, 0, \cdots, 0)$ と書く．こうすると，$\mathcal{M}'(Y, E_0; a)$ は二つの可約接続からなる．すなわち Bとその複素共役にあたる$\overline{B}$である．(この二つは $\mathcal{G}(Y, E_0; a)$ ではゲージ同値である.)

さて前の定理 5.1.5 の証明のところでごまかしていたのは次の事実である．X_1 上の $SO(3)$ 束 E_0と，たとえば一つの Y上の E_1をはり合わせるとき，$\mathbf{R}P^3$の上の束の自己同型の分だけはり合わせに不定性があった．したがってただはるといったのでは，できる束 E_1は一意に決まらない．しかし我々には $\mathbf{R}P^3$上の接続 a が与えられているのであるから，はり合わせをこの接続を保つようにすることで，不定性は $I_a = O(2)$ まで減らせる．問題はこの群が不連結なことである．(もしこれが連結なら，できたベクトル束の $SO(3)$ 束としての同型類は決まる.) 実は $I_a = O(2)$ の二つの違った連結成分ではった束は，$SO(3)$ 束として同型ではない．これは次の補題からわかる．

補題 5.2.8　$I_a = O(2)$ の二つの違った連結成分ではった束は $\mathbf{C}P^1 \subseteq Y$の分だけスティーフェル–ホイットニー類が異なる．

証明　Lの第 1 チャーン類（コンパクトでないがチャーン型式の定めるド・ラーム (de Rham) コホモロジー類だと考えれば，$H^2(Y, \partial Y; \mathbf{R})$ の元として定義さ

れる）は $c^1(L) \cap [\mathbf{C}P^1] = 1$ を満たす．(これは $\mathbf{C}P^1$ への L の制限が標準束 ξ の制限であることからわかる.）$[\mathbf{C}P^1] \cap [\mathbf{C}P^1] = -2$ ゆえ $c^1(L)$ のポアンカレ (Poincaré) 双対は $-\frac{1}{2}[\mathbf{C}P^1]$ である．したがって $c^1(L) - c^1(L^*)$ のポアンカレ双対は $[\mathbf{C}P^1]$ であるから，$c^1(L) \equiv w^2(L \oplus \mathbf{R}) \pmod 2$ より求める結果が得られる……というとちょっと厳密性を欠く．($c^1(L) \equiv w^2(L \oplus \mathbf{R}) \pmod 2$ というのは閉多様体の上の式だから.)

ちゃんと言うには，補題 5.1.1 で述べた $SO(3)$ 束と $U(2)$ 束の関係を思い出そう．まずどちらか一方のはり方ではった束 E をとり $U(2)$ 束に持ち上げ $\widetilde{E}$ とする．次に $L^{\otimes 2}$ なる直線束を考える．これは（B から導かれる接続も込めて）Y では自明だから，0 でのばして X での直線束とする．$\widetilde{E} \otimes_{\mathbf{C}} L^{\otimes 2}$ なる束を考えると，これを $SO(3)$ 束に落とすともう一方のはり方で作った束になる．$c^1(L^{\otimes 2})$ のポアンカレ双対は $[\mathbf{C}P^1]$ であるから，今度こそ $c^1(L) \equiv w^2(L) \pmod 2$ と $c^1(\widetilde{E}) \equiv w^2(E) \pmod 2$ より補題が示される．　　証明終わり

さてここで $K3$ 曲面の場合に戻ろう．そこでは X_1 上の平坦接続と Y 上の可約接続がゲージ変換群 $\mathcal{G}(Y, E_0; a)$ や $\mathcal{G}(X_1, E_1; a, \cdots, a, 0, \cdots, 0)$ を除いて一つ決まっていた．E_0 と E_1 をはりあわせると 2^{12} 通りのすべて異なった $SO(3)$ 束ができる．これらにはそれぞれに一つずつ X_1 上の平坦接続と Y 上の可約接続をはりあわせた ASD 接続があることになる．これで定理 5.1.5 の証明は（補題 5.2.4 を除いて）本当に終わった．

定理 5.1.6 の証明に移ろう．

ここでは X の対数変換 X_p を考えていたのだった．16 個の Y をはる前の X_1 に対しても対数変換を取ることができる．これを X'_p としよう．まず X'_p 上の平坦接続を構成しよう．$P : T^4/\mathbf{Z}_2 \to T^2/\mathbf{Z}_2 \cong S^2$ なる写像を考える．(第 1 および第 2 成分への射影）これと爆発でできる写像 $X \to T^4/\mathbf{Z}_2$ の合成が X の楕円曲面の構造を与えていた（§0.4 参照）．X_1 から $P^{-1}(D^2)$ を除いたものを X' と書こう．ここで D^2 は $P^{-1}(D^2)$ が特異点と交わらないようにとる．X' の 2 重被覆 $\widetilde{X}' \subseteq T^4$ は，T^2 から 2 点を除いたものと T^2 の直積である．したがってその基本群 $\pi_1(\widetilde{X}')$ は $\mathbf{Z}^2 \times F_3$ である．ここで F_3 は三つの元から生成される自由群

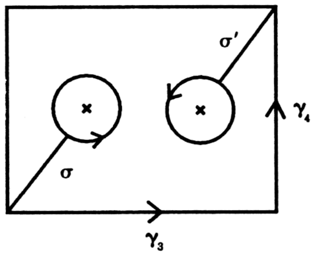


図 5.2.1

である (図 5.2.1).

F_3は

$$\langle \gamma_3, \gamma_4, \sigma, \sigma' | \gamma_3\gamma_4\sigma\gamma_3^{-1}\gamma_4^{-1} = \sigma' \rangle$$

と表示される．($\gamma_3, \gamma_4, \sigma, \sigma'$が生成元，$\gamma_3\gamma_4\sigma\gamma_3^{-1}\gamma_4^{-1}\sigma'^{-1}$が基本関係式.) また$\mathbf{Z}^2$の方の生成元を$\gamma_1, \gamma_2$とする．すると$\pi_1(\widetilde{X}') \to \pi_1(T^4)$ はγ_iをγ_iにσ, σ'を 1 に移す．被覆変換群$\mathbf{Z}_2$の自明でない元ρは$\mathbf{Z}^2 \times F_3$に$\gamma_i \mapsto (\gamma_i)^{-1}$，$\sigma \mapsto \sigma'^{-1}$で作用する．したがって

$$\pi_1(X') = \left\langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \sigma, \rho \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma_3\gamma_4\sigma\gamma_3^{-1}\gamma_4^{-1} = \rho^{-1}\sigma^{-1}\rho \\ \rho^{-1}\gamma_i\rho = (\gamma_i)^{-1} \\ \gamma_1\gamma_i = \gamma_i\gamma_1, \gamma_2\gamma_i = \gamma_i\gamma_2 \\ \gamma_1\sigma = \sigma\gamma_1, \gamma_2\sigma = \sigma\gamma_2 \\ \rho^2 = 1 \end{array} \right\rangle$$

この群の表現で 16 個の$\mathbf{R}P^3$の基本群上φと同じであるものψを求めよう．まずρ，$\rho\gamma_1$，$\rho\gamma_2\gamma_3\gamma_4\sigma$，$\rho\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\sigma$は 4 個の自明な表現に対応している$\mathbf{R}P^3$の基本群の元である．($\rho\gamma_2\gamma_3\gamma_4$でなく$\rho\gamma_2\gamma_3\gamma_4\sigma$である．前者は 2 乗して 1 にならない.) したがってこれらはψで 1 に移される．この元で生成される群で$\pi_1(X')$を割ったものを Hとすると，

$$H = \left\langle \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \sigma \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma_3\gamma_4\sigma\gamma_3^{-1}\gamma_4^{-1} = \sigma^{-1} \\ (\gamma_i)^2 = 1 \\ \sigma\gamma_2 = \gamma_2\sigma, \gamma_i\gamma_2 = \gamma_2\gamma_i \\ \gamma_2\gamma_3\gamma_4\sigma = 1 \end{array} \right\rangle$$

と表される．Hの $SO(3)$ への表現ψを考えよう．まず$\rho\gamma_2$は 12 個の自明な表現に対応しない $\mathbf{R}P^3$の基本群の元の一つだから，$\psi(\gamma_2)$ は位数 2 の自明でない元である．共役で動かして

$$\psi(\gamma_2) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

としてよい．すると Hの像は$\psi(\gamma_2)$ と可換でなければならないから$\psi(H) \subseteq O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} A & \\ & \det A \end{pmatrix} \middle| A \in O(2) \right\}$．$\rho\gamma_3$，$\rho\gamma_2\gamma_3$も$\psi$で自明でない元に移るから，再び共役で動かして

$$\psi(\gamma_3) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

としてよい．すると$\rho\gamma_4$，$\rho\gamma_2\gamma_4$がψで自明でない元に移るから

$$\psi(\gamma_4) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & \\ -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \\ \sin\theta & \cos\theta & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

なる$\theta \in [0, \pi)$ が見つかる．すると

$$\psi(\sigma) = \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta & \\ -\sin 2\theta & -\cos 2\theta & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

この表現をψ_θとしよう．以上で求めた表現はいつ共役になるであろうか．まず $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ を考えると，この元について $g^{-1}\psi_\theta g = \psi_{\pi-\theta}$ である．こ

のほかには$\theta \in [0,\pi)$ の範囲で動かすと，ψ_θどうしは共役ではない．したがって $\mathcal{M}(X', E_1; a, \cdots, a, 0, \cdots, 0)$ は $S^1/\pm 1$ である．

さて X'に $D^2 \times T^2$をはりつけて X'_pを作ろう．これは基本群の言葉に言い換えれば$\sigma^p\gamma_2 = 1$ という関係式を足したことにあたる．

すると$\psi_\theta(\sigma^p\gamma_2) = \begin{pmatrix} \cos 2p\theta & -\sin 2p\theta & \\ \sin 2p\theta & \cos 2p\theta & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ゆえ，$\theta = k\pi/p\,(k = 0, \cdots, p-1)$ である．これらのθに対応するψ_θは X'_pにのびる．それらを$\psi_{p,k}$と書こう．

補題 5.2.9 $H^2_+(X'_p; Ad\ \psi_{p,k}) = 0$

これは補題 5.2.6 と一緒に後回しにする．

補題 5.2.9 を使うと$\psi_{p,k}$と Bをはり合わせて X_p上の $SO(3)E_p$束とその上の ASD 接続が作れる．またできた $SO(3)$ 束上の ASD 接続は$\psi_{p,k}$と Bのはり合わせに限ることも $K3$ 曲面のときと同様にできる．

$SO(3)$ 束の取り方が何通りで，その上にいくつの ASD 接続がそれぞれ乗っているか調べよう．まず$\psi_{p,k}$と$\psi_{p,k'}$が乗っている $SO(3)$ 束の間には標準的な同型が存在する．これは次のようにして作る．ψ_θに対応する接続は平坦接続としては X'_pにのびない．しかし平坦でなくてよいのなら明らかにのばすことができる．こののばし方はθについて連続でしかも$\theta = k\pi/p\,(k = 0, \cdots, p-1)$ のときは平坦なようにとれる．すなわち$\psi_{p,k}$と$\psi_{p,k'}$をつなぐ接続の族が作れた．これから $SO(3)$ 束の同型が作れる．さてこうして作った同型で$\psi_{p,k}$と$\psi_{p,p-k}$の乗っている $SO(3)$ 束を同一視する．すると $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$はこの二つの平坦接続の間の同型を与えるゲージ変換を引き起こす．この元は$\mathcal{G}'(X'_p, E_p; a, \cdots, a, 0, \cdots, 0)$ の元ではない．(なぜなら，これは$\rho\gamma_2$の不動点に対応する $\mathbf{R}P^3$での簡約化 $O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 1 \\ 1 & \det A \end{pmatrix} \right\} \subseteq SO(3)$ で，$SO(2)$ でない方の連結成分にはいるからである.) つまり$\psi_{p,k}$をある一つ決めたはり方で Bたちとはったときの接続と，$\psi_{p,p-k}$を同じはり方で Bたちとはったときの接続とはゲージ同値ではない．

したがってはり合わせてできる $SO(3)$ 束はやはり 2^{12}個で，それぞれにちょうど p 個の ASD 接続が乗っていることになる．

補題 5.2.10　これらの p 個の ASD 接続の $\mathcal{M}(X_p, E_p)$ での向き付け（±1 のどちらか）はすべて同じである．

残念であるがこの補題は証明を省略せざるを得ない．概略を書くと次の二通りあるであろう．まず一つは，先に Y たちと X' をはる．すると S^1 が ASD 接続のモジュライ空間となる．(この場合 T^3 が境界であり，T^3 の上の平坦接続は 3 次元の空間を成す．これは第 4 章では扱っていない場合である．この解析は第 4 章のものより難しい．[GM],[MMR] 参照.）X' 上の ASD 接続のモジュライ空間からは，T^3 の上の平坦接続の空間への写像がある．これを res と書こう．一方で $D^2 \times T^2$ 上の平坦接続のモジュライ空間は 2 次元で，この空間の res による逆像が p 個ありこれが ASD 接続にあたる．$D^2 \times T^2$ 上の平坦接続のモジュライ空間は res と横断的であるので，$D^2 \times T^2$ 上の平坦接続のモジュライ空間と X' 上の ASD 接続のモジュライ空間に向きを決めておけば，res による $D^2 \times T^2$ 上の平坦接続のモジュライ空間の逆像にも向きが入る．この向きが p 個の点で一致することは明らかである．$\mathcal{M}(X_p, E_p)$ での向き付けとこの向きが一致することを示せばよい．これはまた解析である．

もう一つの方法は，複素幾何に持ち込むことである．つまり p 個の平坦接続はどれも $T^4/\mathbf{Z}_2$ なる軌道体 (orbifold) の上の軌道体としての正則ベクトル束になる（これらの言葉は説明しない）．するとこれは複素幾何的なものでその向きはすべて+でなければならない．するとはり合わせた後も向きは同じである．

以上どちらの証明もまだ述べていないことをいろいろしなければならないので，省略する．

さてこれで定理 5.1.6 の証明で残ったのは補題 5.2.10 である．これを示そう．

まず $\psi_{p,k}$ に対する AHS 複体の指数は 0 である．これははり合わせてからの指数が 0 であること（§5.1 で述べたように指数定理の帰結），Y 上では指数が 0 であること（補題 5.2.2）からわかる．(はり合わせるところが可約なので指数

の和公式は注意が必要である．細部は省略するが要点は a（境界値）の等方部分群と Bの等方部分群の次元が等しいことである．)

さて AHS 複体の 0 次コホモロジーは$\psi_{p,k}$が既約だから 0 である．したがって補題 5.2.9 を示すには局所係数の $H^1(X'_p, \partial X'_p; Ad\ \psi_{p,k}) = 0$ を示せばよい．(局所係数のコホモロジーであるからこれはトポロジーの話である．)

$\psi(H) \subseteq O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} A & \\ & \det A \end{pmatrix} \middle| A \in O(2) \right\}$であるから，$Ad\ \psi_{p,k}$は複素直線束 L と自明な実直線束 $\mathbf{R}$ に分解する．したがって

$$H^1(X'_p, \partial X'_p; Ad\ \psi_{p,k}) \cong H^1(X'_p, \partial X'_p; L) \oplus H^1(X'_p, \partial X'_p; \mathbf{R})$$

$H^1(X'_p, \partial X'_p; \mathbf{R}) = 0$ は（自明な束が係数だから）X_pが単連結であることと同じに証明できる．(もっともこのことの証明もしていない．ホモロジー論の演習問題として残す．)

$H^1(X'_p, \partial X'_p; L)$ を調べるには 2 重被覆をとる．2 重被覆では$\partial X'_p$の連結成分は S^4になるから B^4をはりつけてよい．すると y_2に対応する S^1は直積因子になる．つまり$\widetilde{X}'_p = S^1 \times X''_p$．束を込めても S^1上のねじれた直線束 Fと X''_pの上の束$\widetilde{L}'$があって，$\widetilde{L} = F \otimes \widetilde{L}'$になる．($\widetilde{L}$は L の 2 重被覆への持ち上げ．) これは y_2の L でのモノドロミーが-1 であることから明らか．すると $H^*(S^1; F) = 0$．よって局所係数キュネス (Künneth) の公式より，$H^*(\widetilde{X}'_p; F \otimes \widetilde{L}') = 0$．よって $H^1(X'_p, \partial X'_p; L)$=0．

補題 5.2.4 の証明は補題 5.2.9 の証明と同様である．

これで定理 5.1.6 の証明は完成した．

付録 サイバーグ–ウィッテン理論瞥見

1994年10月，ウィッテンはサイバーグらと研究していた電磁双対性 (electro magnetic duality) の理論に基づき，ヤン–ミルズ場から決まるドナルドソン不変量がモノポール方程式から定まる不変量と等価であることを予言した．

このことの数学的に厳密な証明はまだ得られていないが，その後の研究でモノポール方程式はヤン–ミルズ方程式を用いて示された4次元位相幾何学の諸定理をより容易に導き，さらに4次元位相幾何学への新しい応用がいくつもあることがわかってきた．以下でサイバーグ–ウィッテンのモノポール方程式についてほんの少しだけ述べることにする．スピンC群とは

$$\frac{Spin(k) \times U(1)}{\{\pm 1\}}$$

なる群のことで $Spin_{\mathbf{C}}(k)$ と書く．ここで -1 は $(-1,-1) \in Spin(k) \times U(1)$ のことである．例えば $Spin_{\mathbf{C}}(3) = U(2)$ である．$SO(k) = Spin(k)/\{\pm 1\}$ ゆえ，準同型 $\pi : Spin_{\mathbf{C}}(k) \to SO(k)$ が存在する．M を向きの付いた k 次元多様体，$M = \bigcup U_i$ をその座標近傍とし，$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to SO(k)$ を M の接束の変換系とする．

定義 A.1 M の $Spin_{\mathbf{C}}$ 構造とは $\tilde{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to Spin_{\mathbf{C}}(k)$ なる変換系であって，$\pi \circ \tilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$ を満たすもののことを言う．

以後 $k=4$ の場合だけを考える．この時は

$$Spin_{\mathbf{C}}(4) \cong \frac{Sp(1)\times Sp(1)\times U(1)}{\{\pm 1\}}$$

である．さて $Spin_{\mathbf{C}}(4)$ の次の 5 つの表現を考える．

$$\text{(A.1)} \qquad \begin{cases} \rho_L([g_1,g_2,h])(v) &= g_1 v h \\ \rho_R([g_1,g_2,h])(v) &= g_2 v h \\ \rho_{\tan}([g_1,g_2,h])(v) &= g_1 v g_2^{-1} \end{cases}$$

$$\text{(A.2)} \qquad \rho_\eta([g_1,g_2,h])(w) = wh^2$$

$$\text{(A.3)} \qquad \rho_{\Lambda^2_+}([g_1,g_2,h])(x) = g_1 x g_1^{-1}$$

ここで上の 3 つは $\mathbf{H}$（四元数体）上の表現で，ρ_η は $\mathbf{C}$ 上の，$\rho_{\Lambda^2_+}$ は $\mathrm{Im}\,\mathbf{H}$（純虚四元数全体）の上の表現である．

補題 A.2　$\rho_{\tan}\circ\tilde g_{\alpha\beta}$, $\rho_{\Lambda^2_+}\circ\tilde g_{\alpha\beta}$ はそれぞれ M 上の接束 TM および Λ^2_+ の変換系である．

証明は §1.3 の記述とほぼ同じであるので省略する．

$\rho_L\circ\tilde g_{\alpha\beta}$, $\rho_R\circ\tilde g_{\alpha\beta}$, $\rho_\eta\circ\tilde g_{\alpha\beta}$ の定めるベクトル束をそれぞれ S_L, S_R, η と書く．

補題 A.3

$$c^1(\eta) \equiv w^2(M) \mod 2$$

さらに，$c^1(\eta)$ は M の $Spin_{\mathbf{C}}$ 構造と，$c \equiv w^2(M) \pmod 2$ なる $c \in H^2(M;\mathbf{Z})$ の間の 1 対 1 対応を与える．

証明は補題 5.1.1（これは $k=3$ の場合である．）と同様である．さて次の写像を考える．

$$\text{(A.4)} \qquad \mathbf{H}_{\tan}\otimes\mathbf{H}_{\rho_L} \to \mathbf{H}_{\rho_R} : v\otimes v' \mapsto \bar v v'$$

$$\mathbf{H}_{\rho_L} \to \mathbf{H}_{\Lambda^2_+} : v \mapsto vi\bar{v} \tag{A.5}$$

ここで例えば $\mathbf{H}_{\rho_L}$ は四元数体 $\mathbf{H}$ に ρ_L で定まる $Spin_{\mathbf{C}}(4)$ の作用を考えたものを指す．定義より (A.4)，(A.5) は $Spin_{\mathbf{C}}(4)$ の作用を保つ．したがってこれからベクトル束の切断の間の写像

$$\Gamma(TM) \otimes \Gamma(S_L) \to \Gamma(S_R) \tag{A.6}$$

$$\tau : \Gamma(S_L) \to \Gamma(\Lambda^2_+) \tag{A.7}$$

が定まる．(A.6) はスピン構造のある場合の補題 1.3.15 の写像の一般化である．したがって，S_L に接続 A が定まっているとき，(A.6) を用いてディラック作用素

$$\mathcal{D}_A(s) = \sum_i e_i \cdot \nabla_{e_i} s$$

が定まる．$\mathcal{D} : \Gamma(S_L) \to \Gamma(S_R)$．ここでスピン $\mathbf{C}$ 接続について注意する．$Spin_{\mathbf{C}}(4) \cong \frac{Sp(1)\times Sp(1)\times U(1)}{\{\pm 1\}}$ ゆえリー環に移ると

$$spin_{\mathbf{C}}(4) = so(4) \oplus u(1)$$

である．ここで $so(4)$ は接束の構造群のリー環，$u(1)$ は η の構造群のリー環とみなせる．したがって，接束と η に接続を決めると $Spin_{\mathbf{C}}$ 接続が定まる．

以下 M のリーマン計量を一つ決めて考える．したがって接束にはいつもレヴィ・チヴィタ接続を考える．よって η の接続から $Spin_{\mathbf{C}}$ 接続が定まりこれから S_L に接続が定まる．

A を η の接続とする．その曲率は $u(1) = i\mathbf{R}$ に値をもつ微分 2 型式である．この自己双対部分を F_A^+ と書く．さてモノポール方程式とは，η の接続 A と S_L の切断 s を未知関数とする次の偏微分方程式である．

$$\begin{cases} F_A^+ &= i\tau(s,s) \\ \mathcal{D}_A s &= 0 \end{cases} \tag{A.8}$$

この方程式に対するゲージ変換群は M から $S^1 = U(1)$ への写像全体の作る群 $\mathcal{G}(M, S^1)$ である．(A.8) の解全体を $\mathcal{G}(M, S^1)$ で割った商空間を $\mathcal{M}(M, \eta)$

と書く．ドナルドソン多項式の場合と同様にこのモジュライ空間を用いて不変量を作ることができる．これをサイバーグ–ウィッテン不変量 (Seiberg-Witten invariant) という．

方程式 (A.8) を 4 次元位相幾何学で有用にしているのは次の 2 つの事実である．

(1) $\mathcal{M}(M,\eta)$ はいつもコンパクトである．すなわちバブルはおきない．
(2) M がケーラー多様体の場合に $\mathcal{M}(M,\eta)$ は直線束の層係数コホモロジーから計算できる．

(1) によって本書の第 3 章などで解説したモジュライ空間の解析はモノポール方程式に対しては自己双対方程式よりはるかに易しくなる．

(2) は不変量の計算に関わる．すなわち複素多様体（ケーラー多様体）に対するサイバーグ・ウィッテン不変量の計算は基本的には代数幾何学で古くから確立していた複素直線束の理論に帰着される．これはドナルドソン不変量の計算が帰着される正則ベクトル束のモジュライの問題よりはるかに易しい．

(1),(2) の証明もそれほど難しくないのだが，それは参考文献 [W1] などを見ていただきたい．

サイバーグ–ウィッテン理論の 4 次元位相幾何学への応用により得られた結果のいくつかは §0.3 ですでにいくつか述べた．そこで述べなかった中ではシンプレクティック多様体に対するタウベスの結果（[T7],[T8],[T9]）が著しい．

サイバーグ–ウィッテン理論の詳しい解説はここでは試みないが，上の (1) (2) を除くと，本書で述べてきたヤン–ミルズ場の場合と大変よく似ている．特に第 4 章で述べた位相的場の理論の構成はほぼ並行して行える．

参考文献

以下かなりの数の文献をあげるが，本書を読むためにあるいはゲージ理論を理解するためにその全てを読む必要があるわけではない.(そんなことは不可能である．また一つずつ全部について本を読まなくても，勉強が進むうちに結局大体のことがわかるようになる.）本書を読んでいてわからない言葉や証明を知らない定理がでてきたとき，いちいち関係のある分野の本を１冊読もうとしたりすることは勧めない．ゲージ理論は多くの分野と関係があり，必要なことを全部勉強してから学ぼうなどと考えると，いつまでたっても本題に行き着かない.「まあそんなもんか」ぐらいに思って先に進むことを勧める．定理の証明については，本書の中で証明を省略したものはとりあえず証明を知らなくても先に進むには困らないものだけなので，その定理そのものに興味がわいたときだけ証明を勉強すればよいであろう．また本書ではゲージ理論が多くの分野と関係が深いことを強調するような書き方を心がけたため，多くの予備知識が必要であるように，より感じたかも知れない．

本書で必要になる事項のうちで既知として解説しなかったのは，多様体についての基礎事項とホモロジーと基本群についての知識である．これら本書を読むのに必要な知識の大部分を１冊の本で得るには

[SS] シンガー，ソープ：トポロジーと幾何学入門．赤摂也，松江広文，一楽重雄訳．培風館 1976

がよいであろう．多様体についての教科書は多い，ここでは

[志賀] 志賀浩二：多様体論．岩波基礎数学選書，岩波書店　1990
[服部 1] 服部晶夫：多様体．岩波全書，岩波書店　1976
[松島] 松島与三：多様体入門．数学選書５，裳華房　1965
[松本 1] 松本幸夫：多様体の基礎．東京大学出版会　1988
[村上] 村上信吾：多様体．共立数学講座 19，共立出版　1969

をあげておく．リー群について知りたい方も，本書が関わる程度のことであれば [松島] に十分な記述がある．多様体から入って微分幾何学に説きおよぼしているものに

[丹野]　丹野修吉：多様体の微分幾何学．実教出版　1976

がある．ホモロジーについての教科書も多いが，比較的薄くて読み易いものとして，

[田村 1]　田村一郎：トポロジー．岩波全書，岩波書店　1972

をあげておく．基本群については

[松本 2]　松本幸夫：トポロジー入門．岩波書店　1985

にも丁寧な解説がある．また

[服部 2]　服部晶夫：いろいろな幾何学 II．岩波講座応用数学 6，岩波書店　1993

はホモロジー以外にも，モース理論，ド・ラームの定理など本書と関わりの深い内容が簡潔にまとめられている．より本格的な教科書には

[小中菅]　小松醇郎，中岡稔，菅原正博：位相幾何学 I．岩波書店　1967
[中岡]　中岡稔：位相幾何学．共立出版　1970
[服部 3]　服部晶夫：位相幾何学．岩波基礎数学選書，岩波書店　1988

がある．ゲージ理論の数学についてかかれた日本語の書物として，

[茂伊]　茂木勇，伊藤光弘：微分幾何学とゲージ理論．共立出版　1986
[小林]　小林昭七：接続の幾何学とゲージ理論．裳華房　1989

がある．この 2 冊は本書の第 1 章と重複する部分も多いが，重複する部分については概して本書より詳しい．[茂伊]，[小林] の記述は本書より微分幾何学的である．(すなわち本書の扱いの方が位相幾何学的である.) また本書では主束 (principal bundle) を導入しなかったので，構造群がある場合の接続の扱いが多少不自然に感じられたかも知れない．そのように感じたら，[茂伊]，[小林] をごらん頂きたい．本書では接続は微分型式の言葉で解説したが，[茂伊]，[小林] では小林・野水方式 (後出の [小野] で用いられたのでこの名がある) によっている．もちろん基本的には同じことを別の言い方をしただけである．また [小林] にはアティヤ–シンガーの指数定理によってモジュライ空間の次元を計算するやり方が解説されている．ゲージ理論の英語の書物は，幾つかでているが

[DK]　S.Donaldson, P.Kronheimer: The Geometry of Four Manifolds. Oxford University Press 1990

が代表的な書物である．この本は解説のわかりやすさ，内容の豊富さなどに関して文句のない優れた書物である．ただ一つの欠点は分厚すぎて読むのに時間がかかることであ

る．(本書がこの欠点だけを共有していることを恐れる.) しかし時間をかけて熟読すればそれに見合った知識が得られる．本書で証明を省略してしまった部分，例えばモジュライ空間の向き付けについての補題 2.3.6，ツイスター空間，4 次元多様体の交叉型式についての定理 2.4.13 の証明など，知りたい方は [DK] をみていただきたい．

[FU] D.Freed, K.Uhlenbeck: Instantons and Four Manifolds. Springer-Verlag 1991

も優れた書物である．この本は [DK] より薄い分だけ通読しやすいであろう．そのかわり書かれていることは解析が中心で [DK] のようにゲージ理論の数学にかかわるほとんど全てのことが網羅されているわけではない．[FU] の内容はほぼ本書にも書かれている．(無限遠で直積型の計量を持つ空間上でゲージ理論を行うのは [FU] から始まった.) [DK]，[FU] は本書を書くときいろいろと参考にさせていただいた．

次に本書で少しだけ解説してあまり詳しく述べなかった事柄についての書物をあげる．§0.1 で述べた 1950 年代の微分位相幾何学，位相幾何学，代数幾何学にかかわる諸数学が

[Hi] F.Hirzebruch: Topological Method in Algebraic Geometry. Springer-Verlag 1956

に当時の雰囲気をよく残して述べられている．この本の翻訳『代数幾何学における位相的方法』は吉岡書店からでている．ファイバー束については

[St] N.Steenrod: The Topology of Fibre Bundle. Princeton University Press, Princeton 1951

が古典的な書物である．この本の翻訳『ファイバー束のトポロジー』も吉岡書店からでている．ファイバー束は（後出の）[足立] にもかかれている．モース理論については

[Mi1] J.Milnor: Morse Theory. Princeton University Press, Princeton 1963
[Mi2] J.Milnor: Lectures on h-Cobordism Theorem. Princeton University Press, Princeton 1965

が決定的な名著である．[Mi1] の翻訳『モース理論』も吉岡書店からでている．日本語の書物では [服部 2] および

[長野] 長野正：大域変分法．共立出版　1971

などがある．[長野] は§0.2 を書くときに参考にさせていただいた．[Mi2] には序章の何カ所かで触れたホイットニーのトリックも解説されている．ホイットニーのトリックなどを含む微分位相幾何学全般について書かれた日本語の本として

[田村 2] 田村一郎：微分位相幾何学．岩波講座基礎数学，岩波書店　1992

がある．この本は優れた本であるが，始めの方の微分多様体の構成の部分が技術的に重たい．むしろ第5章から読むことを勧める．[田村2]とは少し違ったスタイルで微分位相幾何学についてかかれている日本語の本として

[足立] 足立正久：微分位相幾何学．共立出版 1976

がある．§0.2で少しだけ述べた調和写像についての日本語の書物として

[浦川] 浦川肇：変分法と調和写像．裳華房 1990

がある．ド・ラームの定理や調和積分論については日本語では[村上]，[服部2]，[小林]に結論だけ述べられている．証明まで書いてある日本語の本には

[秋月] 秋月康夫：調和積分論 I．岩波書店 1973
[北河] 北原晴夫，河上肇：調和積分論．近代科学社 1991

がある．英語の書物では

[BT] R.Bott, L.Tu: Differential Forms in Algebraic Topology. Springer-Verlag 1982
[Wa] R.Warner: Foundation of Differential Manifolds and Lie Groups. Scott Foresman, 1970

がある．アティヤ–シンガーの指数定理については残念ながら日本語の本で証明が書いてある本がない．本書で必要な範囲内であれば[小林]に述べてある分でほぼ十分であろう．英語の書物では証明が書いてある本としては

[Ro] J.Roe: Elliptic Operators, Topology and Asymptotic Methods. Pitman Research Notes in Mathematics Series **179**, John Wiley & Sons, 1988

が優れている．使い方が書いてある本としては

[Sh] P.Shanahan: The Atiyah Singer Index Theory. Lecture notes in Mathematics **638**, Springer-Verlag 1978

もある．4次元位相幾何学の概観をみるには

[松本3] 松本幸夫：4次元のトポロジー．日本評論社 1991

がよい．楕円曲面については（手に入りずらいであろうが）

[上1] 上正明：Topology of Elliptic Surfaces and Related Topics. Seminar note on Differential Topology, 1991（京都大学数学教室）（日本語）

がよくまとまっている．（この2冊は§0.4を書くのに参考にさせていただいた．）英語の文献では

[Ki] R.Kirby : The Topology of 4-Manifolds. Lecture note in Mathematics **1374**, Springer-Verlag, 1989

[Ma] R.Mandelbaum: *Four-dimensional topology : An introduction.* Bull. Amer. Math. Soc., **2** (1980) 1 - 159

であろうか．§0.4 で述べたフリードマンの理論については

[FQ] M.Freedman, F.Quinn: Topology of 4-Manifolds. Princeton University Press, Princeton 1990

がある．複素曲面論についての代表的な書物は

[BPV] W.Barth, C.Peters, A.Van de Van: Compact Complex Surface. Springer-Verlag 1984

である．また

[小平 1] 小平邦彦：複素多様体と複素構造の変形 I, II. 東大セミナリーノート 19,31 1968

[小平 2] 小平邦彦：複素解析曲面論．東大セミナリーノート 32 1974

[小平 3] 小平邦彦：代数曲面論．東大セミナリーノート 20 1968

は優れた書物である．[小平 1] と内容が重複する次の本もでている．(どちらかというと筆者は東大セミナリーノート版の方が好きなのだが.)

[小平 4] 小平邦彦：複素多様体論．基礎数学，岩波書店　1988

複素曲面の位相について（ゲージ理論を用いるものも用いないものも）網羅的に述べてあり,「辞書」として便利な本が

[FM1] R.Friedman, J.Morgan: Smooth Four-Manifolds and Complex Surfaces. Springer-Verlag 1994

である．本書の§4.9 の内容は [FM1] ではじめて証明されたものである．§0.4 で引いた 2 次形式についての書物は

[Se] セール：数論講義．彌永健一訳，岩波書店　1979

が優れている．(この本は絶版のようだが英訳（もとはフランス語）が Springer-Verlag の Graduate Text in Mathematics シリーズからでている.) 第 1 章の接続の幾何学については [茂伊], [小林] にも述べられているが，これらについての標準的な書物は

[小野] S.Kobayashi, N.Nomizu: Foundations of Differential Geometry Vol 1, Vol 2. John Wiley & Sons 1963, 1969

である．たとえばホロノミーと平坦ベクトル束の関係（定理 1.2.9），ホロノミーとベクトル束の構造群の簡約化の関係（定理 1.2.14）などの証明は [小野]vol.1 に述べられている．また [小野] の最後の章にはチャーン–ヴェイユ理論についても述べられている．特性類についてはチャーン–ヴェイユ理論あるいは微分型式に基づくやり方で書いてある本はすでに述べたが，位相幾何学的な方法によるものでは

[MS] J.Milnor, J.Stasheff: Characteristic Classes. Princeton University Press, Princeton 1974

が優れた書物である．日本語の本では [中岡] に述べられている．スピン構造については [Ro],[Sh] に解説されている．本としては

[La] B.Lawson: Spin Geometry. Princeton University Press, Princeton 1989

もでている．§2.3 で述べたK理論については

[At1] M.Atiyah: *K*-Theory. Benjamin Inc., 1967

がある．ただし族の指数については書かれていない．族の指数定理は原論文

[AS] M.Atiyah, I.Singer : Index of elliptic operators : IV Annals of Mathematics, 93 (1971) 119 - 138

にあたったほうがよいであろう．本書で述べられなかったツイスター理論については

[At2] M.Atiyah: Geometry of Gauge Fields. Accad. Naz. Lincei, Scuola Norm. Sup., Pisa 1979

および [DK] に優れた解説がある．やはり述べられなかった正則ベクトル束との関係は小林，ヒッチン予想と呼ばれドナルドソンらによって証明されたが

[Si] Y.T. Siu: Lectures on Hermitian-Einstein Metrics for Stable Bundles and Kähler-Einstein Metrics. Birkhäuser 1987

および [DK] に述べられている．ソボレフ空間や，§3.1 であげた諸定理については [Wa],[Ro] などに本書で必要な程度には述べられている．また [小平 4] の付録である次の文献にも必要な程度に述べられている．

[藤原] 藤原大介：多様体上の楕円型偏微分作用素

より本格的に学びたい人のために，関数解析的偏微分方程式論の本でこれらについて述べているものをあげる．日本語の本では

[熊ノ郷] 熊ノ郷準：擬微分作用素．岩波書店　1974

[島倉] 島倉紀夫：楕円型偏微分作用素．紀伊国屋数学叢書 13，紀伊国屋書店　1978

[溝畑]　溝畑茂：偏微分方程式論．岩波書店　1965

英語の文献で微分幾何関係でよく引用されるのが

[GT]　D.Gilberg, N.Trudinger: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer-Verlag 1970

である．引用の便のため関数解析の教科書を１冊だけあげておく．本書で用いた程度のことは大概の関数解析の教科書に述べられている．

[伊藤黒]　伊藤清三，藤田宏，黒田成俊：関数解析．岩波基礎数学選書，岩波書店　1991

位相的場の理論の公理系は

[At3]　M.Atiyah: The Geometry and Physics of Knots. Cambridge University Press 1990

[At4]　M.Atiyah: *New invariants for 3 and 4 dimensional manifolds.* In: Mathematical heritage of Hermann Weyl, Proceeding of Symposia in Pure Mathematics **48** (1988) 285 - 299

にある．

最後に本書の内容と関係の深い論文およびその後の発展の一部についての文献をあげておく．これはゲージ理論の主要論文の文献表を作ることを意図しているわけではない．最近の文献では（本書の後半がフレアーホモロジーに当てられているので）フレアーホモロジー関係を中心にあげた．

まず以下の文献はすでにゲージ理論の数学の古典である．

[AB]　M.Atiyah, R. Bott: *The Yang-Mills equation over Riemann surface.* Phylosophical Transactions of the Royal Society of London, series A, **308** (1982) 523 - 615

[AJ]　M. Atiyah, B. Jones: *Topological aspects of Yang-Mills theory.* Comm. Math. Phys. **61** (1978) 97 - 118

[ADHM]　M.Atiyah, V.Drinfeld, N.Hitchin, Y.Mannin: *Construction of instantons.* Physics Letters **65A** (1978)185-187.

[AHS]　M.Atiyah, N.Hitchin, I.Singer: *Self duality in four dimensional Riemannian geometry.* Porceedings of the Royal Society of London, Series A **362** (1978) 425 - 461

[D1]　S.Donaldson: *An application of gauge theory to the topology of 4-manifolds.* J. Differential Geom. **18** (1983) 269 - 316

[D2]　S.Donaldson: *Anti-self-dual Yang-Mills connections on complex algebraic surfaces and stable vector bundles.* Proc. of London Mathematical Society **3** (1985) 1 - 26

[D3] S.Donaldson: *Connection, Cohomology, and intersection forms of 4-manifolds.* J. Differential Geom. **24** (1986) 275 - 341

[D4] S.Donaldson: *The orientation of Yang-Mills moduli spaces and 4-manifold topology.* J. Differential Geom. **26** (1986) 397 - 428

[D5] S.Donaldson: *Irrationaligy and h-cobordism conjecture.* J. Differential Geom. **26** (1987) 141 - 168

[D6] S.Donaldson: *Polynomial invariant for smooth 4-manifold.* Topology **29** (1990) 141 - 168

[古田 1] M.Furuta: *Perturbation of moduli space of self dual connections.* J. Fac. of Sci. Univ. of Tokyo **34** (1987) 275 - 297

[F1] A.Floer: *An instanton invariant for three manifold.* Commun. Math. Phys. **118** (1988) 215 - 240

[伊藤] M.Itoh: *The moduli of Yang-Mills connections over a Kähler surface is a complex manifold.* Osaka J. Math. **22** (1985) 845 - 862

[Sc] A.Schwarts: *On regular solution of Euclidean invariants and Yang-Mills equations.* Phy Letter **6713** (1977) 172 - 174

[T1] C.Taubes: *Self-dual connections on non-selfdual manifolds.* J. Differential Geom. **17** (1982) 139 - 170

[U1] K.Uhlenbeck: *Removable singularities in Yang-Mills fields.* Comm. Math. Phys. **83** (1988) 11 - 29

[U2] K.Uhlenbeck: *Connection with L^p bounds on curvature.* Comm. Math. Phys. **83** (1988) 31 - 42

曲面の埋め込みについてのクロンハイマーとミュロフカの研究とその発展であるドナルドソン不変量の構造定理（これがサイバーグ–ウィッテン理論への道であった）：

[K1] P.Kronheimer: *The genus minimizing of algebraic curves.* Bull. Amer. Math. Soc 29 (1993) 63 - 69

[K2] P.Kronheimer: *An obstruction of removing intersection points in immersed surfaces* (to appear in Topology)

[KM1] P.Kronheimer, T.Mrowka: *Gauge theory for embeded surfaces, I.* Topology **32** (1993) 773 - 826, *II.* Topology **34** (1995) 37 - 97

[KM2] P.Kronheimer, T.Mrowka: *Embeded surfaces and the Structure of Donaldson Polynomial invariants.* J, Differential Geom. **41** (1995) 573 - 734

[KM3] P.Kronheimer, T.Mrowka: *Recurrence relations and symptotics for four-manifold invariants.* Bull. Amer. Math. Soc. **30** (1994) 215 - 221

ドナルドソン不変量の計算について第５章で述べた方法とその発展：

[K3] P.Kronheimer: *Instanton invariants and flat connections on the Kummer surface.* Duke Math. J. **64** (1991) 229 - 241

[FS1] R.Fintshell, R.Stern: *Surgery on cusp neighborhoods.* (preprint)

§4.9 の爆発公式の一般化：

[FS2] R.Fintshell, R.Stern: *The Blow up formula for Donaldson invariant.* (preprint)

フレーアーホモロジーにいたる道であったホモロジー 3 球面と **R** の直積に上のゲージ理論について：

[FS3] R.Fintshell, R.Stern: *Pseudo free orbifolds.* Ann. of Math. **121** (1985) 335 - 346

[古田 2] M.Furuta: *Homology cobordism group of homology 3-spheres.* Invent. Math. **100** (1990) 339 - 355

[T2] C.Taubes: *Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds.* J. Differential Geom. **23** (1987) 364 - 430

[T3] C.Taubes: *Casson's invariant and gauge theory* J. Differential Geom. **31** (1989) 547 - 599

フレアーホモロジーの計算について：

[FS4] R.Fintshell, R.Stern: *Instanton homology of Seifert fibered three spheres.* Proc. of London Mathematical Society **61** (1990) 109 - 137

[古田 3] M.Furuta: *An analogue of Floer homology for lends spaces.* (preprint)

[古 S] M.Furuta, B.Steer: *Seifert fibered homology 3-sphere and Yang-Mills equations with marked points.* Adv. in Math. **96** (1992) 38 - 102

フレーアーホモロジーのその後の発展：

[AB1] D.Austin, P.Braam: *Equivariant (co)homology and gluing Donaldson polynomials.* (preprint)

[BD1] P.Braam, S.Donaldson: *Floer's work on instanton homology, knots, and surgery.* (to appear in Floer memorial volume)

[BD2] P.Braam, S.Donaldson: *Fukaya-Floer homology and gluing formulae for polynomial invariant.* (to appear in Floer memorial volume)

[DS] S.Dostglou, D.Salamond: *Self dual instantons and holomorphic curves.* Ann. of Math. **139** (1994) 581-640

[F2] A.Floer: *Instanton homology and Dehn surgery.* (preprint)

[F3] A.Floer: *Instanton invariant for knots.* (preprint)

[深谷1] K.Fukaya: *Floer homology for oriented three manifolds.* In: Aspects of Low dimensional Manifolds, ed. by Matsumoto, Morita. Advanced Studies in pure mathematics **20** (1992) 1 - 92

[深谷2] K.Fukaya: *Floer homology of connected sum of homology 3 spheres.* (to appear in Topology)

[深谷3] K.Fukaya: *Geometry of Gauge fields.* In: Lectures on Geometric Variational Problems. ed. by S.Nishikawa, R.Schoen. pp.43 - 114 Springer - Verlag 1994

[深谷4] K.Fukaya: *Morse homotopy, A^{∞} category and Floer homologies.* In: Proceeding of GARC Workshop on Geometry and Topoloogy '93 ed. by H.J.Kim 1 - 102 (1993) Seoul National University

[深谷5] K.Fukaya: *Floer homology for 3-manifolds with boundary.* In: Topology, Geometry and Field Theory. ed. by K.Fukaya, M.Furuta. T.Kohno, D.Kotchik (1994) 1 - 21. World Scientific (Singapore)

[深谷6] K.Fukaya: *Gauge theory on 4-manifolds with corners.* (preprint)

[深古太] K.Fukaya, M.Furuta, H.Ohta: *Some variants of instanton cohomology groups and intersection form of 4-manifolds with boundary.* (in preparation)

[Li] W.Lie: *Floer homology of connected sum* J. Diff. Geometry, **40** (1994) 129-154

[T4] C.Taubes: *A symplicial model for Donaldson Floer thory.* (preprint)

[T5] C.Taubes: *The role of reducibles in Donaldson-Floer theory.* In: Topology, Geometry and Field Theory. ed. by K.Fukaya, M.Furuta. T.Kohno, D.Kotchik (1994) 171 - 192. World Scientific (Singapore)

[吉田1] T.Yosida: *Floer homology and splitting of manifolds.* Ann. of Math. **134** (1991) 277 - 324

[吉田2] T.Yosida: *Floer homology and holomorphic curves - Atiyah conjecture.* (preprint)

また無限遠で退化している場合の ASD 接続のモジュライ空間の研究がいろいろなところで用いられている．この研究はフレアーホモロジーと密接な関係がある．これについては：

[MMR] J.Morgan, T.Mrowka, D.Ruberman: The Moduli Space, and a Vanishing Theorem for Donaldson Invariants. International Press 1994

[Mr] T.Mrowka: *A Local Myer-Vietris Principle for Yang-Mills Moduli Spaces.* Thesis Harvard 1989

[T6] C.Taubes: Moduli Spaces on 4-Manifolds with Cylindrical Ends I. International Press 1994

それ以外のヤン・ミルズ場関係の論文で本書で引用したのは：

[FS5] R.Fintshell, R.Stern: *2-Torsion instanton invariants.* (preprint)

[FQi] R.Friedman, Qin: *On Complex Surface Diffeomorphic to Rational Surfaces.* Invent. Math. 120 (1995) 81 - 117

[古田4] M.Furuta: 東京大学修士論文.

[GM] R.Gompf, T. Mrowka: *Irreducible four manifolds need not be complex.* Ann. of Math. **138** (1993) 61 - 111

[PT] V. Pidstrigach, A. Tyurin: *Invariants of the smooth structure of an algebraic surface arising from the Dirac operator.* Russian Academy of Science Izvestiya Mathematics (Translations of the Amer. Math. Soc.) **40** (1993) 267-351

[SS] L.& R. Sibner: *Classification of singular Sobolev connections by their holonomy.* Commun. Math. Phys. **144** (1992) 337 - 350

[SSU] L.& R. Sibner, K.Uhlenbeck: *Solution of Yang-Mills equation that are not self-dual.* Proc. Nath. Acad. Sci. USA. **86** no.2 (1989) 8610 - 8613.

[Ko] D.Kotchik: *On manifold homeomorphic to* $\mathbf{C}P^2\sharp 8\overline{\mathbf{C}P^2}$. Invent. Math. **95** (1989) 591 - 600

[KoM] D.Kotchik, J.Morgan: *$SO(3)$invariants for 4-manifolds with $b_2^+ = 1$ II.* J. Differential Geom. **39** (1994) 433 - 456

サイバーグ–ウィッテン理論に関する文献：

[KM4] P. Kronheimer, T. Mrowka: *The genus of embedded surface in the projective plane.* Math. Res. Letters **1** (1994) 797-801

[FM2] R.Friedman, J.Morgan: *Algebraic surfaces and Seiberg-Witten invariants.* (preprint)

[古田5] M.Furuta: *Monopole equation and 11/8 conjecture.* (preprint)

[Br] C.LeBrun: *Einstein metric and Mostow rigidity.* Math. Res. Letters **2** (1994) 1 - 8

[MST] J.Morgan, Z.Szabaut, C.Taubes: *The generalized Thom conjecture.* (to appear)

[太小] H.Ohta, K.Ono: *Notes on Symplectic 4-Manifolds with $b_2^+ = 1$.* (preprint)

[OT] C.Okonek, A.Teleman: *Seiberg-Witten invariant and rationality of complex surfaces.* (preprint)

[T7] C.Taubes: *Seiberg-Witten invariant and symplectic forms.* Math. Res. Letters **1** (1994) 809-822

[T8] C.Taubes: *More constraints on symplectic manifolds from the Seiberg-Witten invariants.* Math. Res. Letters **2** (1994) 9-13

[T9] C.Taubes: *From Seiberg-Witten equations to pseudo holomorphic curves.* (preprint)

[W1] E.Witten: *Monopole and 4-manifolds.* Math. Res. Letters **1** (1994) 769 -796

これらはどれも数学の言葉で書いてある論文である．サイバーグ–ウィッテン理論関係についてだけは物理の論文もあげておこう．

[SW1] N.Seiberg, E.Witten: *Electro magnetic duality, monopole condensation and cofinement in $N = 2$ supersymmetric Yang-Mills theory.* Nucl. Phys. **B436** (1994) 19 - 52

[SW2] N.Seiberg, E.Witten: *Monopole, duality and chiral symmetry breaking in $N = 2$ super symmetric Yang-Mills theory.* Nucl. Phys. **B431** (1994) 581 - 640

[W2] E.Witten: *Topological quantum field theory.* Commun. Math. Phys. **117** (1988) 353 - 386

[W3] E.Witten: *Supersymmetric Yang-Mills theory on a four-manifold.* J. Math. Phys. **35** (1994) 5101

[W4] E.Witten: *On S-duality in Abelian gauge theory.* (preprint, hep-th/9505186

ヤン–ミルズ場に直接関係ない論文で本文中引用したのは：

解析関係

[Ar] N.Arondazajn: *Unique contituation theorem for solution of elliptic partial differential equations or inequalities of second order.* J. Math. Pures and Appl. **36** (1957) 235 - 249

[LM] R. Lockhart, R. McOwen: *Elliptic operators on noncompact manifolds.* Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Pisa **12** (1985) 409 - 446

[Sm] S.Smale: *An infinite dimensional version of Sard's theorem.* Amer. J. Math. **87** (1968) 861 - 866

4 次元トポロジー関係

[FT] M.Freedman, L.Taylor: *Λ-splitting 4-manifolds.* Topology **16** (1977) 181 - 184

[久我] K.Kuga: *Representing homology classes of $S^2 \times S^2$.* Topology **23** (1984) 133- 137

[松本 4] Y.Matumoto: *Diffeomorphism types of elliptic surfaces.* Topology **25** (1986) 549 - 563

[上 2] M.Ue: *On the diffeomorphism types of elliptic surfaces.* Invent. Math. **84** (1986) 633 - 643

その他

[AM] S.Akubult, J. MacCarthy: Casson's Invariant for Oriented Homology 3 Spheres - An Exposition. Princeton Mathematical notes **36**, Princeton University Press, 1990

[小平 5] K. Kodaira: *On homotopy K-3 surfaces.* In: Essays on Topology and Related Topics. pp. 58 - 69. Springer-Verlag 1970

[倉西] M.Kuranishi: *New proof for the existence of locally complete families of complex structures.* In: Proceeding of Conference on Complex Analysis Minneapolis. ed. by A.Aeppli, E.Calabi, H.Röhrl, pp. 142 - 154. Springer-Verlag 1964

[SU] J.Sacks, K.Uhlenbeck: *The existence of minimal immersions of 2-sphers.* Ann. of Math. **60** (1965) 540 - 567

[W5] E.Witten: *Supersymmetry and Morse theory.* J. Differential Geom. **17** (1982) 661 - 692

[W6] E.Witten: *Quantum field theory and the Jones polynomial.* Comm. Math. Phys. **121** (1989) 353 - 386

記号索引

事項索引

■マ

■ヤ

著 者

深谷 賢治（ふかや けんじ）
1959年生
東京大学大学院
理学系研究科修士課程修了
京都大学理学部数学科教授

シュプリンガー現代数学
シリーズ編者

伊藤 雄二（いとう ゆうじ）
慶応義塾大学理工学部
数理科学科教授

ゲージ理論とトポロジー　定価 6,200 円（本体 6,020 円・税 180 円）

発 行　1995年10月22日
著 者　深谷 賢治
発行者　平野 皓正
発行所　シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社
〒113 東京都文京区本郷3丁目3番13号
TEL (03) 3812-0757（営業直通）
印刷所　三松堂

ISBN4-431-70668-2 C3041